经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-4）

坐标系与参数方程

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-4）

坐标系与参数方程

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　李延林　李慧民

编写人员　（按姓氏笔画排序）

王尚志　张饴慈　李延林

李慧民

北京师范大学出版社

·北京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮 购 科 电 话　010-58808083
传　　　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电 子 邮 箱　shuxue3@bnupg.com
通 信 地 址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：4
字　　数：100 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2019 年 7 月第 25 次印刷
定　　价：3.95 元
ISBN　978-7-303-08182-0

责任编辑：焦继红　邢自兴　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

目　录

第一章　坐标系 ………………………………………………………… (1)
§1　平面直角坐标系 ………………………………………………………… (2)
习题1—1 ………………………………………………………… (7)
§2　极坐标系 ………………………………………………………… (8)
习题1—2 ………………………………………………………… (18)
§3　柱坐标系和球坐标系 ………………………………………………………… (20)
习题1—3 ………………………………………………………… (22)
阅读材料　笛卡儿与坐标系 ………………………………………………………… (23)
本章小结建议 ………………………………………………………… (24)
复习题一 ………………………………………………………… (25)

第二章　参数方程 ………………………………………………………… (26)
§1　参数方程的概念 ………………………………………………………… (26)
习题2—1 ………………………………………………………… (28)
§2　直线和圆锥曲线的参数方程 ………………………………………………………… (29)
习题2—2 ………………………………………………………… (38)
§3　参数方程化成普通方程 ………………………………………………………… (40)
习题2—3 ………………………………………………………… (42)
§4　平摆线和渐开线 ………………………………………………………… (44)
习题2—4 ………………………………………………………… (47)
阅读材料1　其他摆线 ………………………………………………………… (48)
阅读材料2　摆线的应用研究 ………………………………………………………… (51)
本章小结建议 ………………………………………………………… (52)
复习题二 ………………………………………………………… (53)

附录1　部分数学专业词汇中英文对照表 ………………………………………………………… (55)

附录2　信息检索网址导引 ………………………………………………………… (56)

第一章　坐标系

坐标系的思想是 17 世纪著名数学家笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)提出的，它是解析几何的基础，是联系几何与代数的桥梁，是现代数学最重要的基本思想之一.

坐标系的建立为确定物体的位置、研究物体运动的轨迹、探讨曲线的几何性质、分析函数的变化等提供了方便.

在现实生活中，人们经常需要确定物体的位置.

例如，一名到北京的游客，他想借助于地图来确定颐和园相对于天安门的位置. 通常可以用两种方法：一种方法是确定从天安门向西多少千米，再向北多少千米就可以到达颐和园；另一种方法是确定颐和园在天安门北偏西多少度，距离多少千米. 显然，确定颐和园的位置只需要两个数就可以了，即东西和南北两个方向的垂直距离，或者是方位角和距离.

又如，一位观众到某歌剧院观看演出，如何找到自己的座位呢？根据入场券，首先确定座位是在楼上还是楼下，然后找到座位所在的排数，最后在这一排找到相应的座位. 显然，只要知道三个维度就可以找到自己的座位了.

再如，北京位于地球的北纬 40°、东经 116°，即通常用经度和纬度这两个维度来确定北京的位置.

我们可以根据确定的对象所需要的维度来建立适当的坐标系，用坐标刻画所研究的对象，用代数方法解决几何问题.

本章将通过对几种常见坐标系的讨论来体会坐标思想的作用.

§1　平面直角坐标系

1.1　平面直角坐标系与曲线方程

在平面直角坐标系中，对于任意一点，都有唯一的有序实数对 (x,y) 与之对应；反之，对于任意的一个有序实数对 (x,y)，都有唯一的点与之对应. 即在平面直角坐标系中，点和有序实数对是一一对应的. 曲线可看作是满足某些条件的点的集合或轨迹，由此我们可借助坐标系，研究曲线与方程间的关系.

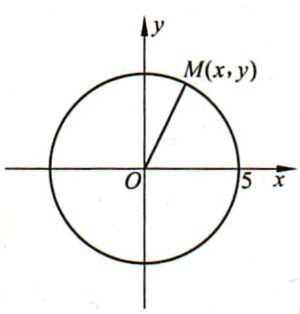


图 1-1

例如，圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合. 对于半径等于 5 的圆 O，以它的圆心为原点、互相垂直的两条半径所在的直线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，如图 1-1.

在圆上任意选取一点 $M(x,y)$，根据圆的定义可知：

$$|OM|=5.$$

由两点间距离公式可得：

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=5,$$

即
$$x^2+y^2=25.$$

由此可见，以原点为圆心、5 为半径的圆上的点的坐标都是方程 $x^2+y^2=25$ 的解.

反之，设 x_1，y_1 是方程 $x^2+y^2=25$ 的任意一组解，则有

$$x_1^2+y_1^2=25,$$

即
$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=5.$$

这表明以 (x_1,y_1) 为坐标的点到原点的距离等于 5，即这个点在以原点为圆心、5 为半径的圆上.

这样，我们就可以用 $x^2+y^2=25$ 来表示以原点为圆心、5 为半径的圆，并且称 $x^2+y^2=25$ 是以原点为圆心、5 为半径的圆的方程.

思考交流

1. 在平面直角坐标系中，圆心坐标为 $(2,3)$、5 为半径的圆的方程是什么？

2. 在平面直角坐标系中，以 (a,b) 为圆心、r 为半径的圆的方程

是什么?

抽象概括

在平面直角坐标系中,如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系:

1. 曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解;

2. 以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

那么,方程 $f(x,y)=0$ 叫作曲线 C 的方程,曲线 C 叫作方程 $f(x,y)=0$的曲线.

这样,我们就可以通过建立适当的平面直角坐标系,应用方程来表示许多常见的曲线,在必修课和选修系列 1,2 中我们学习过如下一些曲线的方程:

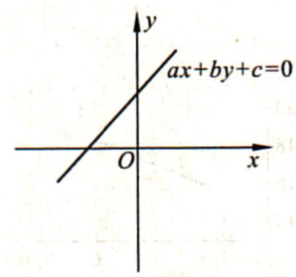


图 1-2

直线的方程(如图 1-2):$ax+by+c=0$;

圆的方程(如图 1-3):$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,其中(a,b)为圆心,r 为半径.

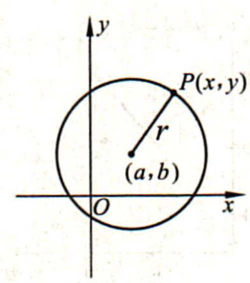


图 1-3

椭圆的方程(如图 1-4):$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其中椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,长轴长为 $2a$,短轴长为 $2b$.

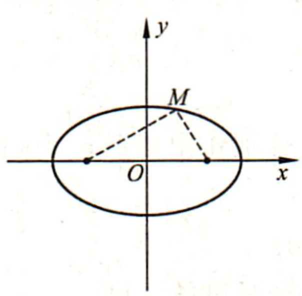


图 1-4

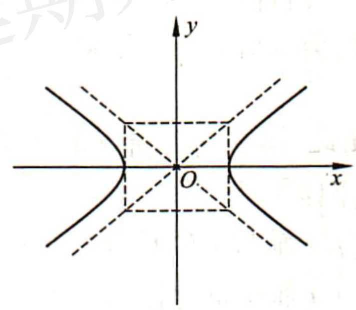


图 1-5

双曲线的方程(如图 1-5):$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,其中双曲线的中心在原点,焦点在 x 轴上,实轴长为 $2a$,虚轴长为 $2b$.

抛物线的方程(如图 1-6):$y^2=2px(p>0)$,其中抛物线的顶点在原点,以 x 轴为对称轴,开口向右.

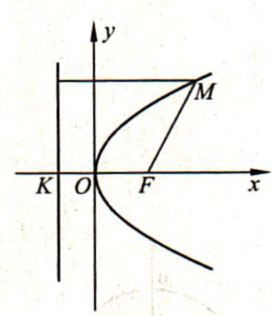


图 1-6

练 习

1. 已知等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 6,腰长为 5,建立两个不同的直角坐标系,分别求出三边所在直线的方程.

2. 画出下列方程所表示的曲线.

(1) $(x-2)^2+(y+7)^2=0$;

(2) $(x-1)^2=8-(y+2)^2$;

(3) $y=\sqrt{2-x^2}$.

1.2　平面直角坐标轴中的伸缩变换

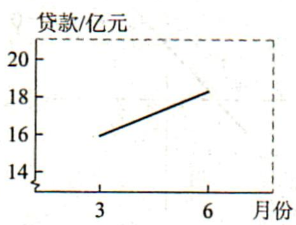


图 1-7

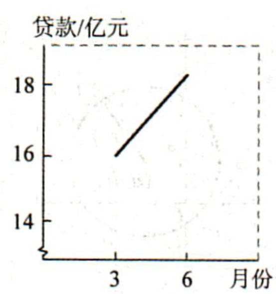


图 1-8

在现实生活和生产实际中，需要处理大量数据和资料，统计图是重要工具. 一般情况下，绘制统计图都需要借助平面直角坐标系，当绘制者在 x 轴与 y 轴上选择不同的单位长度时，统计图就会产生不同的效果，如果选择适当，可以清晰地反映出事物的特征，如果选择不好，会使人产生误解. 例如，某银行信用卡贷款由 1995 年 3 月的 15.924亿元上升到 1995 年 6 月的18.281亿元，可以用图 1-7 和图 1-8来表示增长幅度.

在这两个图中所表示的数据是相同的，但是给我们的感觉是图 1-8显示的增长幅度要大，产生这种误解的原因是两图中坐标轴选择的单位长度不一样.

在平面直角坐标系中进行伸缩变换，即改变 x 轴或 y 轴的单位长度，将会对图形产生影响.

例 1　在下列平面直角坐标系中，分别作出以原点为圆心，6 为半径的圆：

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；

(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的$\frac{1}{2}$倍.

解　以原点为圆心，6 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=36$.

列表(如表 1-1).

表 1-1

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5.92	5.66	5.20	4.47	3.32	0

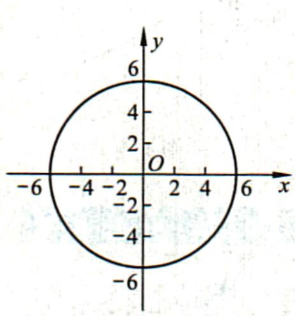


图 1-9

(1) 建立平面直角坐标系使 x 轴与 y 轴具有相同的单位长度，根据点的坐标描点，将这些点光滑连接，再由对称性即可得到圆 $x^2+y^2=36$的图形为图 1-9；

(2) 如果 x 轴的单位长度保持不变，y 轴的单位长度缩小为原来

的$\frac{1}{2}$,圆 $x^2+y^2=36$ 的图形为图 1-10;

(3) 如果 y 轴的单位长度保持不变,x 轴的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$,圆 $x^2+y^2=36$ 的图形为图 1-11.

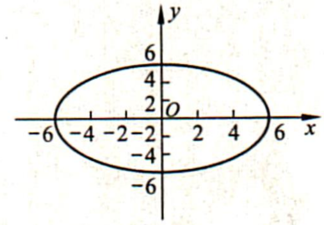


图 1-10

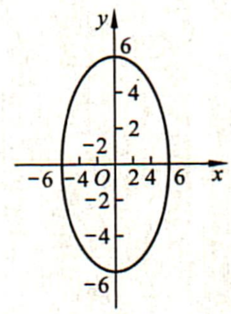


图 1-11

思考交流

我国 1990 年至 2000 年的国内生产总值如表 1-2(单位:亿元).

表 1-2

年　份	1994	1995	1996	1997	1998
生产总值	43 800	57 733	67 795	74 772	79 553
年　份	1999	2000	2001	2002	2003
生产总值	82 054	89 404	95 933	102 398	116 694

选择适当的平面直角坐标系,根据表 1-2 画出统计图,与同学交流,观察各自的特点.

例 2 在下列平面直角坐标系中,分别作出$|x|+|y|=1$的图形:

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度;

(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍;

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的$\frac{1}{2}$倍.

解 (1) 建立平面直角坐标系使 x 轴与 y 轴具有相同的单位长度,$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-12;

(2) 如果 x 轴上的单位长度保持不变,y 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$,$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-13;

(3) 如果 y 轴上的单位长度保持不变,x 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$,$|x|+|y|=1$ 的图形为图 1-14.

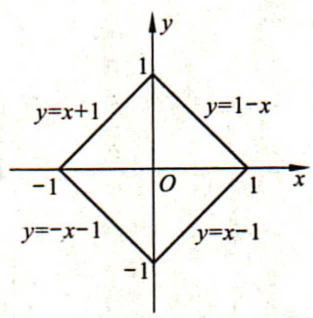


图 1-12

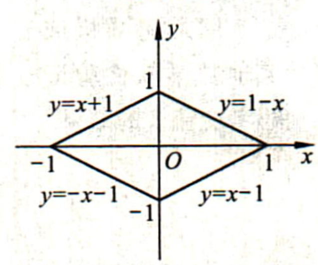


图 1-13

为了揭示做简谐振动物体的位移 s 与时间 t 的关系,交流电中电流 I 与时间 t 的关系,都要用到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数. 在必修课中阐明了在同一个坐标系中,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$与 $y=\sin x$ 图像间的关系. 这里我们来讨论改变坐标轴的单位长度,函数 $y=\sin x$ 的图像会发生什么变化.

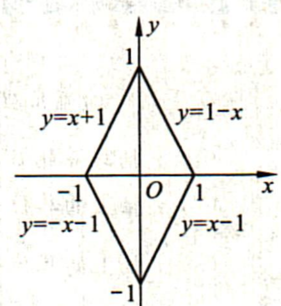


图 1-14

***例 3** (1)在 x 轴与 y 轴具有相同单位长度的直角坐标系中分别作出 $y=\sin x$,$y=2\sin 3x$ 的图像;

(2)将上述坐标系 x 轴的单位长度缩短为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍、y 轴的单位长度伸长为原来的 2 倍再作出 $y=\sin x$ 的图像.

解 (1)画出 x 轴与 y 轴具有相同单位长度的直角坐标系，经过描点连线分别作出 $y=\sin x$，$y=2\sin 3x$ 的图像，即图 1-15.

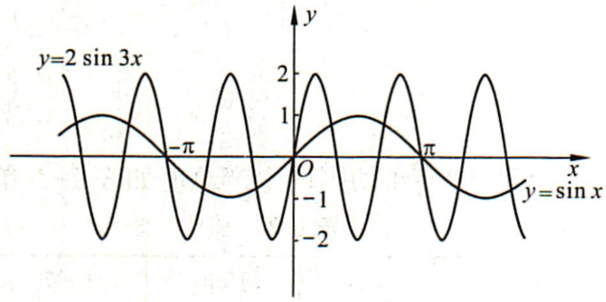


图 1-15

(2)建立坐标系，把 x 轴的单位长度缩短为(1)中 x 轴单位长度的 $\frac{1}{3}$ 倍，y 轴的单位长度伸长为(1)中 y 轴单位长度的 2 倍，再经过描点连线作出 $y=\sin x$ 的图像，即图 1-16.

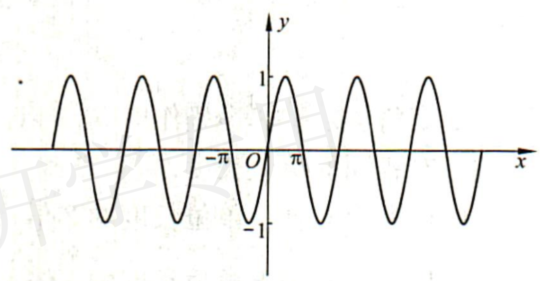


图 1-16

信息技术建议

用几何画板或其他数学软件验证思考交流 2 的结果.

* **思考交流**

1. 观察例 3(2)中 $y=\sin x$ 的图像与(1)中 $y=2\sin 3x$ 的图像，讨论它们的关系.

2. 试将上述讨论引申为坐标轴单位长度任意伸缩的情况.

练 习

在下列平面直角坐标系中，分别作出椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$：

(1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；

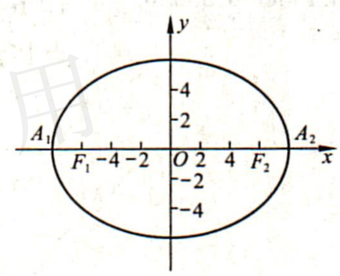
(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；

(3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 $\frac{1}{2}$ 倍.

习题 1—1

A 组

1. 已知两点 $A\left(1,\frac{1}{6}\right)$，$B(-5,6)$，写出经过这两点的直线方程.
2. 已知直线方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=-2$，写出直线与 x 轴和 y 轴的交点坐标以及直线的斜率.
3. 已知△ABC 的顶点坐标是 $A(2,3)$，$B(5,3)$，$C(2,7)$，求∠A 的平分线长及其所在直线的方程.
4. 试用两种方法证明：三点 $A(-2,12)$，$B(1,3)$，$C(4,-6)$ 在同一条直线上.
5. 求直线 $2x-5y-10=0$ 与坐标轴所围成的三角形的面积.
6. 建立平面直角坐标系证明：矩形的两条对角线长相等.
7. 求下列各圆的标准方程，并画出它们的图形：
   (1) 过点 $C(-1,1)$ 和 $D(1,3)$，圆心在 x 轴上；
   (2) 半径是 5，圆心在 y 轴上，且与直线 $y=6$ 相切；
   (3) 过点 $A(5,2)$ 和 $B(3,-2)$，圆心在直线 $2x-y=3$ 上；
   (4) 过点 $A(3,2)$，圆心在直线 $y=2x$ 上，且与直线 $y=2x+5$ 相切.
8. 一个等腰三角形的底边长是 8，底边上的高等于 5. 建立适当的平面直角坐标系，求出它的外接圆的方程.
9. 如图，椭圆上的点中，A_1 与焦点 F_1 的距离最近，且 $|A_1F_1|=2$，A_2 与焦点 F_1 的距离最远，且 $|A_2F_1|=14$. 求椭圆的标准方程.



(第 9 题)

10. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：
    (1) 经过两点 $P(-2\sqrt{2},0)$，$Q(0,\sqrt{5})$；
    (2) 长轴长是短轴长的 3 倍，且经过点 $P(3,0)$；
    (3) 焦点坐标是 $(-2\sqrt{3},0)$ 和 $(2\sqrt{3},0)$，并且经过点 $P(\sqrt{5},-\sqrt{6})$.
11. 在下列平面直角坐标系中，分别作出 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的图形：
    (1) x 轴与 y 轴具有相同的单位长度；　(2) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍；
    (3) x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 $\frac{1}{2}$ 倍.

B 组

1. 已知一个圆直径的端点是 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 证明：圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.
2. 已知圆 $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ 和圆 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-5)^2=1$. 求过这两个圆交点的直线方程.
3. 我国发射的一颗科学实验人造地球卫星的运行轨道是以地球球心为一个焦点的椭圆，椭圆上的点与地面的最近距离是 266 km，最远距离是 1 826 km. 求这颗卫星运行轨道的方程.（地球半径约为6 370 km）

§2　极坐标系

2.1　极坐标系的概念

平面直角坐标系是常用的一种坐标系.为了更方便地刻画点和曲线,有时,我们还引入其他形式的坐标系.例如,在航海、航空中,常用方位角和距离来描述雷达搜索到的目标位置.

> **注**
> n mile 为海里.(只用于航程)
> 1 n mile=1 852 m.

例如,在海岸 A 处,发现北偏东 $45°$方向、距 A 为 0.7 n mile的 B 处有一艘走私船,在 A 北偏西 $75°$方向、距 A 为 2 n mile的 C 处的缉私船奉命以 17 n mile/h 的速度追截走私船,此时走私船正以 10 n mile/h的速度从 B 处向北偏东 $30°$的方向逃窜,最终缉私船在 D 点将走私船截获(如图 1-17).

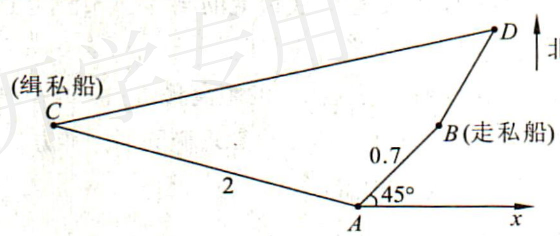


图 1-17

如果从 A 点向正东方向引射线 Ax,选取合适的长度单位表示 1 n mile、逆时针方向为角的正方向,则点 B 就可以用一组数值 $\left(0.7,\frac{\pi}{4}\right)$来表示了,其中,0.7 表示 AB 距离的长度,$\frac{\pi}{4}$表示射线 AB 与 Ax 夹角的度数.同理,点 C 可以表示为$\left(2,\frac{11\pi}{12}\right)$.

按照这样的方法,我们就可以给出平面内用距离和角来表示点的位置的坐标系——极坐标系.

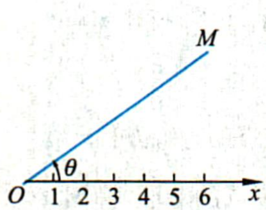


图 1-18

如图 1-18,在平面内取一个定点 O,叫作**极点**,从 O 点引一条射线 Ox,叫作**极轴**,选定一个单位长度和角的正方向(通常取逆时针方向).这样就确定了一个**平面极坐标系**,简称为**极坐标系**.

对于平面内任意一点 M,用 ρ 表示线段 OM 的长,θ 表示以 Ox 为始边、OM 为终边的角度,ρ 叫作点 M 的**极径**,θ 叫作点 M 的**极角**,有序实数对(ρ,θ)叫作点 M 的**极坐标**,记作 $M(\rho,\theta)$.

当点 M 在极点时,它的极径 $\rho=0$,极角 θ 可以取任意值.

例 1　在极坐标系中描出下列各点：

(1) $A(4,0)$；　(2) $B\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$；　(3) $C\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$.

解　如图 1-19.

(1) 因为点 A 的极角为 0，所以点 A 就在极轴 Ox 上，又因为点 A 的极径为 4，所以在 Ox 轴上取 $OA=4$，则 A 就是我们要画出的点 $(4,0)$；

(2) 把极轴 Ox 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，在角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边上取 $OB=3$，则点 B 就是我们要画出的点 $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) 把极轴 Ox 逆时针旋转 $\frac{4\pi}{3}$，在角 $\frac{4\pi}{3}$ 的终边上取 $OC=6$，则点 C 就是我们要画出的点 $\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$.

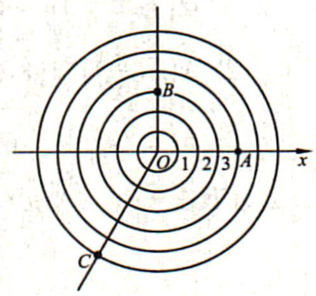


图 1-19

若极角取负值，则上例中点 A,B,C 的极坐标又可以表示为

$$A(4,-2\pi),B\left(3,-\frac{3\pi}{2}\right),\ C\left(6,-\frac{2\pi}{3}\right).$$

为了研究问题方便，极径 ρ 也允许取负值.

当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho,\theta)$ 的位置可以按下列规则确定：作射线 OP，使 $\angle xOP=\theta$，在 OP 的反向延长线上取一点 M，使 $|OM|=|\rho|$，这样点 M 的坐标就是 (ρ,θ)，如图 1-20.

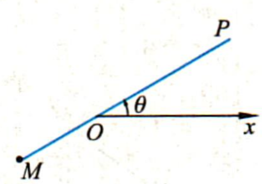


图 1-20

在上例中，当极径取负值时，各点的极坐标可表示为

$$A(-4,\pi),B\left(-3,\frac{3\pi}{2}\right),C\left(-6,\frac{\pi}{3}\right).$$

抽象概括

显然，平面内一点的极坐标可以有无数对. 当 $k\in\mathbf{Z}$ 时，(ρ,θ)，$(\rho,\theta+2k\pi)$，$(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$ 表示同一个点，而用平面直角坐标表示点时，每一个点的坐标是唯一的. 但是，建立了极坐标系后，如果规定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 或者 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面内的点和极坐标就一一对应了.

建立了极坐标系后，对于给定的 ρ 和 θ，就可以在平面内确定唯一的点 M；反过来，对于给定的平面内的一点 M，也可以写出它的极坐标 (ρ,θ).

练 习

1. 在极坐标系中，作出下列各点：

(1) $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$， $B(6,-120°)$， $C\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$，

$D\left(4,-\frac{3\pi}{4}\right)$， $E(4,0)$， $F(2.5,180°)$；

(2) $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$，$D(3,\pi)$，$E\left(3,\frac{3\pi}{2}\right)$，并说明这 5 个点有什么关系；

(3) $A\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(-1,\frac{\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，$D\left(4.5,\frac{\pi}{6}\right)$，$E\left(4.55,\frac{\pi}{6}\right)$，并说明这 5 个点有什么关系.

2. 在极坐标中，点(ρ,θ)与$(-\rho,\pi-\theta)$有什么关系？

2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

极坐标系和平面直角坐标系是两种不同的坐标系. 同一个点在不同的坐标系中，要用不同的数对来表示. 下面我们讨论点的极坐标与直角坐标的互化.

分析理解

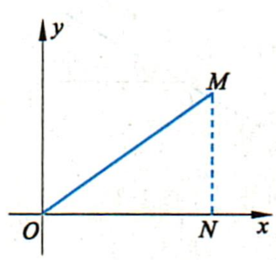


图 1-21

如图 1-21，建立一个平面直角坐标系，把平面直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，建立极坐标系，并在两种坐标系中取相同的单位长度.

设 M 是平面内的任意一点，它的直角坐标是(x,y)，极坐标是(ρ,θ). 如果限定 ρ 取正值，$\theta\in[0,2\pi)$，那么除原点外，平面内点的直角坐标与极坐标之间就是一一对应的.

过点 M 作 $MN\perp Ox$，垂足为 N，于是，由三角函数定义，我们得到将点 M 的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases} \quad ①$$

由关系式①，可以得到：

将点的直角坐标(x,y)化为极坐标(ρ,θ)的关系式为

$$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0).\end{cases}$$

例 2 把下列点的极坐标化成直角坐标：

(1) $A\left(2,\frac{3\pi}{4}\right)$；　　(2) $B\left(4,\frac{14\pi}{3}\right)$；

(3) $M\left(-5,\frac{\pi}{6}\right)$；　　(4) $N(-3,-\pi)$.

解　(1) 因为$x=2\cos\frac{3\pi}{4}=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$,

$$y=2\sin\frac{3\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},$$

所以点 A 的直角坐标是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$；

(2) 因为点 B 的极坐标又可以写成$\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以

$$x=4\cos\frac{2\pi}{3}=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,$$

$$y=4\sin\frac{2\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3},$$

所以点 B 的直角坐标是$(-2,2\sqrt{3})$；

(3) 因为点 M 的极坐标又可以写成$\left(5,\frac{7\pi}{6}\right)$,所以

$$x=5\cos\frac{7\pi}{6}=5\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$y=5\sin\frac{7\pi}{6}=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2},$$

所以点 M 的直角坐标是$\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$；

(4) 因为点 N 的极坐标又可以写成$(3,0)$,所以

$$x=3\cos 0=3\times 1=3,$$
$$y=3\sin 0=3\times 0=0,$$

所以点 N 的直角坐标是$(3,0)$.

例 3　把下列点的直角坐标化成极径 ρ 是正值,极角在 0 到 2π 之间的极坐标:

(1) $M(-\sqrt{3},-1)$；　(2) $N(\sqrt{2},-\sqrt{6})$.

解　(1) $\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$,

$$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为点 M 在第三象限,$\rho>0$,所以最小正角 $\theta=\frac{7\pi}{6}$.

因此,点 M 的极坐标是$\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$.

(2) $\rho=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$,

$\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$.

因为点 N 在第四象限，$\rho>0$，所以最小正角 $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$.

因此，点 N 的极坐标是 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

练 习

1. 在极坐标系中作出下列各点，并求它们的直角坐标：

$A\left(4,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$B\left(2,\dfrac{4\pi}{3}\right)$，$C(-7,\pi)$，$D\left(5,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$E\left(-2,-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. 把下列点的直角坐标化成极径 ρ 是正值，极角在 0 到 2π 之间的极坐标：

$A(-1,-1)$，$B(4,-4\sqrt{3})$，$C(\sqrt{3},1)$，$D(0,4)$.

2.3 直线和圆的极坐标方程

在平面直角坐标系中，一条曲线可以用含变量 x,y 的方程来表示. 但有时我们却需要用角和距离来表示物体运动的轨迹，例如，射击运动员在瞄准飞行中的目标时，就要研究飞行目标的运动轨迹，这条曲线相对于射击运动员来说，用角和距离来表示会更加方便和实用.

在极坐标系中，曲线可以用含有 ρ,θ 这两个变量的方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 来表示. 如果曲线 C 上的点与一个二元方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 建立了如下的关系：

1. 曲线 C 上的每个点的极坐标中至少有一组 (ρ,θ) 满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$；

2. 极坐标满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的点都在曲线 C 上.

那么方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 叫作曲线 C 的极坐标方程，曲线 C 叫作极坐标方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的曲线.

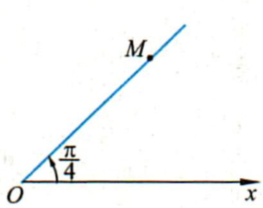


图 1-22

例 4 分别求出从极点出发，倾斜角是 $\dfrac{\pi}{4}$ 的射线和直线的极坐标方程.

解 (1) 如图 1-22，设 $M(\rho,\theta)(\rho\geqslant 0)$ 是射线上任意一点，则点

M 的坐标满足 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\rho\geqslant 0$，这就是所求射线的极坐标方程. 方程中不含有 ρ，说明射线上点的极径 ρ 取任何非负实数都有 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 成立.

(2) 如图 1-23，设 $N(\rho,\theta)$ 是直线上任意一点，则点 N 的坐标满足 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\rho\in\mathbf{R}$，这就是所求直线的极坐标方程. 方程中不含有 ρ，说明直线上点的极径 ρ 无论取任何实数都有 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 成立.

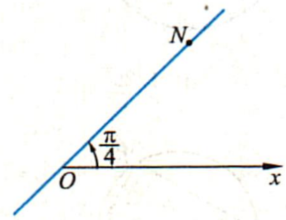


图 1-23

例 5 求经过点 $A(3,0)$、垂直于极轴的直线的极坐标方程.

解 设 $M(\rho,\theta)$ $(\rho\geqslant 0)$ 是直线上任意一点，连接 OM（如图 1-24）.

在 Rt$\triangle OAM$ 中，$OM\cdot\cos\theta=3$，

即
$$\rho\cos\theta=3,$$

这就是经过点 $A(3,0)$、垂直于极轴的直线的极坐标方程.

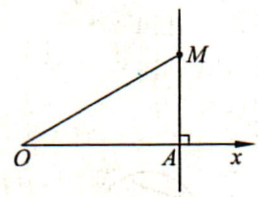


图 1-24

***例 6** 求经过点 $A(2,0)$、倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线的极坐标方程.

解 设 $M(\rho,\theta)$ $(\rho\geqslant 0)$ 是直线上任意一点，连接 OM（如图 1-25）. 在 $\triangle OMA$ 中，由正弦定理知

$$\frac{OA}{\sin\angle OMA}=\frac{OM}{\sin\angle OAM},$$

即
$$\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{\rho}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)},$$

所以
$$\rho\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=1.$$

这就是经过点 $A(2,0)$、倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线的极坐标方程.

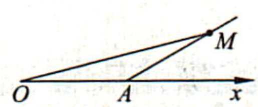


图 1-25

练 习

1. 判断：在极坐标系中，$\tan\theta=1$ 与 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 表示同一条直线.
2. 求经过点 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$、平行于极轴的直线的极坐标方程.
3. 求经过点 $(2,0)$、倾斜角是 $\frac{\pi}{4}$ 的直线的极坐标方程.

例 7 求圆心在极点、半径为 r 的圆的极坐标方程.

解 设圆上任意一点 M 的坐标是 (ρ,θ). 根据圆的几何特征可

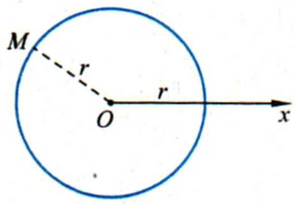


图 1-26

知，无论 θ 取什么值，总有 $\rho=r$. 因此圆心在极点、半径为 r 的圆的极坐标方程就是 $\rho=r$（如图 1-26）.

例 8 求圆心在 $(a,0)(a>0)$、半径为 a 的圆的极坐标方程.

解 由题设可知，这个圆经过极点，圆心在极轴上，设圆与极轴的另一个交点是 A. 在圆上取任意一点 $M(\rho,\theta)$，连接 OM，MA（如图 1-27）.

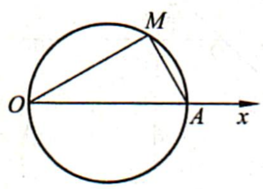


图 1-27

在 Rt$\triangle OMA$ 中，$OA\cdot\cos\angle MOA=OM$，

即
$$2a\cos\theta=\rho.$$

这就是圆心在 $(a,0)(a>0)$、半径为 a 的圆的极坐标方程.

***例 9** 求圆心在 $A(2,0)$、半径为 1 的圆的极坐标方程.

解 在圆上取任意一点 $M(\rho,\theta)(\rho>0)$，连接 OM，MA（如图 1-28），在 $\triangle OMA$ 中，由余弦定理可知

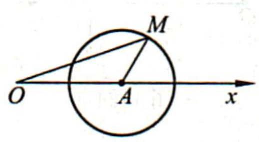


图 1-28

$$AM^2=OM^2+OA^2-2\cdot OM\cdot OA\cdot\cos\angle AOM,$$

所以有
$$1=\rho^2+4-4\rho\cos\theta,$$

即
$$\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0.$$

这就是所求的圆心在 $A(2,0)$、半径为 1 的圆的极坐标方程.

练　习

1. 在极坐标系中有如下 3 个结论：

   ① 点 P 在曲线 C 上，则点 P 的所有极坐标满足曲线 C 的极坐标方程；

   ② $\rho=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ 与 $\rho=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 表示同一条曲线；

   ③ $\rho=3$ 或 $\rho=-3$ 表示同一条曲线

   在这 3 个结论中正确的是：

   A. ①③　　B. ①　　C. ②③　　D. ③

2. 求圆心在 $A(3,\pi)$、半径为 3 的圆的极坐标方程.

3. 求圆心在 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)(a>0)$、半径为 a 的圆的极坐标方程.

2.4 曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化

我们已经知道，同一条曲线在不同的坐标系中，会有不同的方程. 为了研究问题方便，有时需要把在一种坐标系中的方程化为在另一种坐标系中的方程.

根据点的直角坐标与极坐标互化关系式，曲线方程两种形式的互化便可以顺利完成.

例 10　将下列曲线的极坐标方程化成直角坐标方程.

(1) $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0$；

(2) $\rho-\cos\theta=0$；

(3) $\rho^2\cos 2\theta=16$.

解　(1) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

代入

$$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0,$$

可得曲线的直角坐标方程

$$x-y-2=0.$$

(2) 由于曲线经过极点，所以方程可以变形为 $\rho^2-\rho\cos\theta=0$.

将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

代入

$$\rho^2-\rho\cos\theta=0,$$

可得曲线的直角坐标方程

$$x^2+y^2-x=0.$$

> **思　考**
>
> $x^2+y^2-x=0$ 是哪种曲线？

(3) 由二倍角的余弦公式，原方程变形为 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=16$.

将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

代入

$$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=16,$$

可得曲线的直角坐标方程

$$x^2-y^2=16.$$

例 11　将下列曲线的直角坐标方程化成极坐标方程.

(1) $x-y-2=0$；

(2) $x^2+y^2-2ax=0$；

(3) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

(4) $\dfrac{y^2}{64}-\dfrac{x^2}{36}=1$；

(5) $y^2=-48x$.

解　(1) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

代入 $$x-y-2=0,$$

可得 $$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0.$$

这就是 $x-y-2=0$ 的极坐标方程.

(2) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

代入 $$x^2+y^2-2ax=0,$$

得 $$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2a\rho\cos\theta=0,$$

即 $$\rho^2-2a\rho\cos\theta=0.$$

所以 $\rho=2a\cos\theta$ 就是 $x^2+y^2-2ax=0$ 的极坐标方程.

(3) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

代入 $$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,$$

可得曲线的极坐标方程

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{25}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{9}=1,$$

即 $$9\rho^2+16\rho^2\sin^2\theta-225=0.$$

(4) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

代入 $$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1,$$

可得曲线的极坐标方程

$$\frac{\rho^2\sin^2\theta}{64}-\frac{\rho^2\cos^2\theta}{36}=1,$$

即 $$9\rho^2\cos 2\theta+7\rho^2\cos^2\theta+576=0.$$

(5) 将点的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)的关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

代入 $$y^2=-48x,$$

可得曲线的极坐标方程

$$\rho^2\sin^2\theta=-48\rho\cos\theta.$$

由于曲线经过极点，所以方程可化简为

$$\rho\sin^2\theta+48\cos\theta=0.$$

练 习

1. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $x=5$； (2) $2x-5y=0$； (3) $x^2+y^2=25$； (4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$； (5) $y^2=8x$.

2. 已知一个圆的极坐标方程是 $\rho=5\sqrt{3}\cos\theta-5\sin\theta$，求这个圆的圆心和半径.

3. 直线 $\theta=\alpha$ 与 $\rho\cos(\theta-\alpha)=1$ 的位置关系是（　　）.

A. 平行 B. 垂直 C. 相交不垂直 D. 与 α 有关，不确定

4. 圆 $\rho=\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)$ 的圆心的极坐标是（　　）.

A. $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ C. $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$

5. 极坐标方程 $4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是（　　）.

A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线的一支 D. 抛物线

*2.5 圆锥曲线统一的极坐标方程

由必修课的学习我们已经知道：与一个定点的距离和一条定直线（定点不在定直线上）的距离的比等于常数 e 的点的轨迹，当 $e=1$ 时，是抛物线. 那么当 $0<e<1$ 及 $e>1$ 时，点的轨迹是什么曲线呢？可以借助极坐标系进行讨论.

设定点为 F，定直线为 l，过定点 F 作定直线 l 的垂线，垂足为 K，以 F 为极点，FK 的反向延长线 Fx 为极轴，建立极坐标系（如图 1-29）.

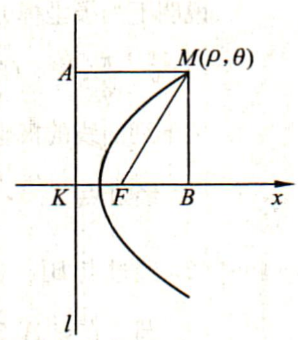


图 1-29

设 $M(\rho,\theta)$ 是曲线上任意一点，连接 MF，作 $MA\perp l$，$MB\perp Fx$，垂足分别为 A，B，则有

$$\frac{|MF|}{|MA|}=e.$$

设定点 F 到定直线 l 的距离 $|FK|=p$，由 $|MF|=\rho$，$|MA|=|BK|=p+\rho\cos\theta$ 得

$$\frac{\rho}{p+\rho\cos\theta}=e,$$

即

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}. \quad (1)$$

为了判断上述方程表示的曲线的形状，再将它化成直角坐标方程.

方程(1)变形为

$$\rho=e\rho\cos\theta+ep,$$

再将 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\rho\cos\theta=x$ 代入上式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=e(x+p),$$

两边平方后，整理可得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px=e^2p^2. \quad (2)$$

当 $e=1$ 时，方程(1)是抛物线的方程，当 θ 从 $0(\theta\neq 0)$ 变化到 2π，就得到抛物线上所有的点.

思考交流

当 $0<e<1$ 时，方程(1)表示了什么曲线？角 θ 在什么范围内变化即可得到曲线上所有的点？

当 $e>1$ 时，方程(1)表示了什么曲线？角 θ 在什么范围内变化即可得到曲线上所有的点？

习 题 1—2

A 组

1. 在极坐标系中，作出下列各点：

$A(3,0)$，$B\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$，$C\left(5,\frac{2\pi}{3}\right)$，$D(-2,\pi)$，$E\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 在极坐标系中，已知 $A(\rho,\theta)$，$B(\rho,-\theta)$，$C(-\rho,-\theta)$，$D(-\rho,\theta)$，则点 A 和 B，C，D 分别有怎样的相互位置关系？

3. 说明下列极坐标方程表示什么曲线，并画图：

(1) $\theta=\frac{\pi}{3}$；　(2) $\rho\cos\theta=2$；　(3) $\rho=3$；　(4) $\rho=6\cos\theta$；　(5) $\rho=10\sin\theta$.

4. 求下列曲线的极坐标方程：

(1) 经过点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$、平行于极轴的直线；

(2) 经过点 $B\left(-2,\frac{\pi}{4}\right)$、垂直于极轴的直线；

(3) 圆心在点 $A(5,\pi)$、半径等于 5 的圆；

(4) 经过点 $C(a,0)$、与极轴相交成 α 角的直线.

5. 把下列直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $x^2+y^2=16$；　(2) $xy=a$；

(3) $x^2+y^2+2y=0$；　(4) $x^2-y^2=a^2$.

6. 把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $\rho=\frac{5}{\cos\theta}$；　(2) $\rho(2\cos\theta-5\sin\theta)-3=0$；

(3) $\rho+\frac{6\cot\theta}{\sin\theta}=0$；　(4) $\rho=\frac{6}{1-2\cos\theta}$.

7. 极坐标方程 $\rho=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 表示的曲线是(　　).

A. 双曲线　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 圆

8. 求极坐标方程分别是 $\rho=\sin\theta$ 和 $\rho=\cos\theta$ 的两个圆的圆心距.

9. 在极坐标系中,求点 $P\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 的距离.

10. 求与曲线 $\rho\cos\theta+1=0$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对称的曲线的极坐标方程.

11. 在极坐标系中,已知圆 C 的圆心 $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$,半径 $r=1$,Q 点在圆 C 上运动.

(1) 求圆 C 的极坐标方程;

(2) 若 P 在直线 OQ 上运动,且 $OQ:QP=2:3$,求动点 P 的轨迹方程.

B　组

1. 从极点作圆 $\rho=2a\cos\theta$ 的弦,求各弦中点所在曲线的极坐标方程.
2. 在直线 $\rho\cos\theta=4$ 上任取一点 M,连接 OM,在 OM 上任取一点 P,使得 $OM\cdot OP=12$. 求点 P 的轨迹方程.
3. 长为 $2a$ 的线段,其端点在直角坐标系的两坐标轴上滑动,从原点作这条直线的垂线,垂足为 M. 求点 M 运动轨迹的极坐标方程(以 Ox 为极轴),再将其化为直角坐标方程.

§3　柱坐标系和球坐标系

现实生活中，人们经常需要确定空间一个点的位置. 比如，房屋装修过程中要确定大厅里吊灯的位置，人们常用吊灯到相邻的两面墙的距离及吊灯到地面的距离三个数值来描述，这就利用了必修课中学习过的空间直角坐标系. 但有些问题，例如要在圆柱形的饮料罐侧面，确定商标中各个字体的位置，在制作地球仪的过程中，确定出每个城市的位置，要解决这些问题，需要用到柱坐标系和球坐标系.

一、柱坐标系

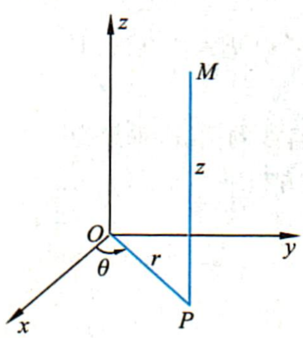


图 1-30

在平面极坐标系的基础上，通过极点 O，再增加一条与极坐标系所在平面垂直的 z 轴，这样就建立了柱坐标系(如图 1-30).

设 $M(x,y,z)$为空间一点，并设点 M 在 xOy 平面上的投影点 P 的极坐标为(r,θ)，则这样的三个数 r,θ,z 构成的有序数组(r,θ,z)就叫作点 M 的**柱坐标**，这里规定 r,θ,z 的变化范围为

$$0\leqslant r<+\infty,$$
$$0\leqslant\theta<2\pi,$$
$$-\infty<z<+\infty.$$

特别地，

$r=$常数，表示的是以 z 轴为轴的圆柱面；

$\theta=$常数，表示的是过 z 轴的半平面；

$z=$常数，表示的是与 xOy 平面平行的平面.

显然，点 M 的直角坐标与柱坐标的关系为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z.\end{cases}$$

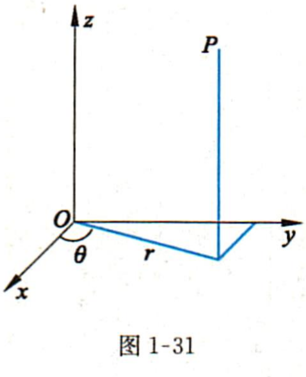


图 1-31

例 1　把点 P 的直角坐标$(2,2\sqrt{3},4)$化为柱坐标.

解　由点的直角坐标与柱坐标的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z\end{cases}$$

及题意 $x=2,y=2\sqrt{3},z=4$，可得 $\tan\theta=\sqrt{3}$，又 $0\leqslant\theta<2\pi,x>0$，所以

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ r=4,\ z=4.$$

所以点 $P(2,2\sqrt{3},4)$ 的柱坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{3},4\right)$(如图 1-31).

二、球坐标系

在实际生活或科学研究领域,有时需要描述球面上一点的位置,比如,刻画某个城市在地球上的确切方位,是用经度和纬度来完成的,这种方法涉及了另一种坐标系——球坐标系.

设 $M(x,y,z)$ 为空间一点,点 M 可用这样三个有次序的数 r,φ,θ 来确定,其中 r 为原点 O 到点 M 间的距离,φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正方向所夹的角,θ 为从 z 轴正半轴看,x 轴正半轴按逆时针方向旋转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角,这里 P 为点 M 在 xOy 平面上的投影(如图 1-32). 这样的三个数 r,φ,θ 构成的有序数组 (r,φ,θ) 叫作点 M 的**球坐标**,这里 r,φ,θ 的变化范围为

$$0\leqslant r<+\infty,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$
$$0\leqslant\theta<2\pi.$$

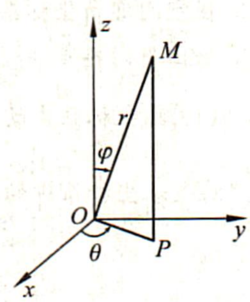


图 1-32

特别地,

$r=$常数,表示的是以原点为球心的球面;

$\varphi=$常数,表示的是以原点为顶点,z 轴为轴的圆锥面;

$\theta=$常数,表示的是过 z 轴的半平面.

点 M 的直角坐标与球坐标的关系为

$$\begin{cases}x=|OP|\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=|OP|\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

例 2 把点 P 的直角坐标 $(2,2\sqrt{3},4)$ 化为球坐标.

解 由点的直角坐标 $P(2,2\sqrt{3},4)$ 及点的直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases}x=|OP|\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=|OP|\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$$

可得 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

$$\tan\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\frac{\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}}{4}=1.$$

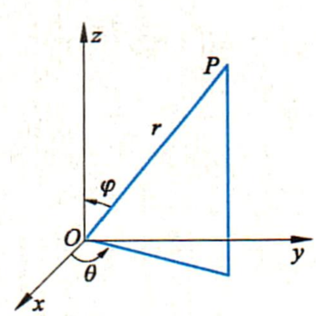


图 1-33

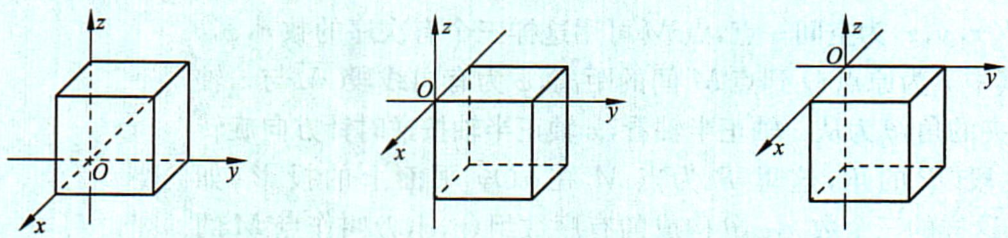
由 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

又 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$x>0$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

所以点 $P(2,2\sqrt{3},4)$ 的球坐标为 $\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$（如图 1-33）.

练　习

1. 如图，把边长为 1 个单位长度的正方体分别放到空间直角坐标系中的不同位置，试说出正方体各个顶点的柱坐标和球坐标.



（第 1 题）

2. 在空间直角坐标系中，给定点 $M(1,-2,3)$，求它的柱坐标和球坐标.
3. 画出下列各点，并把它们化成空间直角坐标：

(1) 柱坐标系中的点 $P\left(6,\frac{\pi}{3},-4\right)$；

(2) 球坐标系中的点 $M\left(8,\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

习 题 1—3

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点，再分别求出它们相应的柱坐标和球坐标：

$A(3,0,3)$；　　$B(0,2,2)$；　　$C(4,4,0)$.

2. 在柱坐标系中画出下列各点，并把它们化成空间直角坐标：

$A\left(4,\frac{3\pi}{4},2\right)$；　　$B\left(6,\frac{\pi}{3},-5\right)$.

3. 在球坐标系中画出下列各点，并把它们化成空间直角坐标：

$M\left(2,\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$；　　$N\left(8,\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

阅读材料

笛卡儿与坐标系

据说有这么一个故事：

有一天，笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)生病卧床，但他头脑一直没有休息，他在反复思考一个问题：几何图形是直观的，而代数方程则比较抽象，能不能用几何图形来表示方程呢？这里，关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组"数"挂上钩．他拼命琢磨，通过什么样的办法，才能把"点"和"数"联系起来呢？突然，他看见屋顶角上的一只蜘蛛拉着丝垂了下来，一会儿，蜘蛛又顺着丝爬上去，在上边左右拉丝．蜘蛛的"表演"使笛卡儿豁然开朗．他想，可以把蜘蛛看作一个点，它在屋子里可以上、下、左、右运动，能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置，不是都可以用这三根数轴上找到的有顺序的三个数来表示吗？反过来，任给三个有序实数，例如2，3，1，也可以用空间中的一个点P来表示它们(如图1-34)．同样，用一组数(a, b)可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用两个有序实数来表示(如图1-35)．受这样一个情景的启发，笛卡儿头脑中萌生了直角坐标系的想法，从而逐步创建了直角坐标系．

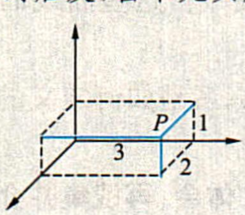


图1-34

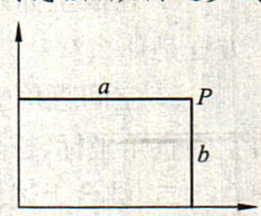


图1-35

无论这个故事的可靠性如何，有一点是可以肯定的，就是笛卡儿是个勤于思考的人．这个有趣的故事，就像瓦特看到蒸气冲起水壶盖发明了蒸汽机一样，说明笛卡儿在创建直角坐标系的过程中，很可能是受到周围一些事物的启发，触发了灵感．

笛卡儿在创建直角坐标系的基础上，创立了用代数方法来研究几何图形的数学分支——解析几何．他的设想是：只要把几何图形看成是动点运动的轨迹，就可以把几何图形看成是由具有某种共同特性的点组成的．这个想法从指导思想上改变了传统的几何方法．笛卡儿根据自己的这个想法，在几何学中，最早为运动着的点建立坐标，从而动点的坐标就成了变数，这是数学第一次引进变数．

恩格斯高度评价笛卡儿的工作，他说："数学中的转折点是笛卡儿的变数．"有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学．

另外，其他数学家，如费马等也对坐标思想作出了贡献．

◆ 本章小结建议

一、学习了坐标系这一章，请同学们根据自己的体会和理解，结合教科书的内容，思考下列问题后对本章主要内容进行概括总结.

1. 坐标系可以帮助我们解决生活中的哪类问题？

2. 本章中你学习了哪些坐标系？平面中的坐标系有几种？空间中的坐标系有几种？

3. 借助坐标系，我们可以研究什么数学问题？

4. 在平面直角坐标系中，我们建立了哪些曲线的方程？写出这些曲线的方程.

5. 改变坐标轴的长度单位，会对图形有什么影响？坐标轴的伸缩变换在实际应用中，给我们提供了什么方便？同时带来了什么困扰？

6. 极坐标系是平面内的另一种坐标系，它是用什么量来描述点的位置的？平面内点的极坐标并不唯一，但是同一点的极坐标可以统一成什么形式？增加什么条件，可使点的极坐标唯一？

7. 在什么条件下，点的极坐标可与直角坐标进行互化？互化公式是什么？

8. 在极坐标系中，我们研究了哪些曲线？这些曲线的极坐标方程是什么？

9. 空间直角坐标系、柱坐标系、球坐标系是如何定义的？点的空间直角坐标、柱坐标、球坐标间如何互化？

二、结合上述问题，总结出学习本章的体会，再搜集并介绍一些其他的坐标系.

复习题一

A　组

1. 已知正三角形的两个顶点是 $O(0,0)$ 和 $A(6,0)$，求它的外接圆的方程.
2. 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant r^2(r>0)\}$. 当 $M\cap N=N$ 时，求 r 的取值范围.
3. 以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，将下列点的直角坐标化为极坐标：

   (1) $P(-3,3)$；　　(2) $M(-\sqrt{3},-1)$；　　(3) $N(\sqrt{6},-\sqrt{2})$.
4. 将下列曲线的极坐标方程化为直角坐标方程：

   (1) $\rho=4\sin\theta$；　　(2) $\rho=\sin\theta+2\cos\theta$.
5. 已知极坐标系中的点 $P(1,\pi)$，求过点 P 且垂直于极轴的直线方程.
6. 在极坐标系中，求圆心在 $(2,0)$、半径为 2 的圆的极坐标方程.
7. 求曲线 $\rho=\sin\theta$ 和 $\rho\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ 的交点坐标.

B　组

1. 点 $M(x,y)$ 在直线 $x+2y+1=0$ 上移动，求函数 $f(x,y)=2^x+4^y$ 的最小值.
2. 直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(0,3)$，$B(3,3)$，$C(2,0)$. 若直线 $x=a$ 将 $\triangle ABC$ 分割成面积相等的两部分，求实数 a 的值.
3. 在极坐标系中，已知三点 $A\left(5,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$B\left(-8,\dfrac{11\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\dfrac{7\pi}{6}\right)$. 求证：$\triangle ABC$ 为正三角形.

第二章　参数方程

§1　参数方程的概念

问题提出

铅球运动员投掷铅球，在出手的一刹那，铅球的速度为 v_0，与地面成 α 角，如何来刻画铅球运动的轨迹呢？

分析理解

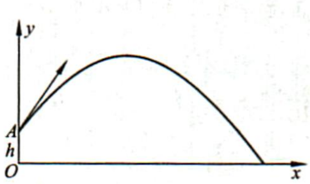


图 2-1

我们知道，在不计空气阻力时，铅球的运动轨迹是抛物线. 建立平面直角坐标系（如图 2-1），设抛物线上点 P 的坐标是 (x,y)，在初始速度以及它与地面夹角一定的情况下，x 和 y 随时间的变化而取不同的值.

设铅球从坐标轴 y 上点 A 处向上斜抛，初速度为 v_0，与 x 轴的夹角是 α，空气阻力不计，t 时后铅球所在位置为 $P(x,y)$，由物理知识可知，铅球沿 x 轴方向是以 $v_0\cos\alpha$ 为初速度的匀速直线运动，沿 y 轴方向是以 $v_0\sin\alpha$ 为初速度的竖直上抛运动.

按照匀速直线运动和竖直上抛运动的位移公式，得

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=h+v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} \qquad ①$$

这里，v_0，α，h 和 g 都是常数，其中 g 是重力加速度，h 是运动员出手时铅球的高度.

当 t 取某一个允许值时，由方程组①就可以确定铅球的位置. 这就是说，当 t 确定时，点 $P(x,y)$ 的位置也就随之确定了. 这样建立的 t 与 x，y 之间的关系不仅方便，而且清晰地反映了变数的实际意义.

方程组①中的两个方程分别反映了物体飞行的水平距离、飞行高度与飞行时间的关系. 它是物理学中弹道曲线的方程.

抽象概括

一般地，在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标(x,y)都是某个变数t的函数

$$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t),\end{cases} \quad ②$$

并且对于t取的每一个允许值，由方程组②所确定的点$P(x,y)$都在这条曲线上，那么方程组②就叫作这条曲线的**参数方程**，联系x,y之间关系的变数t叫作**参变数**，简称**参数**.

相对于参数方程，我们把直接用坐标(x,y)表示的曲线方程$f(x,y)=0$叫作曲线的**普通方程**.

注意　在参数方程中，应明确参数t的取值范围. 对于参数方程$x=f(t)$，$y=g(t)$来说，如果t的取值范围不同，它们表示的曲线可能是不相同的. 如果不明确写出其取值范围，那么参数的取值范围就理解为$x=f(t)$和$y=g(t)$这两个函数的自然定义域的交集.

参数方程不一定局限在平面直角坐标系当中，其他的坐标系也可以采用参数方程.

在运动学中，常常借助于参数方程来描述质点运动的轨迹；某些几何问题，也常常借助于参数方程来刻画曲线，以便进一步研究曲线的性质.

例　在一次军事演习中，飞机要向假想敌军阵地进行投弹，投弹时，飞机离地面的距离$h=490$ m，水平飞行的速度$v=100$ m/s. 求炸弹投出后，弹道的参数方程.（不计空气阻力，重力加速度$g=10$ m/s^2）

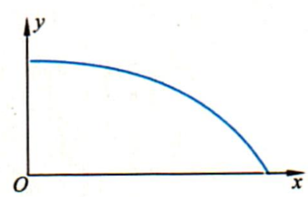


图 2-2

解　如图 2-2，从飞机投弹所在的位置向地面作垂线，垂足为O，以垂线为y轴，以O为原点，建立平面直角坐标系.

设$P(x,y)$为炸弹在t s后的坐标，则由题意可知

$$\begin{cases}x=vt,\\y=h-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

因为$h=490$ m，$v=100$ m/s，$g=10$ m/s^2，所以，炸弹投出后，弹道的参数方程是

$$\begin{cases} x=100t, \\ y=490-5t^2 \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 7\sqrt{2}).$$

思考交流

把引例中求出的铅球运动轨迹的参数方程消去参数 t 后，再将所得方程与原方程进行比较，体会参数方程的作用.

练 习

1. 一个等腰直角三角形 ABM 的腰长为 a，$\angle A$ 为直角，顶点 A，B 各在 x 轴和 y 轴上移动. 如果 A，B，M 按顺时针方向排列，求顶点 M 的轨迹的参数方程.
2. 设 $y=\dfrac{2}{\cos t}$（t 为参数），求 $9y^2-4x^2=36$ 的参数方程.

习 题 2—1

1. 一位摩托车骑手欲飞越黄河，设摩托车沿跑道飞出时前进方向与水平方向的仰角为 $\theta=12°$，摩托车冲出跑道时的速度是 19 m/s. 试建立摩托车飞行轨迹的参数方程.
2. 一个质量是 m kg 的物体，沿着倾斜角为 θ 的斜坡匀速向下运动. 试分析物体受力的情况.
3. 在一次战斗中，我军向敌军阵地发射的一发炮弹的初速度为 v_0 m/s，炮弹与地面形成的角度为 α. 试描述这发炮弹的轨迹.

§2 直线和圆锥曲线的参数方程

2.1 直线的参数方程

直线的参数方程可以有各种不同的形式，我们主要学习其中两种基本的形式.

问题提出

一条直线 l 的倾斜角是 $30°$，并且经过点 $P(2,3)$，如何描述直线 l 上任意点的位置呢？

如果已知直线 l 经过两个定点 $Q(1,1)$，$P(4,3)$，那么又如何描述直线 l 上任意点的位置呢？

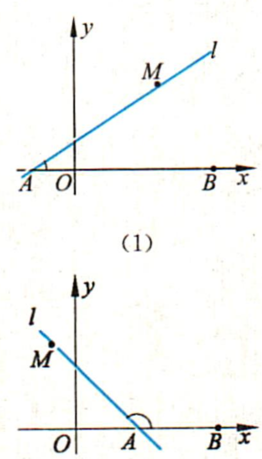


图 2-3

分析理解

如图 2-3，直线 l 的倾斜角就是 $\angle MAB(0°\leqslant\angle MAB<180°)$，我们规定 AM 的方向为直线 l 的正方向（当直线 l 与 x 轴不平行时，l 向上的方向为正方向，当直线 l 与 x 轴平行时，x 轴的正方向即是 l 的正方向）.

如果 P，M 是 l 上的两点，P 到 M 的方向与直线的正方向一致，那么 PM 取正值，否则取负值. 我们称这个数值为有方向的线段 $\overrightarrow{PM}$ **的数量**.

若直线 l 的倾斜角是 $30°$，且过点 $P(2,3)$，在 l 上任取一点 $M(x,y)$，过点 M 作 y 轴的平行线，过点 P 作 x 轴的平行线，两直线交于点 Q（如图 2-4），则在 $\mathrm{Rt}\triangle PQM$ 中，有

$$PQ=PM\cos 30°,\ QM=PM\sin 30°.$$

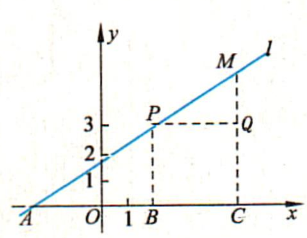


图 2-4

设 $PM=t$，因为

$$PQ=x-2,\ QM=y-3,$$

所以 $$x-2=t\cos 30°,\ y-3=t\sin 30°,$$

即 $$\begin{cases}x=2+t\cos 30°,\\ y=3+t\sin 30°\end{cases}\ (t\text{ 为参数}).$$

这就是所求直线的参数方程. 其中参数 t 的几何意义是从点 P 到 M 的位移，可以用有向线段 $\overrightarrow{PM}$ 的数量来表示.

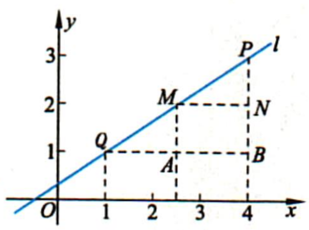


图 2-5

如果直线 l 过点 $Q(1,1)$，$P(4,3)$，如图 2-5，在 l 上任意取一点 $M(x,y)$，分别过点 Q,M,P 作坐标轴的垂线，可得交点 $A(x,1)$，$N(4,y)$.

显然，$\triangle QAM \backsim \triangle MNP$，所以有

$$\frac{QA}{MN}=\frac{AM}{NP},$$

即

$$\frac{x-1}{4-x}=\frac{y-1}{3-y}.$$

设这个比值为 λ，即

$$\frac{x-1}{4-x}=\frac{y-1}{3-y}=\lambda,$$

则有

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+4\lambda}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{1+3\lambda}{1+\lambda} \end{cases} \quad (\lambda \text{ 为参数}, \lambda \neq -1).$$

这就是经过两个定点 $Q(1,1)$，$P(4,3)$ 的直线的参数方程. 其中参数 λ 的几何意义是点 M 分有向线段 $\overrightarrow{QP}$ 的数量比 $\dfrac{QM}{MP}$.

思考交流

1. 经过两点 $Q(1,1)$，$P(4,3)$ 的直线的参数方程，如果应用共线向量的充要条件来求，方程及参数的含义分别是什么？

2. 比较直线的参数方程与普通方程，体会各自的优势.

抽象概括

经过点 $P(x_0,y_0)$、倾斜角是 α 的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases} (t \text{ 为参数}). \qquad ①$$

其中 $M(x,y)$ 为直线上的任意一点，参数 t 的几何意义是从点 P 到 M 的位移，可以用有向线段 $\overrightarrow{PM}$ 的数量来表示.

经过两个定点 $Q(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$（其中 $x_1 \neq x_2$）的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}(\lambda\text{ 为参数},\lambda\neq-1).$$

其中 $M(x,y)$ 为直线上的任意一点，参数 λ 的几何意义与参数方程①中的 t 显然不同，它所反映的是动点 M 分有向线段$\overrightarrow{QP}$ 的数量比$\dfrac{QM}{MP}$.

当 $\lambda>0$ 时，M 为内分点；

当 $\lambda<0$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，M 为外分点；

当 $\lambda=0$ 时，点 M 与 Q 重合.

例 1　已知直线 l 过点 $P(1,2)$，且它的倾斜角 $\theta=135°$.

(1) 写出直线 l 的参数方程；

(2) 求直线 l 与直线 $y=x$ 的交点坐标.

解　(1) 由于直线 l 过点 $P(1,2)$，且它的倾斜角 $\theta=135°$，所以它的参数方程可以写成

$$\begin{cases}x=1+t\cos 135°,\\ y=2+t\sin 135°\end{cases}(t\text{ 为参数}),$$

即
$$\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}(t\text{ 为参数})；$$

(2) 把$\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入 $y=x$，得

$$1-\frac{\sqrt{2}}{2}t=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\text{即 } t=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

把 $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$代入$\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$得到两直线的交点为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

例 2　已知两点 $A(3,4)$，$B(-5,3)$和直线 $l:3x+5y+4=0$. 求过点 A，B 的直线的参数方程，并求它与直线 l 的交点坐标.

解　设直线 AB 上动点 $P(x,y)$，选取参数 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}$，则直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3-5\lambda}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{4+3\lambda}{1+\lambda} \end{cases}(\lambda\text{ 为参数}). \qquad ①$$

把①代入 $3x+5y+4=0$，得

$$\lambda=-\frac{33}{4}.$$

再把 $\lambda=-\dfrac{33}{4}$ 代入①得到

$$\begin{cases} x=-\dfrac{177}{29}, \\ y=\dfrac{83}{29}, \end{cases}$$

即交点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{177}{29},\dfrac{83}{29}\right)$.

练　习

1. 求过点(3,0)、倾斜角为 20°的直线的参数方程.
2. 求直线 $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-3t \end{cases}$ (t 为参数)的斜率.
3. 求过点 $A(-2,3)$，$B(4,5)$的直线的参数方程，并求出它与直线 $2x-3y+1=0$ 的交点坐标.

2.2　圆的参数方程

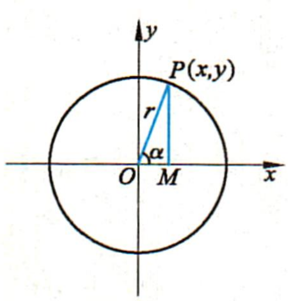


图 2-6

已知一个圆的圆心在原点、半径为 r，设点 $P(x,y)$是圆周上任意一点，连接 OP，令 OP 与 x 轴正方向的夹角为 α，则 α 唯一地确定了点 P 在圆周上的位置. 作 $PM\perp Ox$，垂足为 M，显然，$\angle POM=\alpha$(如图 2-6). 则在 Rt$\triangle POM$ 中有

$$OM=OP\cos\alpha,\ MP=OP\sin\alpha,$$

即

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha, \\ y=r\sin\alpha \end{cases}(\alpha\text{ 为参数}).$$

这就是圆心在原点、半径为 r 的圆的参数方程.

参数 α 的几何意义是 OP 与 x 轴正方向的夹角.

思考交流

给定参数方程$\begin{cases}x=a+r\cos\alpha,\\y=b+r\sin\alpha,\end{cases}$其中 a,b 是常数.

讨论下列问题：

(1) 如果 r 是常数，α 是参数，那么参数方程表示的曲线是什么？

(2) 如果 α 是常数，r 是参数，那么参数方程表示的曲线是什么？

* 现在，我们设圆 O 的圆心在原点、半径为 r，它与 x 轴负半轴的交点为 $A(-r,0)$，点 $P(x,y)$是圆周上任意不同于 A 的一点，直线 AP 的倾斜角为 α，则任给一个 α 就可以确定圆周上的一点P(如图 2-7). 同时，点 A 与角 α 也确定一条直线 $y=k(x+r)$，其中 k 为直线 AP 的斜率.

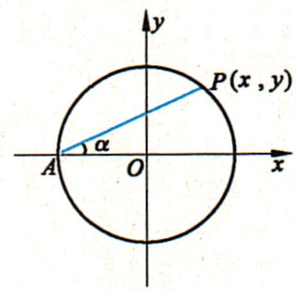


图 2-7

由$\begin{cases}y=k(x+r),\\x^2+y^2=r^2\end{cases}$可得直线 AP 与圆的交点的横坐标是

$$x_1=-r,\ x_2=\frac{(1-k^2)r}{1+k^2}.$$

分别把 $x_1=-r, x_2=\frac{(1-k^2)r}{1+k^2}$代入直线方程 $y=k(x+r)$，可得

$$y_1=0,\ y_2=\frac{2kr}{1+k^2}.$$

$(-r,0)$即点 A 的坐标，$\left(\frac{(1-k^2)r}{1+k^2},\frac{2kr}{1+k^2}\right)$即点 P 的坐标.

又因为点 P 是圆周上的任意一个不同于A 的点，所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{(1-k^2)r}{1+k^2},\\y=\dfrac{2kr}{1+k^2}\end{cases}(k\text{ 为参数})$$

是除点 A 之外，圆心在原点、半径为 r 的圆的参数方程.

参数 k 的几何意义是直线 AP 的斜率.

由此可见，参数取的不同，可以得到圆的不同形式的参数方程.

例 3　已知两条曲线的参数方程

C_1:$\begin{cases}x=5\cos\theta,\\y=5\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)和 C_2:$\begin{cases}x=4+t\cos 45^\circ,\\y=3+t\sin 45^\circ\end{cases}$($t$ 为参数).

(1) 判断这两条曲线的形状；

(2) 求这两条曲线的交点坐标.

解　(1) 由所给曲线的参数方程可知：曲线 C_1 是以原点为圆心、5 为半径的圆；曲线 C_2 是经过定点(4,3)、倾斜角为 45°的直线.

(2) 解法一：由两个已知的参数方程组成方程组

$$\begin{cases}5\cos\theta=4+t\cos 45^\circ,\\5\sin\theta=3+t\sin 45^\circ,\end{cases}$$

把两个方程左右平方，然后相加得

$$t^2+7\sqrt{2}t=0.$$

解这个一元二次方程得 $t_1=0, t_2=-7\sqrt{2}$.

把 $t_1=0, t_2=-7\sqrt{2}$ 分别代入 C_2 的参数方程可得

$$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=3\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-4.\end{cases}$$

所以曲线 C_1 与 C_2 的交点坐标为(4,3)和(−3,−4).

解法二：由两个已知的参数方程组成方程组

$$\begin{cases}5\cos\theta=4+t\cos 45^\circ,\\5\sin\theta=3+t\sin 45^\circ,\end{cases}$$

消去参数 t 得

$$5\cos\theta-5\sin\theta=1.$$

结合三角函数公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可解出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 得

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{4}{5},\\\sin\theta=\dfrac{3}{5}\end{cases}\text{和}\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{3}{5},\\\sin\theta=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

把这两组值分别代入曲线 C_1 的参数方程，便可得到两条曲线的交点坐标是(4,3)和(−3,−4).

练　习

1. 已知直线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ 与圆 $\begin{cases}x=4+2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$ 相切. 求直线的倾斜角 α.
2. 一个圆的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），一条直线的方程为 $3x-4y=0$，判断这条直线与圆的位置关系.

2.3 椭圆的参数方程

问题提出

以原点为圆心，分别以 $a, b(a>b)$ 为半径作两个圆. 点 B 是大圆

半径 OA 与小圆的交点，过点 A 作 $AN\perp Ox$，垂足为 N，过点 B 作 $BM\perp AN$，垂足为 M(如图 2-8). 当半径 OA 绕原点 O 旋转时，点 M 的轨迹是什么？

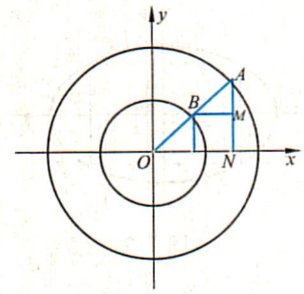


图 2-8

分析理解

点 M 的轨迹形状，可通过点 M 的轨迹方程来判断. 设点 M 的坐标为 (x, y)，半径 OA 绕原点 O 旋转，引起点 M 的运动，同时 $\angle AOx$ 也随之变化，所以设 $\angle AOx=\varphi$，取 φ 为参数，则点 M 的横坐标 x 与点 A 的横坐标相等，为 $a\cos\varphi$，点 M 的纵坐标 y 与点 B 的纵坐标相等，为 $b\sin\varphi$，即

$$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}(\varphi\text{ 为参数}).$$

这就是点 M 轨迹的参数方程.

把上式变形为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\varphi,\\ \dfrac{y}{b}=\sin\varphi,\end{cases}$$

再把两式两边平方后相加，可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这意味着，动点 M 的轨迹是椭圆.

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数)，参数的几何意义是以 a 为半径所作圆上一点和椭圆中心的连线与 x 轴正半轴的夹角.

信息技术建议

用几何画板或其他数学软件生成点 M 的轨迹，感受曲线的生成过程.

抽象概括

中心在 $C(x_0, y_0)$ 的椭圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_0+a\cos\varphi,\\ y=y_0+b\sin\varphi\end{cases}\quad(\varphi\text{ 为参数}).$$

例 4　求椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的内接矩形的最大面积.

解　因为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的参数方程为

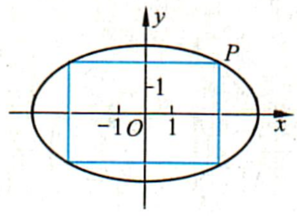


图 2-9

$$\begin{cases} x=5\cos\alpha, \\ y=3\sin\alpha, \end{cases}$$

所以椭圆内接矩形顶点 P 的坐标为$(5\cos\alpha, 3\sin\alpha)$(如图 2-9),矩形的面积为

$$S=4xy=4\times5\cos\alpha\cdot3\sin\alpha=30\sin2\alpha,$$

当 $2\alpha=90^\circ$,即 $\alpha=45^\circ$时,面积取得最大值 30.

问题与思考

面积取得最大值时,矩形是正方形吗?

* **思考交流**

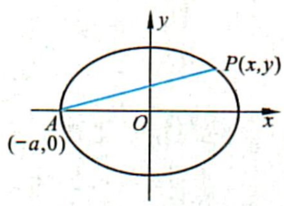


图 2-10

参照求圆的参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{(1-k^2)r}{1+k^2}, \\ y=\dfrac{2kr}{1+k^2} \end{cases}$($k$ 为参数)的方法,给出椭圆另一种形式的参数方程(如图 2-10).

练　习

1. 已知椭圆$\begin{cases} x=5\cos\theta, \\ y=4\sin\theta \end{cases}$($\theta$ 为参数,$0\leqslant\theta<2\pi$)上一点 $P\left(4,-\dfrac{12}{5}\right)$. 求其对应的参数 θ 的值,并作图指出这个角.

2. 点 P 是椭圆$\begin{cases} x=4\cos\alpha, \\ y=2\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$($\alpha$ 为参数)上一点,且在第一象限,OP(O 是平面直角坐标系的原点)的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$. 求点 P 的坐标.

2.4　双曲线的参数方程

如同椭圆的参数方程的推导,我们可以探求双曲线的参数方程.

已知双曲线的普通方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$,借助建立椭圆方程的方法,我们以原点为圆心,$b$ 为半径作一圆与 x 轴交于点 A,过点 A 作圆的切线 AT,再以 a 为半径作一圆,其半径 OB 或其延长线与 AT 交于点 Q,过点 B 作圆的切线和 x 轴交于点 M,再作 $MN\perp Ox$,过点 Q 作 x 轴的平行线交 MN 于点 P. 求当半径 OB 绕原点 O 旋转时,点 P 的轨迹的参数方程(如图 2-11).

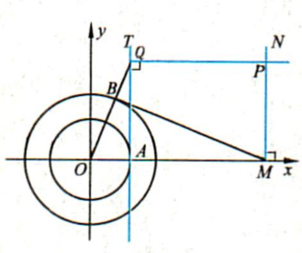


图 2-11

设点 $P(x, y)$,$\angle AOQ=\varphi$,取 φ 为参数.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOQ$ 中，有 $AQ=OA\cdot\tan\varphi$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOM$ 中，有 $OM=\dfrac{OB}{\cos\varphi}$，

所以　$MP=AQ=OA\cdot\tan\varphi,\ OM=\dfrac{OB}{\cos\varphi}$，

即
$$\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\varphi},\\ y=b\tan\varphi\end{cases}(\varphi\text{ 为参数}).$$

上述参数方程可变形为
$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\varphi}=\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{y}{b},\end{cases}$$

再将上式两边平方后相减，可得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1$，

即
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由此可见 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\varphi},\\ y=b\tan\varphi\end{cases}$ 是双曲线的参数方程，其中 φ 为参数.

例 5　求双曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi},\\ y=\tan\varphi\end{cases}$ 两条渐近线的夹角.

解　设双曲线的普通方程为
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

由双曲线的参数方程可知：
$$a=\sqrt{3},b=1.$$

故渐近线的斜率分别为 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因此渐近线与实轴的夹角为 30°.

所以两条渐近线的夹角为 60°.

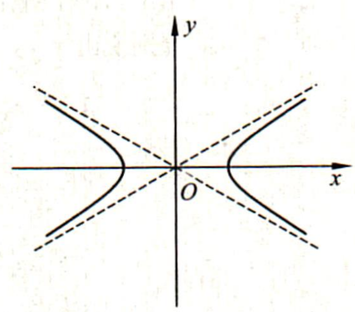


图 2-12

思考交流

1. 双曲线的参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\varphi},\\ y=b\tan\varphi\end{cases}$ 中，参数的几何意义是什么？

2. 试求双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的参数方程.

3. 试求抛物线 $y^2=2px(p>0)$的参数方程：

(1) 以抛物线上一点(x,y)与其顶点连线斜率的倒数 t 为参数；

(2) 以抛物线上任意一点(x,y)的纵坐标 y_0 为参数.

练　习

1. 求圆锥曲线$\begin{cases}x=\frac{4}{\cos\theta}+1,\\ y=3\tan\theta\end{cases}$($\theta$是参数)的焦点坐标.

2. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，设$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t$，若以 t 为参数，求出双曲线的参数方程.

习 题 2—2

A 组

1. 已知参数方程$\begin{cases}x=x_0+a\cos\varphi,\\ y=y_0+a\sin\varphi.\end{cases}$

(1) 指出当哪个量作为参数时，方程表示直线？哪个量作为参数时，方程表示圆？

(2) 分别说出 x_0,y_0,a,φ,x,y 的几何意义.

2. 求直线$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)的倾斜角.

3. 求直线$\begin{cases}x=-2-\sqrt{2}t,\\ y=3+\sqrt{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)上与点$(-2,3)$的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标.

4. 过点 $P(4,3)$的直线 l_1 的参数方程为$\begin{cases}x=4+\frac{6}{\sqrt{13}}t,\\ y=3+\frac{4}{\sqrt{13}}t,\end{cases}$它与直线 l_2：$x+y-2=0$ 的交点为 Q，求$|PQ|$.

5. (1) 写出经过点 $M(1,5)$、倾斜角是$\frac{\pi}{3}$的直线的参数方程；

(2) 利用这个参数方程，求这条直线与直线 $x-y-2\sqrt{3}=0$ 的交点到点 M 的距离；

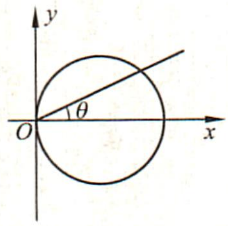
(3) 求这条直线与圆 $x^2+y^2=16$ 的两个交点到点 M 的距离的和与积.

6. (1) 一个圆的圆心为 $A(2,3)$，半径是 5，写出它以圆心角为参数的参数方程；

(2) 试用经过原点的弦长 t 为参数，写出圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程.

7. 求证：圆的内接矩形中正方形的面积最大.

8. 如图，以过原点的直线的倾斜角 θ 为参数，写出圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的参数方程.



(第 8 题)

9. O 是原点，P 是椭圆 $\begin{cases} x=3\cos\varphi, \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$ 上相当于 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 的一点，求 OP 的倾斜角.

10. 以过点 $A(0,4)$ 的直线的斜率 t 为参数，写出椭圆 $4x^2+y^2=16$ 的参数方程.

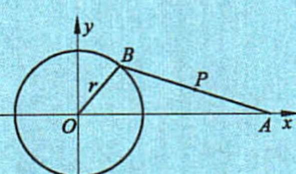
B　组

1. 动点 M 作匀速直线运动，它在 x 轴和 y 轴方向的分速度分别为 9 和 12，运动开始时，点 M 位于 $A(1,1)$，求点 M 的轨迹方程.

2. 设直线 $\begin{cases} x=2+t, \\ y=4-t \end{cases}$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于相异两点，求这两点到点 $A(2,4)$ 的距离之和.

3. 当点 $B(x',y')$ 在椭圆 $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 上运动时，求动点 $P(x'+y',x'-y')$ 的轨迹的普通方程.

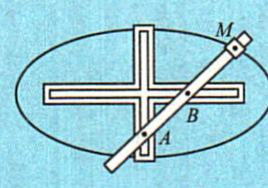
4. P 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上在第一象限内的一点，过 P 作实轴的垂线，垂足为 $M(10,0)$，又过 M 作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 Q，若 $\cos\angle MOQ=\dfrac{3}{5}$，求双曲线的方程和点 P 的坐标.



(第 5 题)

5. 如图，OB 是机器的曲柄，长是 r，绕点 O 转动，AB 是连杆，长为 l，点 A 在直线 Ox 上往返运动，点 P 是 AB 的中点. 当点 B 绕点 O 作圆周运动时，求点 P 的轨迹的参数方程.

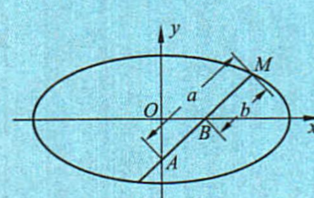
6. 人造地球卫星的运行轨道是一个椭圆，已知这个椭圆中 $a=7\ 782.5$ km，$b=7\ 721.5$ km. 建立适当的平面坐标系，求出卫星轨道的参数方程.



7. 物体从高处以初速度 v_0 m/s 沿水平方向抛出. 以抛出点为原点，过抛出点的水平直线为 x 轴，写出物体所经路线的参数方程.

8. 椭圆规是用来画椭圆的一种工具，它的构造如右图所示. 在一个十字形的金属板上有两条互相垂直的槽，在直尺上有两个固定滑块 A，B，它们可以分别在纵槽和横槽中滑动，在直尺上的点 M 用套管装上铅笔，使直尺转动一周就画出一个椭圆，试借助参数方程说明椭圆规的构造原理.

(提示：可以用直尺 AB 和横槽所成的角为参数，求出动点 M 的轨迹的参数方程)



(第 8 题)

§3　参数方程化成普通方程

参数方程和普通方程是曲线方程的两种不同形式.

普通方程用代数式直接表示点的坐标之间的关系；参数方程是借助于参数间接地反映点的坐标之间的关系.

在实际应用过程中，有时需要消去参数方程中的参数，得出普通方程.

下面介绍两种消去参数的常用方法.

一、代数法消去参数

例 1　将参数方程 $\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{t}, \\ y=1-t^2 \end{cases}$ (t 为参数，$t\neq 0$)化成普通方程.

解　由 $x=1-\dfrac{1}{t}$ ($t\neq 0$)，得

$$t=\frac{1}{1-x} \quad (x\neq 1).$$

把 $t=\dfrac{1}{1-x}$ 代入另一个方程 $y=1-t^2$，得

$$y=1-\frac{1}{(1-x)^2}.$$

这样，就得到了曲线的普通方程

$$y=1-\frac{1}{(1-x)^2} \quad (x\neq 1).$$

例 2　将参数方程 $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t^3 \end{cases}$ (t 为参数)化成普通方程.

解　由 $x=3t+1$，得

$$t=\frac{x-1}{3}.$$

把 $t=\dfrac{x-1}{3}$ 代入另一个方程 $y=t^3$，得

$$y=\left(\frac{x-1}{3}\right)^3.$$

这样，就得到了曲线的普通方程

$$y=\left(\frac{x-1}{3}\right)^3.$$

抽象概括

从上面的两个例子可以看出，这种方法是从参数方程中选出一个方程，解出参数，然后把参数的表达式代入另一个方程，消去参数，得到曲线的普通方程. 我们通常把这种方法称为**代入法**. 这是参数方程转化为普通方程的基本方法之一.

例 3 将参数方程$\begin{cases}x=-1-3t,\\ y=2+4t\end{cases}$ (t 为参数)化成普通方程.

解 将参数方程变形为

$$\begin{cases}4x=-4-12t,\\ 3y=6+12t.\end{cases}$$

将上面两个方程相加得

$$4x+3y-2=0.$$

这样，就得到了曲线的普通方程

$$4x+3y-2=0.$$

抽象概括

从上面的例子可以看出，通过代数方法，如乘、除、乘方等把参数方程中的方程适当地变形，然后把参数方程中的两个方程进行代数运算，消去参数. 这也是参数方程转化为普通方程的基本方法之一.

将参数方程化为普通方程时，要注意两个方面：

(1) 根据参数条件，明确 x, y 的取值范围；

(2) 消去参数后，普通方程要与原参数方程的取值范围保持一致.

二、利用三角恒等式消去参数

例 4 将参数方程$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ ($a,b>0$，φ 为参数)化成普通方程.

解 由题可得 x, y 的取值范围是 $|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$.

将参数方程变形为$\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\cos\varphi,\\ \dfrac{y}{b}=\sin\varphi,\end{cases}$

将方程的两边平方后相加，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi.$$

根据三角恒等式 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$，可以消去参数 φ，得到

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (|x|\leqslant a, |y|\leqslant b).$$

这是中心在原点、焦点在坐标轴上的椭圆方程.

抽象概括

从这个例子可以看出，如果参数方程中的 x, y 都表示为参数的三角函数，那么可以考虑用三角函数公式中的恒等式消去参数. 这也是参数方程转化为普通方程的基本方法之一.

练习

1. 把下列参数方程（φ, t 为参数）化成普通方程，并说明它们各表示什么曲线：

(1) $\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=\sin\varphi; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt \end{cases}(p>0)$; (3) $\begin{cases} x=x_1+at, \\ y=y_1+bt. \end{cases}$

2. 已知参数方程 $\begin{cases} x=at+\lambda\cos\theta, \\ y=bt+\lambda\sin\theta \end{cases}$ (a, b, λ 均不为 0, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$)，分别取：

(1) t 为参数； (2) λ 为参数； (3) θ 为参数.

则下列结论中成立的是（　　）.

A. (1) (2) (3) 均是直线　　B. 只有(2)是直线

C. (1)(2)是直线，(3)是圆　　D. (2)是直线，(1) (3)是圆锥曲线

习题 2—3

A 组

1. 把下列参数方程化成普通方程，并说明是什么曲线：

(1) $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-1-4t \end{cases}$ (t 为参数)； (2) $\begin{cases} x=4\cos\varphi, \\ y=3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数)；

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right), \\ y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$ (t 为参数)； (4) $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t+2}, \\ y=\dfrac{2t}{t+2} \end{cases}$ (t 为参数)；

(5) $\begin{cases} x=t^2-3t+1, \\ y=t-1 \end{cases}$ (t 为参数).

2. 求圆$\begin{cases}x=3\sin\varphi+4\cos\varphi,\\ y=4\sin\varphi-3\cos\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数)的半径.

3. 求椭圆$\begin{cases}x=4+2\cos\varphi,\\ y=1+5\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数)的焦距.

4. 求椭圆$\begin{cases}x=4\cos\theta+1,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)的左焦点坐标.

5. 求双曲线$\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}+2,\\ y=t-\dfrac{1}{t}+1\end{cases}$($t$为参数)的中心坐标.

6. 求双曲线$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\tan\theta,\\ y=-2+\dfrac{3}{\cos\theta}\end{cases}$($\theta$为参数)的两条渐近线的夹角.

7. 求抛物线$\begin{cases}x=2t,\\ y=2t^2+1\end{cases}$($t$为参数)的准线的普通方程.

8. 已知$\sin\alpha$,$\cos\alpha$是一元二次方程$2x^2+ax+b=0$的两个根,求点(a,b)的轨迹的普通方程.

B 组

1. 求动点$A(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$($\theta$为参数)的轨迹方程.

2. 求动点$M\left(3\cos\varphi-4\sin\varphi-1,\dfrac{12}{5}\cos\varphi+\dfrac{9}{5}\sin\varphi+2\right)$($\varphi$为参数)的轨迹的普通方程.

3. 求曲线$x^2-6x\cos\theta-4y+9\cos^2\theta+8\sin\theta=0$($\theta$为参数)的焦点轨迹方程.

4. 已知弹道曲线的参数方程为$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}$ g是重力加速度.

(1) 求发射角$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时,弹道曲线的普通方程和射程;

(2) 设v_0是定值,α是变量,求证:$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时射程最大.

§4 平摆线和渐开线

4.1 平 摆 线

问题提出

如果在骑自行车时，滚动的车轮恰巧从地面上粘起一张彩色的糖纸，当车轮继续前进时，这张糖纸就在空中画出一条曲线，车轮每旋转一周，糖纸就画出曲线的“一拱”(如图 2-13).

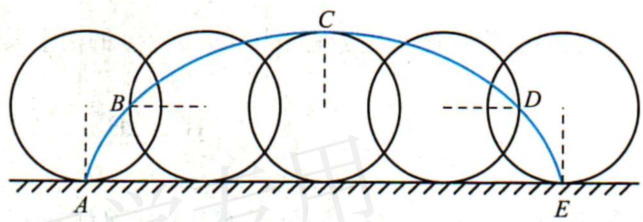


图 2-13

如何来描述糖纸的运动轨迹呢?

分析理解

信息技术建议

可以利用几何画板或其他数学软件，探讨一下糖纸的运动轨迹，感受轨迹的产生过程.

我们假设自行车沿着水平方向直线前进，车轮不断旋转. 把自行车的车轮抽象成一个圆，把粘在车轮上的糖纸抽象成一个点 M，则点 M 是圆周上的一个定点，它的初始位置为点 O. 随着圆向前运动，点 M 也在运动，我们可以建立点 M 运动轨迹的参数方程.

先建立平面直角坐标系. 取点 M 的初始位置 O 为坐标原点，过点 O 的水平直线为 x 轴，圆滚动的方向为正方向.

在平面直角坐标系中，设圆的半径为 r，圆在 x 轴上滚动，开始时点 M 在原点 O(如图 2-14).

设圆转动的角度为 α 时，圆和 x 轴的切点是 S，圆心是 N，M 的坐标为 (x,y)，取角度 α 为参数.

连接 NM，NS，过 M 作 x 轴的垂线 MP，垂足为点 P，过 M 作 NS 的垂线 MQ，垂足为 Q.

因为 $\angle MNQ=\alpha$，所以 $OS=\overset{\frown}{SM}=r\alpha$，

$x=OP=OS-PS=\overset{\frown}{SM}-MQ=r\alpha-r\sin\alpha=r(\alpha-\sin\alpha)$，

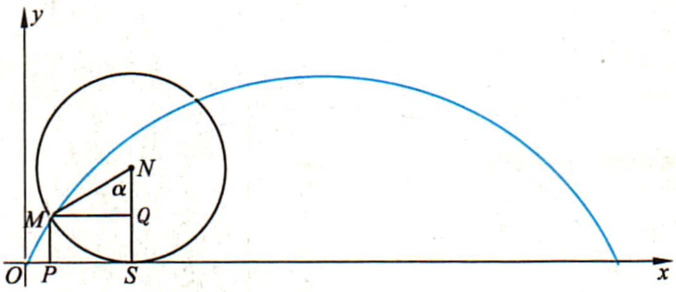


图 2-14

$y=PM=SQ=SN-QN=r-r\cos\alpha=r(1-\cos\alpha)$，

即得到轨迹的参数方程

$$\begin{cases}x=r(\alpha-\sin\alpha),\\y=r(1-\cos\alpha)\end{cases}\quad(-\infty<\alpha<\infty).$$

一个圆在平面上沿着一条直线无滑动地滚动时，我们把圆周上一定点的运动轨迹叫作**平摆线**(或**旋轮线**).

当圆滚动半周时，过定点 M 的半径转过的角度是 π，点 M 到达最高点 $(\pi r, 2r)$，再滚动半周，点 M 到达 $(2\pi r, 0)$，这时圆周和 x 轴又相切于点 M，得到平摆线的一拱. 圆滚动一周时，平摆线出现一个周期.

平摆线上点的纵坐标最大值是 $2r$，最小值是 0，即平摆线的拱高为 $2r$.

4.2　渐　开　线

问题提出

把一条没有弹性的细绳绕在一个固定圆盘的圆周上，将铅笔系在绳的外端，把绳拉紧逐渐地展开，要求绳的拉直部分和圆保持相切，此时，如何描述铅笔尖所画出的轨迹呢?

分析理解

我们把圆盘抽象成一个圆，把铅笔尖抽象成一个动点 M，它的初始位置记作 A，绳子离开圆盘的位置记作 B，随着绳子逐渐展开，动点 B 从点 A 出发在圆周上运动，动点 M 满足以下条件：

(1) MB 与圆相切于 B；

(2) MB 的长度与 B 在圆周上走过的弧长相等，即 $MB=\overset{\frown}{AB}$.

根据上述分析，我们建立动点 M 运动轨迹的参数方程.

以圆心 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系(如

> **信息技术建议**
> 可以利用几何画板或其他数学软件，感受轨迹的产生过程.

图 2-15).

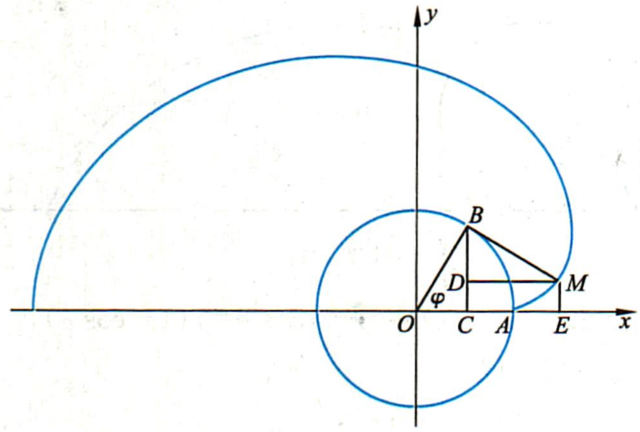


图 2-15

设圆的半径为 r，则动点 M 的初始位置 A 的坐标为 $(r,0)$，设动点 M 的坐标为 (x,y)，φ 是以 OA 为始边、OB 为终边的正角，令 φ 为参数，此时 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长为 $r\varphi$.

作 $ME\perp Ox$，$BC\perp Ox$，垂足分别为 E，C；

作 $MD\perp BC$，垂足为 D，则 $\angle MBD=\angle AOB=\varphi$，由此可得

$$\begin{aligned}x&=OE\\&=OC+CE\\&=OC+DM\\&=OB\cdot\cos\angle AOB+BM\cdot\sin\angle MBD\\&=OB\cdot\cos\varphi+BM\cdot\sin\varphi\\&=r\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=EM=CD\\&=CB-DB\\&=OB\cdot\sin\angle AOB-BM\cdot\cos\angle MBD\\&=OB\cdot\sin\varphi-BM\cdot\cos\varphi\\&=r\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi,\end{aligned}$$

因此，点 M 的坐标满足的参数方程是

$$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}(\text{其中 }\varphi\text{ 为参数}).$$

我们通常称这个方程为**圆的渐开线**方程. 这个圆叫作渐开线的**基圆**.

练　习

将圆的渐开线中的基圆换为正方形，得到的曲线就是正方形的渐开线. 试用刻度尺、圆规画出边长为 1 cm 的正方形的渐开线.

习　题　2—4

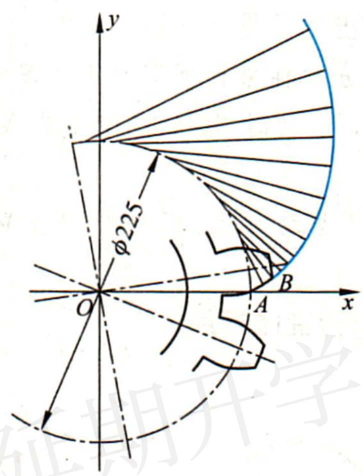
A　组

1. 设一个圆的半径为 12，将这个圆在平面内一直线上作无滑动的滚动.

(1) 求圆周上一个定点 A 运动的轨迹方程；

(2) 求点 A 相邻两次着地点间的距离.

2. 如图：有一个标准的渐开线齿轮，齿轮的齿廓线的基圆直径是225 mm. 求齿廓线 AB 所在渐开线的参数方程.



（第 2 题）

B　组

求圆的渐开线的极坐标参数方程.

阅读材料 1

其他摆线

一、短幅摆线和长幅摆线

细心的同学可能观察到这样的现象，当一个人推着自行车慢慢向前走时，旁观者就可以看到车轮钢圈内侧的彩色气门芯帽也会在空中画出一条曲线，那么，这条曲线也是摆线吗？

想像一下，如果车轮的外部有一定点，并且该点在车轮所在的平面上，随着车轮在地面上滚动，该点在空中画出的又是什么曲线呢？

事实上，可将上面的问题分别抽象为下面两个数学问题：

1. 当动圆 C 沿着定直线 l 滚动时，圆 C 内部定点 M 的运动轨迹(这样的曲线称为**短幅摆线**)(如图 2-16)；

2. 当动圆 C 沿着定直线 l 滚动时，圆 C 外部定点 M 的运动轨迹(这样的曲线称为**长幅摆线**)(如图 2-17).

短幅摆线与长幅摆线统称为**变幅摆线**.

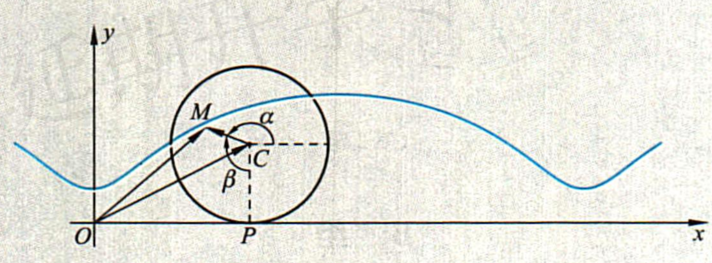


图 2-16

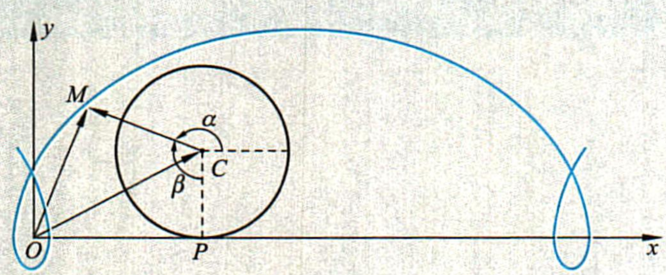


图 2-17

二、内摆线、外摆线

意大利数学家卡丹(G. Cardano，1501—1576)曾经提出如下的转盘问题：当一个圆盘沿着一个半径是它的 2 倍的圆盘内壁无滑动地滚动时，小圆盘上一点画出怎样的图形？

卡丹问题可以转化为如下数学问题:半径为 r 的动圆 C 在半径为 $2r$ 的静圆 O 内沿着圆周无滑动地滚动时,如何描述动圆 C 的圆周上一点 M 的轨迹呢?

事实上,可以证明这个轨迹是圆 O 的一条直径,它的参数方程为

$$\begin{cases}x=2r\cos\theta,\\ y=0.\end{cases} \quad ①$$

我们对卡丹问题略加改动,当一个圆盘沿着一个半径是它的 2 倍的圆盘内壁无滑动地滚动时,小圆盘内部有一点 N,并且该点在圆盘所在的平面内,随着小圆盘的滚动,点 N 的轨迹是什么图形呢?

若点 N 在小圆盘的外部,点 N 的轨迹又是什么图形呢?

事实上,设 h 为点 N 到动圆 C 的圆心的距离.我们可以得出点 N 的轨迹方程为

$$\begin{cases}x=(r+h)\cos\theta,\\ y=(r-h)\sin\theta,\end{cases} \quad \text{即} \quad \frac{x^2}{(r+h)^2}+\frac{y^2}{(r-h)^2}=1. \quad ②$$

也就是说:不论点在小圆盘的内部($h<r$),还是点在小圆盘外部($h>r$),所得到的图形都是一个椭圆.

从上面我们看到,卡丹转盘问题主要研究两个圆,其中的小圆在大圆内部无滑动地滚动,且大圆半径恰为小圆半径的 2 倍,有时把这样的一对圆叫作**卡丹圆偶**.如果我们不限制小圆半径和大圆半径之间的关系,那么,更一般的情况是什么样的呢?

1. 内摆线

设半径为 R 的定圆 O 和半径为 r 的动圆 C,其中 $r<R$,当圆 C 在圆 O 内无滑动地滚动时,圆 C 上一点 M 的轨迹叫作**内摆线**.它的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R-mR)\cos mt+mR\cos(t-mt),\\ y=(R-mR)\sin mt-mR\sin(t-mt)\end{cases}$$

$\left(t\text{ 为参数},m=\dfrac{r}{R},0<m<1\right).$ ③

如三角形线、星形线都是特殊的内摆线(如图 2-18).

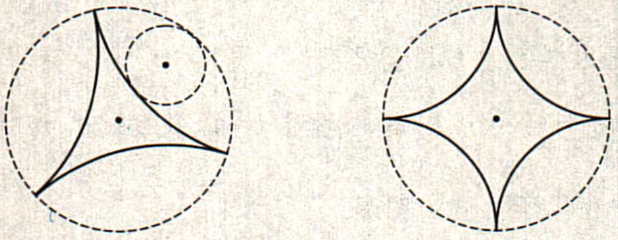


图 2-18

2. 外摆线

半径为 R 的定圆 O 和半径为 r 的动圆 C,其中 $r<R$.当圆 C 在圆 O 外无滑动地滚动时(如图 2-19),圆 C 上一点 M 的轨迹叫作**外摆线**.它的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R+mR)\cos mt+mR\cos(t+mt),\\ y=(R+mR)\sin mt+mR\cos(t+mt)\end{cases}$$

$\left(t\text{ 为参数}, m=\dfrac{r}{R}, 0<m<1\right)$. ④

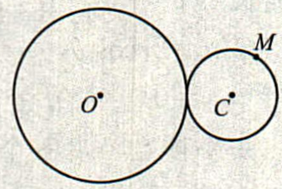


图 2-19

如心脏线、肾脏线都是特殊的外摆线(如图 2-20).

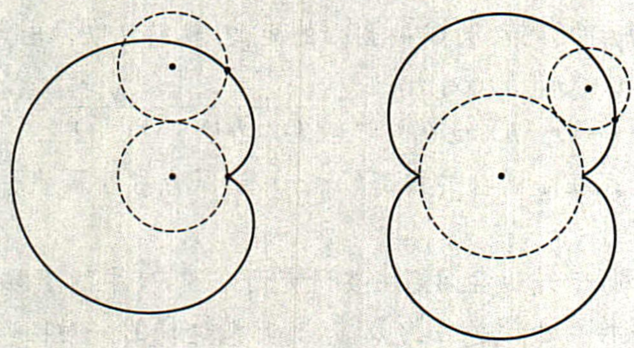


图 2-20

请思考下列问题:

1. 根据平摆线的研究方法,你能求出短幅摆线和长幅摆线的方程吗?这三个方程能统一起来吗?

2. 试建立适当的平面直角坐标系,给出参数方程①的推导过程.

3. 试建立适当的平面直角坐标系,给出参数方程②的推导过程.

4. (1) 请设计一个方案,运用计算机画出 $m=\dfrac{r}{R}$ 取不同值时$\left(\text{如 } m=\dfrac{1}{4}, m=\dfrac{1}{2}, m=\dfrac{2}{5}, m=\dfrac{2}{3}\right)$方程③所对应的图形.

(2) 你能推导出内摆线的方程③吗?

5. (1) 请你设计一个方案,运用计算机画出 $m=\dfrac{r}{R}$ 取不同值时$\left(\text{如 } m=2, m=\dfrac{3}{5}\right)$方程④所对应的图形.

(2) 你能推导出外摆线的方程④吗?

阅读材料 2

摆线的应用研究

探讨摆线的各种性质是 17 世纪数学家们的兴趣集中点之一，历史上较早对这种曲线给出定义的是法国数学家梅森(M. Mersenne，1588—1648)，他于 1615 年把当车轮沿地面作无滑动的滚动时，车轮边缘上一个定点的轨迹定义为**旋轮线**(**摆线**). 1637 年，法国数学家笛卡儿出版了《几何学》一书，把变量和直角坐标系引进数学，创建了解析几何，成为“数学中的转折点”. 之后，有许多著名的学者对摆线进行了长期的研究. 例如，法国科学家帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)于 1658 年出版了《摆线通论》，对摆线进行了充分的研究，这给莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)很大的启发，促使了微积分的建立；还有荷兰数学家惠更斯(C. Huygens，1629—1695)，瑞士数学家约翰・伯努利(Johann Bernoulli，1667—1748)，意大利科学家伽利略(G. Galilei，1564—1642)，英国数学家牛顿(I. Newton，1643—1727)等许多著名的学者都曾研究过摆线，得到了许多重要的成果. 随着科学技术的发展，摆线在生产实践中的应用越来越广泛.

当高层建筑失火时，最紧迫的也是最首要的问题是把高层居民尽快地救离失火大楼. 这时，如果有一条长软带可以让人踩在上面而滑到地面无疑是一个很好的解决办法. 但是，这条长软带成什么样的曲线时，才能使人最快地逃离火海？这就是最速降线问题.

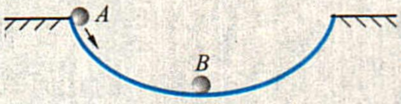


图 2-21

意大利科学家伽利略在 1630 年提出这个问题，并将此抽象为分析学的一个基本问题——“一个质点在重力作用下，从给定点 A 到不在它垂直下方的另一点 B，如果不计摩擦力，问沿着什么曲线滑下所需时间最短？”显然，直线不可能是最速降线，伽利略认为这曲线是圆弧，但这也是一个错误的答案.

瑞士数学家约翰・伯努利在 1696 年以挑战的口吻向当时全欧洲的数学家再次提出这个最速降线的问题，征求解答. 次年，有多位数学家得到了正确答案，其中包括牛顿、莱布尼茨、洛必达(L'Hospital，1661—1704)、约翰・伯努利和他的哥哥雅各布・伯努利(Jacob Bernoulli，1654—1705). 这个问题的困难之处在于和普通的已知函数求极大(小)值不同，它要求出一个未知函数(曲线)来满足所给条件. 这个问题的正确答案是连接两个点上凹的一段摆线. 约翰・伯努利的学生——大数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)也在 1726 年开始发表有关的论著，并在 1744 年最先给出了这类问题的普遍解法，从而导致了变分法这一新的数学分支的产生.

摆线在机械制造中有着广泛的应用，例如，水稻插秧机、联合收割机等不少农业机械的设计原理中都用到了摆线的知识.

◆ 本章小结建议

一、学习了参数方程一章，结合教科书内容，根据你对所学内容的理解，以下列问题为主线，复习梳理本章知识.

1. 什么是曲线的参数方程？

2. 应用参数方程表示曲线时，具有哪些优点？需要注意哪些问题？

3. 将参数方程化成普通方程的常用方法有哪些？需要注意什么问题？

4. 任何一条曲线的参数方程都能够化成普通方程吗？反之呢？

5. 普通方程与参数方程是表示曲线的不同形式. 有些曲线用普通方程表示比较简便，但是有些曲线建立参数方程比较容易，因此实际应用中，选取哪种形式的方程要根据具体曲线而定. 教科书中，我们研究了哪些曲线的参数方程？写出这些方程并指明参数的物理或几何意义.

6. 什么是平摆线和渐开线？写出它们的参数方程并指明参数的几何意义. 这两条曲线的参数方程能否化成普通方程？

二、通过查阅课外资料，了解更多的曲线及其参数方程.

复习题二

A　组

1. 求直线$\begin{cases}x=3+t\sin 20°,\\y=-t\cos 20°\end{cases}$（$t$ 为参数）的倾斜角.

2. 已知质点运动的轨迹方程为$\begin{cases}x=a+t\cos\theta,\\y=b+t\sin\theta\end{cases}$（$t$ 为参数），求运动质点从时间 t_1 到 t_2 经过的距离.

3. 求直线$\begin{cases}x=-2-\sqrt{2}t,\\y=3+\sqrt{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）上到点 $P(-2,3)$ 的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标.

4. 一条直线的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t,\\y=-5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），另一条直线的方程是$x-y-2\sqrt{3}=0$. 求这两条直线的交点到点$(1,-5)$间的距离.

5. 已知圆 $x^2+y^2-2rx=0(r>0)$，以过原点的弦长 t 为参数，求这个圆的参数方程.

6. 一个圆的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），一条直线的方程为 $3x-4y-9=0$. 判断这条直线与圆的位置关系.

7. 求直线 $y=-x+1$ 与圆$\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的交点坐标.

8. 求直线$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\y=2+\dfrac{t}{2}\end{cases}$（$t$ 为参数）被曲线 $y^2-3x^2=0$ 截得的线段长.

9. 求抛物线 $y^2=3x$ 截直线$\begin{cases}x=1+2t,\\y=3t\end{cases}$（$t$ 为参数）所得的弦长.

10. 抛物线$\begin{cases}x=t,\\y=t^2\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相交，求交点坐标以及相应的 t 和 θ 的值.

11. 将下列参数方程（t 为参数）化成普通方程，并说明表示什么曲线：

（1）$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+2t+3},\\y=\sqrt{t^2+2t+2};\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=\sin t+\cos t,\\y=\sin t\cos t;\end{cases}$　（3）$\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}-1,\\y=t-\dfrac{1}{t}+1;\end{cases}$

（4）$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\y=\dfrac{2t}{1+t^2};\end{cases}$　（5）$\begin{cases}x=\dfrac{1-t}{1+t},\\y=\dfrac{2t}{1+t};\end{cases}$　（6）$\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+t^2},\\y=\dfrac{2t}{1+t^2}.\end{cases}$

12. 两动直线 $3x+2y=6t$ 与 $3tx-2ty=6$ 相交于 P，若取 t 为参数，求 P 点轨迹方程.

13. 设有定点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，试在圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 上求一点 P，使 $|PA|^2+|PB|^2$ 的值最小，并求出此时 P 点的坐标和最小值.

B　组

1. 已知曲线的参数方程是 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cos\theta, \\ y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\sin\theta \end{cases}$ $\left(\theta\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right)$.

   (1) 若 θ 为参数，则方程表示的曲线是________，它的普通方程是________；

   (2) 若 t 为参数，则方程表示的曲线是________，它的普通方程是________.

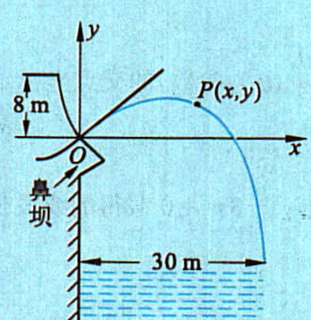
2. 若直线 $\begin{cases} x=4+at, \\ y=bt \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 $x^2+y^2-4x+1=0$ 相切，求这条直线的倾斜角.

3. 动点 P 在椭圆 $(x-1)^2+\frac{y^2}{b}=1(0<b<1)$ 上运动，求连接原点和 P 点的线段长度的最大值.

4. 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，求 $x-2y$ 的最大值.

5. 据气象局预报，在 S 岛正东 300 km 的 A 处有一个台风中心形成，并以 40 km/h 的速度向西北方向移动，在距台风中心 250 km 以内的地区将受其影响. 问从现在起，经过多长时间台风将影响 S 岛，持续时间多久？

6. 某水库为保护其坝基及下游堤坝的安全，用鼻坝挑流的方法来消除水的部分动能，如图，已知鼻坝的挑角为 30°，水库的水位至鼻坝的落差为 8 m. 若挑出水流离坝基的水平距离为 30 m，计算鼻坝下游基底距鼻坝的高.



(第 6 题)