经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-2）

矩阵与变换

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　张饴慈　檀晋轩
编写人员　（按姓氏笔画排序）
　　　　　王尚志　王松浦　张饴慈　檀晋轩

北京师范大学出版社
·北京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮购科电话　010-58808083
传　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnupg.com
北京市西城区新街口外大街 12-3 号
邮政编码：100088
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：7.5
字　　数：230 千字
版　　次：2007 年 5 月第 3 版
印　　次：2019 年 12 月第 24 次印刷
定　　价：6.70 元
ISBN　978-7-303-07064-0

责任编辑：岳昌庆　焦继红　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

目　录

引 言

矩阵是一种工具，可以用它来研究一些基本的图像(向量)变换. 在这个专题里，我们将逐渐地了解并熟悉这一工具. 为了对矩阵有一个初步的了解，我们先来看下面的例子.

例 1 某公司负责从两个矿区向三个城市送煤：

从甲矿区向城市 A, B, C 送煤的量分别是 200 万吨、240 万吨、160 万吨；

从乙矿区向城市 A, B, C 送煤的量分别是 400 万吨、360 万吨、820 万吨.

我们通过下面一个数表来表示以上的数据关系(单位：万吨)：

$$\begin{array}{c} \\ \text{甲矿区} \\ \text{乙矿区} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{城市}A & \quad\text{城市}B & \quad\text{城市}C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 240 & 160 \\ 400 & 360 & 820 \end{pmatrix} \end{array}$$

通常把这里的二行三列的数阵称为**二行三列矩阵**.

在经济学研究投入、产出、规划等问题时，这样的矩阵是十分有用的.

例 2 小王是个气象爱好者，他根据多年收集的资料，发现了当地天气有如下的规律：

晴天的次日是晴天的概率为$\frac{3}{4}$；

晴天的次日是阴天的概率为$\frac{1}{8}$；

晴天的次日是雨天的概率为$\frac{1}{8}$.

同样的，阴天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$；

雨天的次日为晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$.

我们可以用一张表，把上述数据清晰地表达出来：

$$\begin{array}{cc} & \text{次　日} \\ & \begin{array}{ccc}\text{晴} & \text{阴} & \text{雨}\end{array} \\ \text{今日}\begin{array}{c}\text{晴} \\[2ex] \text{阴} \\[2ex] \text{雨}\end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\[1ex] \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\[1ex] \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

从这个表中，可以一目了然地看出明天天气和今天天气的关系，这个三行三列的数阵称为三行三列矩阵，又叫**三阶方阵**. 这个矩阵反映了状态的转移，也叫作状态转移矩阵. 在研究随机现象中，这样的矩阵十分有用.

简单地说，一个矩阵是一个矩形的数表，由 $m\times n$ 个数据组成，排成 m 行 n 列，称为 **m 行 n 列矩阵**，通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 等表示. 特别地，n 行 n 列矩阵又叫作 **n 阶方阵**. 例如：

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0.7 \\ 2 & \sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是二行四列矩阵；

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是三行二列矩阵；

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是二行二列矩阵，即二阶方阵.

例 3　给定线性方程组

$$\begin{cases} x-2y+3z=4, \\ 2x+y-z=-2, \\ -x+4y+2z=7. \end{cases}$$

决定方程组的关键是方程中未知数的系数和常数项，而未知数既可以用 x,y,z 表示，也可以用其他字母表示. 例如，方程组

$$\begin{cases} u-2v+3w=4, \\ 2u+v-w=-2, \\ -u+4v+2w=7, \end{cases}$$

和上面的方程组相比，只有未知数的字母不同，但它们所表示的方程组完全相同.

上面的方程组可表示为

$$\begin{cases} 1\,x+(-2)\,y+3\,z=4, \\ 2\,x+1\,y+(-1)\,z=-2, \\ (-1)\,x+4\,y+2\,z=7. \end{cases}$$

抽出方程组中的未知数的系数和常数项，我们就得到下面的一个三行四列矩阵

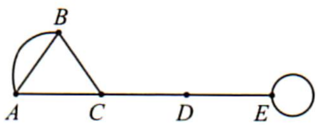
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

称它为该方程组的增广矩阵. 如果不考虑常数项，我们就得到下面的一个三阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

称它为该方程组的系数矩阵. 在研究线性方程组理论中，这两个矩阵发挥着重要的作用.

例 4 考察下图，这是由五个点 A,B,C,D,E 和连接它们的一些线组成的一个图.



连线反映了点与点之间的关系，如点 A 和点 B 之间有 2 条线连接，点 C 和点 D 之间有一条线连接，点 E 有一条自己到自己的线，而点 B 和点 D 之间没有线连接，等等. 为了清晰，我们可用自然数 n 反映两点之间线的条数，若两点无线连接，记为 0，有一条线连接，记为 1，等等. 这样我们可以用以下矩阵清晰反映图中的各种关系：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

这是一个五行五列的矩阵，称为上图的相邻矩阵，它在图论的研究中很有用. 事实上，给定一个图的相邻矩阵，就可以画出相关的图.

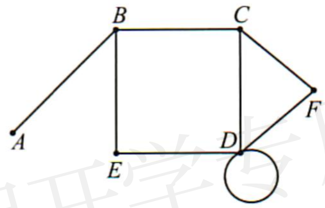
矩阵的应用非常广泛. 介绍矩阵的知识，大多是从代数的角度，作为一种新的运算对象加以讨论. 本专题的目的不是系统地介绍矩阵的知识，我们希望更多地说明矩阵的几何背景，把矩阵作为表示几何变换的工具，通过几何背景，理解矩阵的性质和作用. 我们的讨论仅限于二阶的情况. 对这部分内容有兴趣的同学，可以参阅大学使用的《线性代数》或《高等代数》教科书.

说 明

图论是数学的一个重要研究分支，矩阵是研究图论的重要工具之一.

习　题

1. 生产零件时，需要先将材料做成零件的毛坯，然后再精加工. 现生产三种零件，一块原料有四种下样方式：
   第一种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 1 个、3 个、4 个；
   第二种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 4 个、1 个、1 个；
   第三种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 0 个、6 个、2 个；
   第四种下样方式能得到零件 A,B,C 的毛坯数分别为 5 个、0 个、0 个.
   试把上述不同下样方式能得到的毛坯数用一个矩阵表示.
2. 营养配餐中心为学生准备了各种菜肴，每份中能量、脂肪、蛋白质的含量各不相同. 已知：
   “肉末粉条”中所含的上述三种营养成分分别为 649 千卡[1]、30 g，10 g；
   “炸酱排”中所含的上述三种营养成分分别为 258 千卡、20 g，19 g；
   “韭菜豆芽”中所含的上述三种营养成分分别为 131 千卡、15 g，3 g.
   试把上述结果用矩阵表示.
   [1] 1 千卡＝4 187 J.
3. 写出下图的相邻矩阵.



（第 3 题）

4. 现已知一个图中含有 A,B,C,D 四个点，请根据如下相邻矩阵画出该图：

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 写出表示下列方程组的增广矩阵及系数矩阵.

   (1) $\begin{cases} x+\ y+z=1, \\ 2x-\ y+z=0, \\ -x+3y-z=7; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-\ y=-1, \\ 5x+2y=3. \end{cases}$

6. 下列矩阵为某些线性方程组的增广矩阵，请写出下列矩阵所表示的方程组.

   (1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. 五个人 A,B,C,D,E，现知道 A 和 B,C 都相识，但 C 只和 A,D,E 相识，B 还和 D 相识. 试用一个只含数 0 和 1 的矩阵表示他们之间的相识关系. 其中，用 0 表示两个人之间不相识，用 1 表示两个人之间相识.
8. 从现实生活中找出一个用矩阵表示的问题.

第一章 平面向量与二阶方阵

§1 平面向量及向量的运算

1.1 向量的引入

在现实世界中，我们遇到的量大致有两类.

一类只有大小，没有方向，如长度、面积、质量等，称为**数量**.

另一类既有大小，又有方向，如位移、速度、力等. 例如，民航每天都有从北京飞往上海、广州、西安等地的航班，每次飞行都是民航客机的一次位移，由于飞行的距离和方向各不相同，因此它们是不同的位移(如图 1-1).

我们把既有大小，又有方向的量称为**向量**.

问题与思考

在你所学过的量中，哪些是数量？哪些是向量？

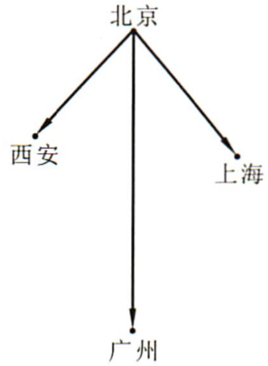


图 1-1 北京部分航班线路示意图

1.2 向量的几何表示——有向线段

数学中，怎样表示向量呢？

我们知道，在物理学中，表示位移最简单的方法，是用一条带箭头的线段，箭头方向表示位移的方向，线段长度表示位移的大小.

一般地，给定线段 AB，若我们把端点 A 作为起点，端点 B 作为终点，则线段 AB 就具有了从起点 A 到终点 B 的方向，这样的线段既有大小，又有方向，称之为**有向线段**(如图 1-2)，记作$\overrightarrow{AB}$.

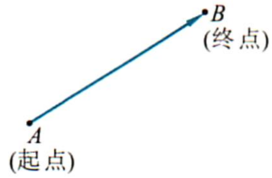


图 1-2

有向线段是向量的几何表示，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小. 书中我们常用黑体小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，…或黑体小写英文字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，…表示向量；手写时常用$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，…表示. 当用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，记作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$.

应该注意，数学中的向量与物理中的矢量是有区别的. 在数学中，只考虑向量的大小和方向，而与起点位置无关. 通常又称为**自由向量**.

如果两个向量通过平移能够重合，我们称这两个向量是**相等向量**. 如果表示两个向量的有向线段所在直线平行或重合，则称这两个向量**共线**，也称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线(即平行)，记作 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

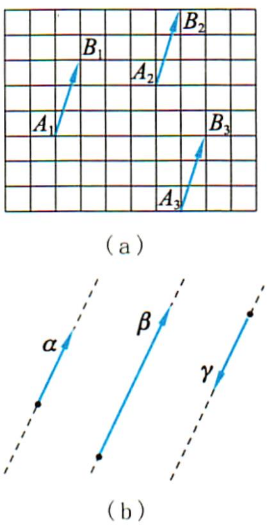


图 1-3

如图 1-3，容易看出

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3},\ \boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\gamma}.$$

特别地，长度为零的向量，叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 规定**零向量与任意向量共线**.

1.3 向量的和

如果飞机从北京飞往上海，再从上海飞往广州，那么，飞机从北京直接飞往广州的位移，与前面连续两次位移的结果相同. 称后面一次位移为前面两次位移的合位移.

给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\beta}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，如图 1-4(a)，即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

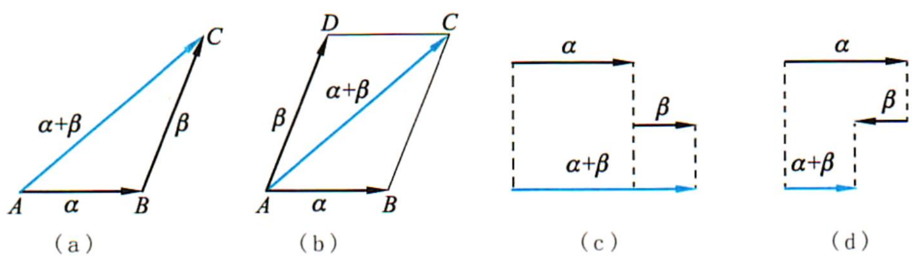


图 1-4

我们还可以通过另一种方法确定两个向量的和. 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 不是共线向量，则由 AB，AD 为一组邻边可以构造一个平行四边形 $ABCD$，向量 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，如图 1-4(b).

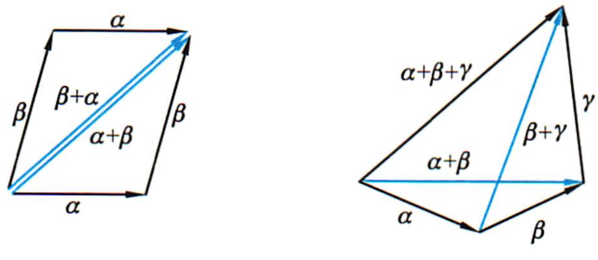
说　明

两个向量求和的三角形法则可以推广至有限个向量求和.

以上两种求两个向量和的方法，分别叫作向量求和的“三角形法则”和“平行四边形法则”. 图 1-4(c)和(d)表示了两个共线向量求和的情形.

思考交流

结合图 1-5 思考向量加法满足什么运算律.



(a)　　　　(b)

图 1-5

向量的加法满足交换律与结合律，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha};$$

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}).$$

这与我们熟悉的数的加法法则一致.

1.4 数乘向量

对于给定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，我们用 $2\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，而长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度 2 倍的向量；用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度一半的向量；用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 表示与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，长度相同的向量，如图 1-6.

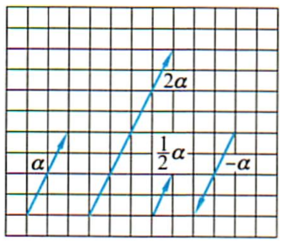


图 1-6

由此，我们可以得到数乘的定义：

一般地，实数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{\alpha}$（我们简称为**数乘**）仍表示一个向量，它的长度是 $\boldsymbol{\alpha}$ 长度的 $|\lambda|$ 倍；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向相反，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

根据此定义，我们可以得到如下结果：

若向量 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行，即 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 反之，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 共线，即满足 $\boldsymbol{\beta}/\!/\boldsymbol{\alpha}$，则存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.

说　明

关于数乘运算满足以下规则（λ，μ 为实数）：

$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$；

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$.

1.5 两个向量的差

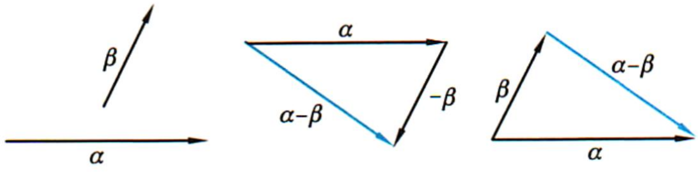
给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,我们定义 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与$(-\boldsymbol{\beta})$的和,即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

根据向量和的定义,结合图 1-7 不难看出:向量 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}.$$

我们称 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 减去 $\boldsymbol{\beta}$ 的差.



(a) (b)

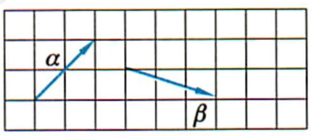
图 1-7

特别地, $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

即 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

练 习

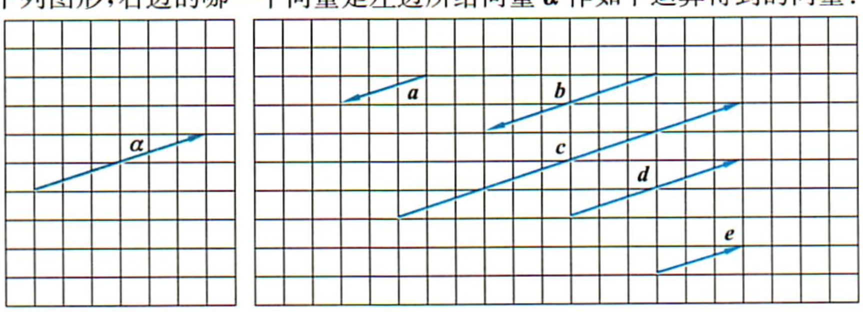
给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,如图,分别作出向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,$2\boldsymbol{\alpha}$,$-\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.



习 题 1—1

A 组

1. 仔细观察下列图形,右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 作如下运算得到的向量:

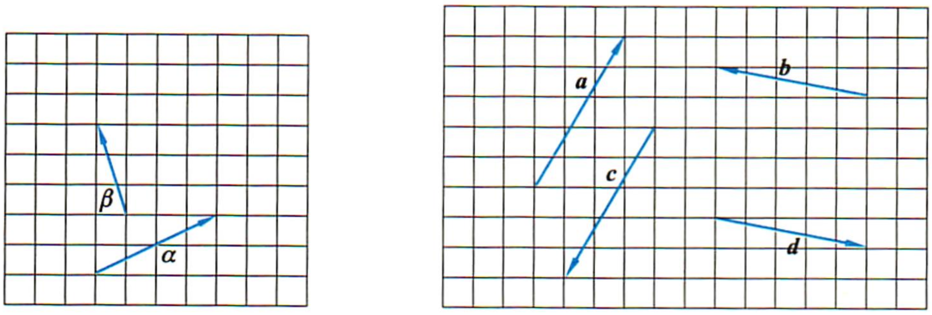


(第 1 题)

(1)$-\boldsymbol{\alpha}$；　　(2)$2\boldsymbol{\alpha}$；　　(3)$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$.

2. 仔细观察下列图形，右边的哪一个向量是左边所给向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 作如下运算得到的向量：

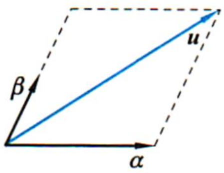
(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；　　(2)$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$.



（第 2 题）

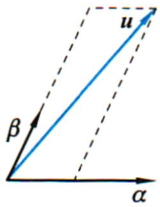
3. 仿照下列(1)(2)(3)的求解方法，给出(4)(5)的解.

(1)



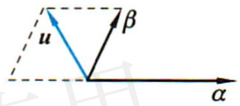
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$；

(2)



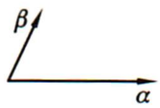
$\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}+\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}$；

(3)



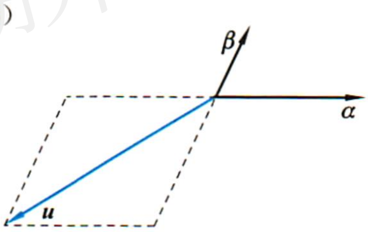
$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；

(4)



$\boldsymbol{u}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$；

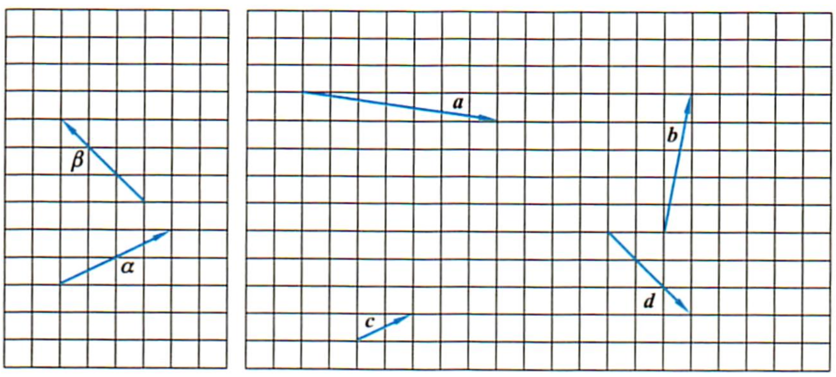
(5)



$\boldsymbol{u}=$____$\boldsymbol{\alpha}+$____$\boldsymbol{\beta}$.

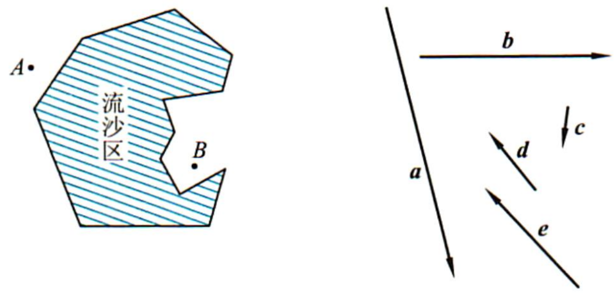
（第 3 题）

4. 如图所示，左图中给定两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，通过观察和测量，确定适当的实数 s，t，使得右边的向量恰好可以表示成 $s\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$ 的形式.



（第 4 题）

5. 机器人“小贝”靠接受命令移动，命令是按给定的向量进行位移，例如“小贝”接到按 $\boldsymbol{\alpha}$ 向量位移命令，它将以所在位置为起点，从起点到达终点的向量与给定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 相同. 现在，“小贝”必须绕过流沙区从 A 地到 B 地，如下图所示. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ 等 5 个向量是给“小贝”的五个命令，请你排出正确顺序使“小贝”完成任务.



（第 5 题）

B　组

1. 设 $\boldsymbol{u}$ 为平面中任一向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是 A 组第 4 题中给定的两个向量. 如何确定实数 s, t，使 $\boldsymbol{u}=s\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$ 成立，试举例说明.
2. 对任意给定的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，上题中的结论一定成立吗？

§2　向量的坐标表示及直线的向量方程

2.1　平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{\alpha}$ 为平面上的任意一个向量. 我们以坐标原点 O 为起点，作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha}$，并作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M. 如图 1-8 所示. 根据向量加法的“三角形法则”不难得出

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}.$$

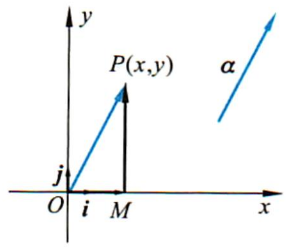


图 1-8

我们分别取与 x 轴，y 轴方向相同，且长度为单位 1 的向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$. $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 是两个特殊的向量，我们把它们称作一组基本向量，又称为**基**或**基向量**. 显然有

$$\overrightarrow{OM}/\!/\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{MP}/\!/\boldsymbol{j},$$

此时必有且只有一对实数 x，y，使得

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{MP}=y\boldsymbol{j},$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.\tag{1.1}$$

我们把实数对 (x,y) 叫作向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标，记作

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\tag{1.2}$$

上述(1.2)式即为向量的坐标表示. 显然，(x,y) 也是点 P 的坐标. 这样，有序实数对把向量与点紧密地联系在一起.

由此可见，全体有序实数对与坐标平面内的所有向量之间可以建立一一对应关系. 在平面直角坐标系中，点或向量都可以看作有序实数对的直观形象，而有序实数对可以看作点或向量的代数表示.

在我们后面的研究内容中，点 $P(x,y)$ 和向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，虽然具有不同的意义，但有时候，在不引起混淆的情形下，对它们不加区别.

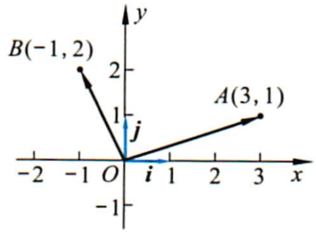


图 1-9

如图 1-9 中，点 $A(3,1)$ 与向量 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 对应，点 $B(-1,2)$ 与向量 $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 对应. 特别地，原点 $O(0,0)$ 与零向量 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 对应. 而 $(1,0)$，$(0,1)$ 分别与向量 $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 对应.

根据(1.1)式，任意向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，总可以用基向量 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 表示为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

2.2　平面向量运算的坐标表示

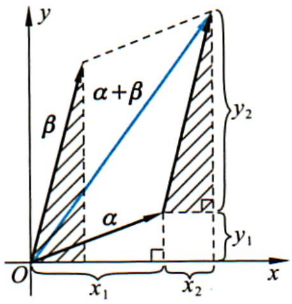


图 1-10

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，由图 1-10，不难发现

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}.$$

同理

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}.$$

这就是说，向量的和与差的相应坐标分别等于各向量的相应坐标的和与差.

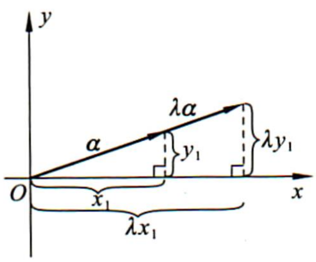


图 1-11

对实数 λ，由图 1-11，可发现 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}$.

这就是说，实数与向量乘积的相应坐标等于该实数与向量的相应坐标的乘积.

例　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，分别计算并在坐标系中画出下列向量，再用向量运算的几何意义进行验证：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；　　(2) $-\boldsymbol{\alpha}$；　　(3) $2\boldsymbol{\beta}$.

解　(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3+(-1)\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$；　　(2) $-\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$；

(3) $2\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\times(-1)\\2\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

如图 1-12.

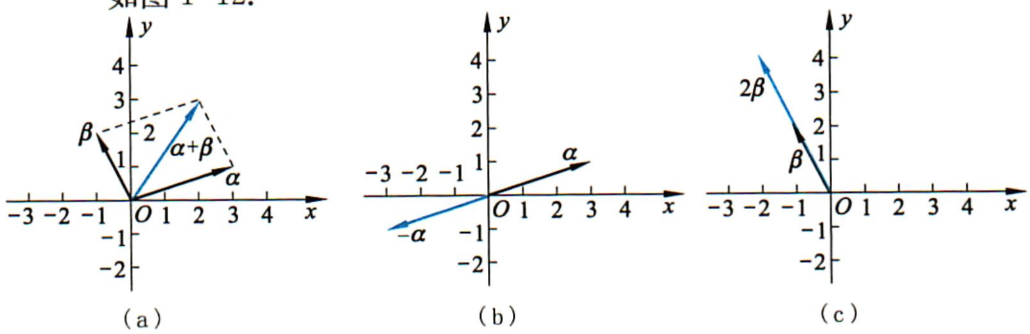


图 1-12

2.3　直线的向量方程

在几何学习中，我们已经知道，一个点和一个方向可以确定一条直线. 现在我们可以用向量来表示方向，那么，如何利用向量来表示射线呢？

实例分析

如图 1-13，直线 l 经过点 $A(1,4)$，且平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$（称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为直线 l 的**方向向量**）.

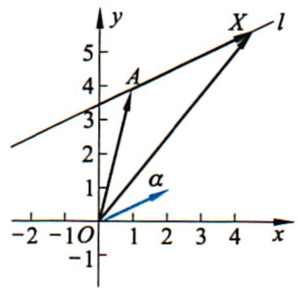


图 1-13

设直线 l 上任意一点 $X(x,y)$，则显然有

$$\overrightarrow{AX}\parallel\boldsymbol{\alpha},$$

因此，总存在一个实数 t，使得

$$\overrightarrow{AX}=t\,\boldsymbol{\alpha}.$$

又有

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA},$$

则
$$\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=t\,\boldsymbol{\alpha},$$

即
$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\,\boldsymbol{\alpha}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

上式中，t 称为参数. 显然，随着参数 t 的变化，点 X 的位置在直线 l 上运动. 因此，上式可以用来描述直线 l 上动点 X 的轨迹，称为**直线 l 的向量方程.** 也可以表示为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

说　明

此式还可以写成直线 l 的参数方程：

$$\begin{cases}x=1+2t,\\y=4+t,\end{cases}(t\in\mathbf{R}).$$

一般地，在平面直角坐标系中，经过点 $M_0(x_0,y_0)$，且平行于非零向量 $\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ 的直线 l 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OM_0}+t\,\boldsymbol{v}_0\quad(t\in\mathbf{R}).\qquad(1.4)$$

即
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbf{R}).$$

习　题　1—2

A　组

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$和向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$,计算并在坐标系中画出下列向量:

   (1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$;　　(2)$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$;　　(3)$2\boldsymbol{\alpha}$;　　(4)$\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$;　　(5)$2\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$.

2. 画图验证下列事实,并计算核实:

   (1)$\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;　　(2)$\begin{bmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=(-3)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;

   (3)$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$;　　(4)$\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

3. 证明对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$,总有 $\boldsymbol{\alpha}=p\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,并试着通过画图来说明这一等式的几何意义.

4. 写出满足下列条件的直线的向量方程:

   (1)过点 $A(1,-2)$,平行于向量 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$;

   (2)过原点 $O(0,0)$,平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$;

   (3)经过 $A(1,-2)$,$B(1,3)$两点.

5. 观察图 1-12 中直线 l 上的动点 X,对方程$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$　$(t\in\mathbf{R})$,当 $t=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\cdots$ 时,分别计算动点 X 的坐标(x,y),并在图中观察动点 X 的运动变化,思考方程中的参数 t 的几何意义.

6. 给定三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$,问:是否存在实数 s,t,使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立?若存在,求出这两个数,数对(s,t)是唯一的吗?画图观察,说明这种表示的几何意义.对任意向量$\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$,是否一定存在实数 s,t 使得$\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立?

B　组

给定向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意向量,是否存在实数 s,t,使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$ 成立.

§3　二阶方阵与平面向量的乘法

平面解析几何中经常需要研究点的运动. 如图 1-14,平面图形作了一次关于 x 轴的反射变换,点 A 变成了点 A'.

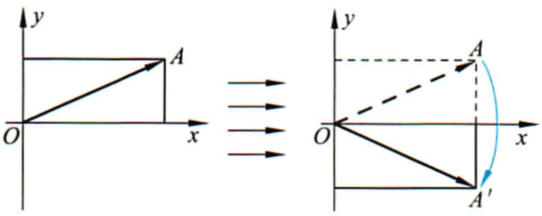


图 1-14

由于平面上的点与向量是一一对应的,因此,平面上点的运动也与向量的运动是一一对应的. 点 A 变成点 A',向量$\overrightarrow{OA}$变成向量$\overrightarrow{OA'}$. 那么,我们能不能借助向量来刻画这些点的运动呢? 要解决这一问题,矩阵是一个很好的工具.

我们定义二阶方阵与向量的乘法运算:

> 二阶方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$(左)乘向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 的法则是
>
> $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$(左)乘向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 的作用是:

把向量 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 变成了另一个向量 $\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}$.

例 1　计算下列矩阵与向量的乘法:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times3+0\times2 \\ 0\times3+(-1)\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\times3+0\times2\\0\times3+(-1)\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+(-2)\times2\\-2\times3+1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$.

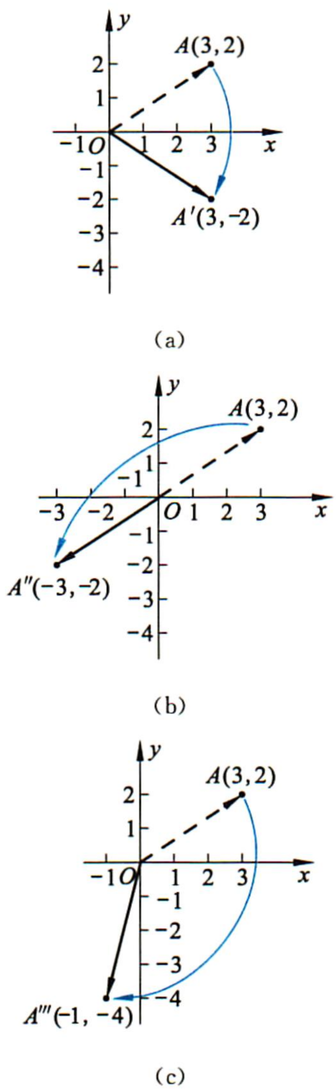


图 1-15

在例 1(1)中,矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是:向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的横坐标没变,纵坐标变为相反数,即把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$变成了向量$\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$;也就是把平面上点 $A(3,2)$变成了它关于 x 轴的对称点 $A'(3,-2)$,如图 1-15(a)所示.这是它的几何意义.

在例 1(2)中,矩阵$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是:把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的两个坐标都变成相反数,即把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$逆时针旋转了 180° 变成了向量$\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$;也就是把平面上点 $A(3,2)$变成了它关于原点的对称点 $A''(-3,-2)$.如图 1-15(b)所示.

同样的,在例 1(3)中,矩阵$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$乘向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$的作用是:把向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$变成向量$\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$;也就是把点 $A(3,2)$变成了点 $A'''(-1,-4)$.如图 1-15(c)所示.

信息技术建议

这里,利用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵乘向量的几何意义.具体方法可以参看本节后面的"信息技术应用".

由定义(1.5)式可以看出,矩阵乘向量的结果仍是一个向量.从几何上说,矩阵乘向量的作用是把一个向量变成另一个向量;把平面上的一个点变成了另一个点.

实践活动

给定向量$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$,利用矩阵与向量的乘法,计算得出下列矩阵把该向量变成什么向量,画图并说明几何意义.

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

根据矩阵与向量的乘法,

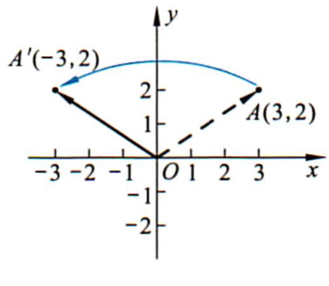
$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times3+0\times2\\ 0\times3+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+1\times2\\ 1\times3+0\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+0\times2\\ 0\times3+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix},$$

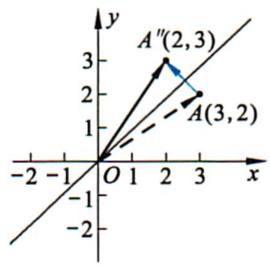
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+0\times2\\ 0\times3+0\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

在矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用下，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$横坐标变成相反数，纵坐标不变，变成了向量$\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$，此时，点 $A(3,2)$ 变成了关于 y 轴的对称点 $A'(-3,2)$. 如图 1-16(a)所示.



(a)

在矩阵$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$的作用下，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$的横坐标、纵坐标交换了位置，向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$变成了向量$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$，此时点 $A(3,2)$变成了关于第一、三象限角平分线的对称点 $A''(2,3)$. 如图 1-16(b)所示.



(b)

图 1-16

矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$很特殊，它使得向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$没变，也可以说，把向量$\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$变成了它自己.

从代数运算上看，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$的作用很类似数“1”在乘法中的作用，我们称它为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，有

$$\boldsymbol{I\alpha}=\boldsymbol{\alpha}.$$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$也是一个特殊的矩阵，称为**零矩阵**，记为 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，在它的作用下，任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$都变成了零向量$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即

$$\mathbf{0}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

单位矩阵把平面上的任意一点都变成了它自己. 零矩阵把平面上的所有点都变成了原点.

下面我们用矩阵与向量相乘的形式，分析一下线性方程组一种新

的表示形式.

对于二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1,\\-x+4y=3.\end{cases}\tag{1.6}$$

该方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix},$$

把未知数对(x,y)写成未知向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$的形式，根据矩阵与向量乘法的定义，有

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-2y\\-x+4y\end{bmatrix}.$$

这样，方程组(1.6)可以由它的系数矩阵与未知向量乘法的形式表示为

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.\tag{1.7}$$

从几何上看，(1.7)式表示，在矩阵$\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 4\end{bmatrix}$的作用下，把未知向量$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$变成了已知向量$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. 这是线性方程组的一种重要的表示形式，我们将在§4.4中运用这一观点讨论方程组求解问题.

例 2　试把下列方程组用矩阵与向量的乘法的形式表示出来.

(1)$\begin{cases}2x-y=-1,\\3x+4y=5;\end{cases}$　(2)$\begin{cases}u-v=3,\\3u+v=1;\end{cases}$　(3)$\begin{cases}ax+by=e,\\cx+dy=f.\end{cases}$

解　(1)$\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$;

(2)$\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$;

(3)$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$.

信息技术应用

利用几何画板研究理解矩阵乘向量的几何意义

步骤：

1. 新建画板，并在图表菜单中用定义坐标系建立直角坐标系.

2. 选中坐标轴，用构造菜单中对象上的点，任意构造坐标轴上四个点，并分别标记为 a,b,c,d.

3. 用度量菜单分别测算出 a,b,c,d 四个点的横坐标，并分别标记为 a,b,c,d（如图 1-17 所示），这样就得到一个矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

4. 用点工具在平面上任画一点，并标记为 P，测算出点 P 的坐标. 并把点 P 的横坐标、纵坐标分别标记为 x,y. 这样就得到向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

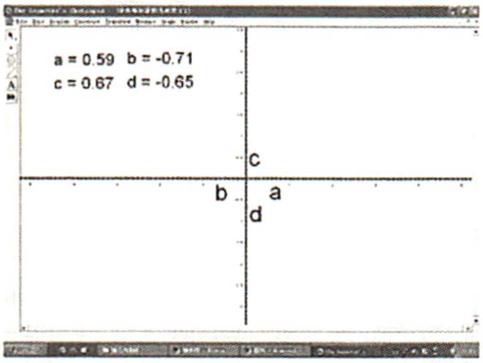


图 1-17

5. 根据矩阵乘向量法则，用度量工具中的计算功能，计算出 $ax+by$ 和 $cx+dy$，并分别标记为 x',y'.

6. 分别顺次选中 x',y'，用图表菜单中绘制点(x',y')，并标记为 P'. 点 P' 就是在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下点 P 的像点.

7. 分别构造线段 OP,OP'（如图 1-18 所示）.

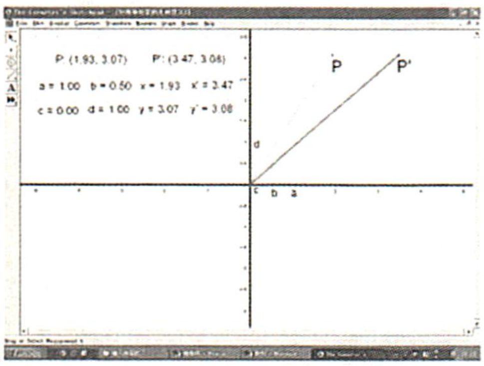


图 1-18

经过以上步骤后，任意拖动 a,b,c,d 四个点，就可以得到所需要的矩阵. 任意拖动点 P，就可以观察像点 P' 与原像点 P（或向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OP'}$）的位置关系.

习 题 1—3

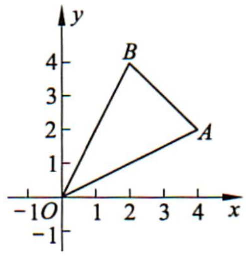
A 组

1. 把下列方程组用矩阵与向量的乘法形式表示：

(1) $\begin{cases} -x+4y=1, \\ 3x+5y=-1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 5x+8y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x=7, \\ x-y=1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-3y=0. \end{cases}$

2. 如图，$\triangle ABO$ 中顶点坐标分别是 $A(4,2)$，$B(2,4)$，$O(0,0)$. 计算并画图感受矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 把这三个顶点变到了何处. 从直观上，你觉得这个矩阵把整个三角形变到了何处？试着再找出图上几个点验证一下你的猜想.

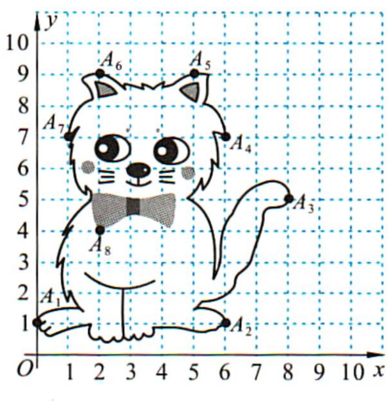


（第 2 题）

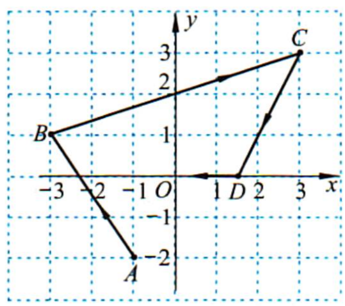
3. 给定向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$，利用矩阵与向量的乘法，计算下列矩阵把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别变成了什么向量，并画图表示这一变化过程.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 矩阵 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 把下图中的点 $A_1, A_2, \cdots, A_8$ 变到了何处？直观上你觉得整个图形(小猫)变到了何处？试再找图上几个点验证一下你的猜想.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 现在我们用矩阵命令来指挥机器人“小贝”的移动. 假设“小贝”现在处于点 P 位置，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，点 P 变成像点 P'，当接到矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的命令后，“小贝”将从所在位置 P 点移动到 P'点. 请排出下列四个矩阵命令的正确顺序，使“小贝”沿图中点 $A \to B \to C \to D \to O$ 顺次移动完成巡视的任务.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. 甲、乙两名同学期中和期末考试成绩可用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 期中 & 期末 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 87 & 90 \\ 96 & 88 \end{pmatrix}\end{array}$$

在学期末记录总评成绩时，是按期中成绩占 $\dfrac{1}{3}$，期末成绩占 $\dfrac{2}{3}$ 计算，记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$，试用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘法表示甲、乙两人的总评成绩并计算结果(说明：在成绩单中只出现整数，小数部分按照四舍五入原则近似取值).

B　组

1. 考虑只有晴天和阴天(阴天包含下雨在内)的转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} 明日\backslash今日 \\ 晴 \\ 阴 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 晴 & 阴 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}\end{array},$$

已知今天是晴天和阴天的概率分别是 $\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{7}{8}$，记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{7}{8} \end{pmatrix}$，你能否用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 来表示明日天气晴、阴的概率？

2. 注意观察你周围的生活实际情境，有没有可以用矩阵及矩阵与向量乘法表示的事.

复 习 题 一

A　组

1. 如图，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在以正六边形的顶点及中心为起点和终点的所有向量中.

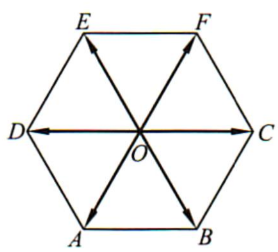
(1)分别写出与图中向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$相等的向量；

(2)分别写出与图中向量$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$共线的向量.

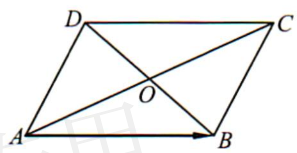
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 分别表示下列位移：

向北 10 km；向南 5 km；向西 10 km；向东 5 km.

试说明：向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{d}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$ 的几何意义.



(第 1 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知 O 为▱$ABCD$ 对角线的交点，在以平行四边形的顶点及对角线交点为起点和终点的向量中，

(1)哪两个向量的和是向量$\overrightarrow{AB}$？

(2)哪两个向量的差是向量$\overrightarrow{AB}$？

4. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$2\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}$.

5. 已知点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，$C(-1,-2)$，求▱$ABCD$ 的顶点 D 的坐标.

6. 飞机从 A 地向西北飞行 200 km 到达 B 地，又从 B 地向东飞行 $100\sqrt{2}$ km 到达 C 地，再从 C 地向南偏东 60°飞行 $50\sqrt{2}$ km 到达 D 地，求飞机从 D 地飞回 A 地的位移.

7. 写出满足下列条件的直线的向量方程：

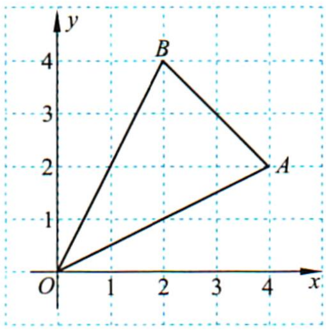
(1)过点 $M(3,-1)$，平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$；

(2)经过 $A(2,0)$，$B(0,-1)$两点.

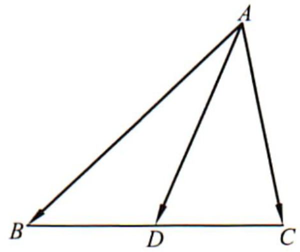
8. 如图，矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$把图中三角形的顶点 A，B，O 变到了何处？直观上你觉得△ABO 变到了何处？试再找图中几个点验证一下.

9. 如图，D 是△ABC 中 BC 边的中点，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\beta}$，试用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 表示$\overrightarrow{AD}$.

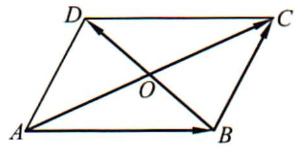
10. 如图，在▱$ABCD$ 中，设对角线向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}$，试用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

B　组

1. 已知 $A(7,8)$，$B(3,5)$，$C(4,3)$，且 M,N,D 分别是 AB,AC,BC 的中点，MN 与 AD 交于点 F，求$\overrightarrow{DF}$.
2. 若点 $A(-1,-1)$，$B(1,3)$，$C(x,5)$共线，求点 C 的坐标.
3. 求 A 组第 7 题中两直线的交点坐标.
4. 如果矩阵$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$把点 A 变成点 $A'(3,1)$，求点 A 坐标.
5. 假设现有的兔子和狐狸数量分别用 R,F 表示，记作$\begin{bmatrix}R\\ F\end{bmatrix}$，下一年的兔子和狐狸数量分别用 R',F'表示，记作$\begin{bmatrix}R'\\ F'\end{bmatrix}$. 若兔子和狐狸数量的增长模型如下：

$$\begin{cases}R'=1.1R-0.15F,\\ F'=0.1R+0.85F.\end{cases}$$

记矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1.1 & -0.15\\ 0.1 & 0.85\end{bmatrix}$，

(1)用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示上述兔子和狐狸数量的增长模型；

(2)如果现有 100 只兔子，30 只狐狸，用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示出下一年的兔子与狐狸数量，并计算出结果；

(3)如果今年有 100 只兔子，30 只狐狸，试推测上一年的兔子与狐狸数量.

第二章 几何变换与矩阵

平面图形有很多种运动变化，如平移、旋转、反射、压伸等. 这一章，我们就来研究矩阵与几何变换的关系，研究矩阵变换的基本性质以及它们的几何意义.

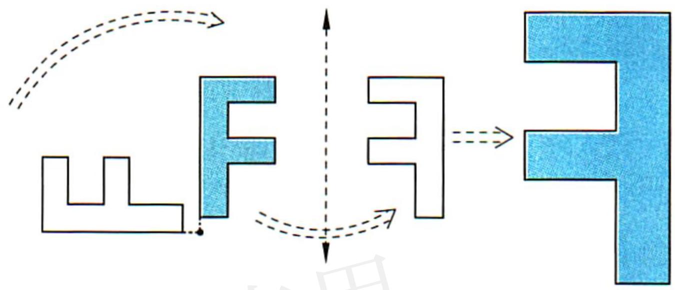


图 2-1

§1 几种特殊的矩阵变换

在第一章中，我们讨论了向量的概念和运算性质. 在平面直角坐标系中引入向量坐标时，我们特别提到了以原点为起点的向量. 指出了以原点为起点的向量与平面上的点之间是一一对应的，而且它们有相同的坐标.

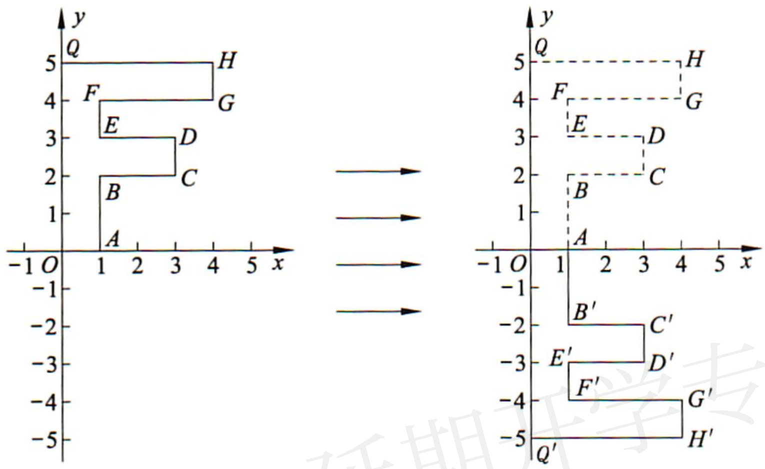
另外，我们还引入了矩阵与向量的乘法，设 $\boldsymbol{M}$ 是一个二阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量，通过矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用，可以得到唯一的向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}$. 特别地，当我们取原点为起点的向量 $\overrightarrow{OP}$，通过矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用，可以得到一个以原点为起点的新的向量 $\boldsymbol{M}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}$，并且 $\overrightarrow{OP'}$ 是被矩阵 $\boldsymbol{M}$ 唯一确定的. 我们把这样的对应关系称作**映射**，$\overrightarrow{OP}$ 称为**原像**，而 $\overrightarrow{OP'}$ 称作**像**. 从几何变换的观点，就相当于矩阵把点 $P(x,y)$ 变成了另一个点 $P'(x',y')$. 这就是说，矩阵就是一个几何变换，它把平面上任一个

点，变成平面上的另一个点. 所以，有时我们也称矩阵为**矩阵变换**.

1.1　反射变换

实例分析

观察图 2-2，字母“F”形状的图案关于 x 轴反射得到一个新图案.



(a)　　　　(b)

图 2-2

在上一章中，我们已经知道，矩阵乘向量的作用是把平面上的一个点变成另一个点. 那么，是否存在一个矩阵可以刻画图 2-2 中的变换过程呢？

我们来研究矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. 先用图 2-2(a) 中的点 $C(3,2)$ 来进行试验.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3+0\times2\\ 0\times3+(-1)\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix},$$

由运算结果可知，点 $C(3,2)$ 在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下，横坐标没变，纵坐标变为原来的相反数. 原像点 C 与像点 C' 关于 x 轴对称，如图 2-2(b).

同样的，对点 $H(4,5)$，$Q(0,5)$，由

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$$

可知，点 H,Q 在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下，横坐标也没变，纵坐标变为原来的相反数，也就是说点 H,Q 分别变成了关于 x 轴的对称点 $H'(4,-5)$，$Q'(0,-5)$.

而对点 $A(1,0)$，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times0\\0\times1+(-1)\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

由于点 A 的纵坐标为零，则其相反数仍为零，这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 把点 A 变成了它自己. 实际上我们也可以这样理解，点 A 在 x 轴上，它关于 x 轴的对称点就是它自己.

抽象概括

由 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot x+0\cdot y\\0\cdot x+(-1)\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$，可得对于平面上任意一点 $P(x,y)$，在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 的作用下横坐标不变，纵坐标变为原来的相反数，原像点 $P(x,y)$ 与像点 $P'(x,-y)$ 关于 x 轴对称. 整个平面上的点都关于 x 轴作了一次翻转，只有 x 轴上的点没变. 这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 可以刻画图 2-2 中的变换过程. 我们说，矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ 表示了关于 x 轴的**反射变换**.

动手实践

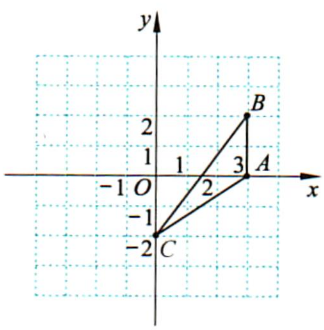


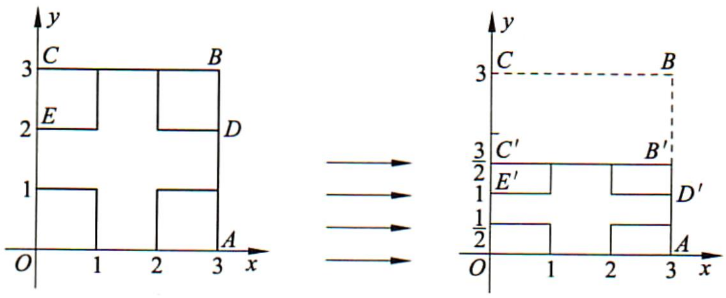
图 2-3

试着研究矩阵 $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 对图 2-3 中 $\triangle ABC$ 的作用结果. 分析并判断该矩阵表示的是什么变换. 应用信息技术，可以帮助我们更好地理解这一矩阵变换. 具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用一”.

1.2 压伸变换

实例分析

图 2-4 中，正方形图案向 x 轴方向垂直压缩了一半.



（a）　　　　（b）

图 2-4

那么，是否存在矩阵可以表示这一压缩变换的过程？

我们来研究矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，先观察它对图 2-4(a) 中的点 $D(3,2)$ 的作用，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+0\times2\\ 0\times3+\frac{1}{2}\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}.$$

从以上运算结果不难发现，点 $D(3,2)$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 的作用下，横坐标没变，纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，即该矩阵把点 D 向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，变成像点 $D'(3,1)$，如图 2-4(b).

同样地，对点 $B(3,3)$，$E(0,2)$，由

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

可知，在该矩阵的作用下，点 $B(3,3)$，$E(0,2)$ 的横坐标没变，纵坐标

均变为原来的$\frac{1}{2}$，即矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$把点 B，E 都向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，变成像点 $B'\left(3,\frac{3}{2}\right)$，$E'(0,1)$.

而对点 $A(3,0)$，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 3+0\times 0\\ 0\times 3+\frac{1}{2}\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix},$$

由于点 A 的纵坐标为零，则纵坐标的$\frac{1}{2}$仍然是零，这使得点 A 在矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$的作用下变成它自己. 实际上，点 A 在 x 轴上，把它向 x 轴垂直压缩为一半还是它自己.

抽象概括

对于平面上任意一点 $P(x,y)$，在矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$的作用下，

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot x+0\cdot y\\ 0\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{bmatrix},$$

横坐标不变，纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，原像点 $P(x,y)$ 的像为 $P'\left(x,\frac{1}{2}y\right)$. 即矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$把平面上的每一个点 P 都向 x 轴方向垂直压缩为原来的一半，只有 x 轴上的点没变. 我们说，矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$表示了向 x 轴方向的**垂直压缩变换**.

信息技术应用

一、利用几何画板研究矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，并在坐标系中任意选取三个点，分别标记为 A,B,C.

2. 依次选中点 A,B,C，构造三角形内部，并构造三角形上的点，标记为 P，测算点 P 坐标(x,y)，如图 2-5 所示，这样就得到向量$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

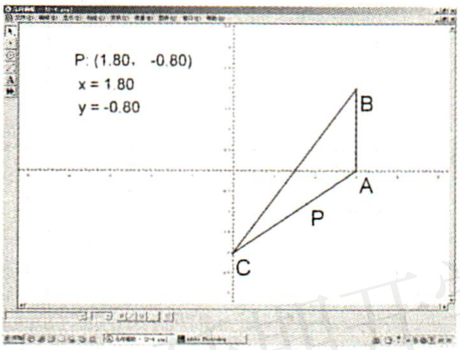


图 2-5

3. 根据矩阵乘向量定义，计算 $0\cdot x+1\cdot y$ 和 $1\cdot x+0\cdot y$，并分别标记为 x',y'，然后绘制点(x',y')标记为 P'，点 P'就是在矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$作用下点 P 的像点.

4. 顺次选中点 P 和点 P'，在构造菜单中选用轨迹功能，便得到$\triangle ABC$ 在矩阵$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$作用下的像，如图 2-6.

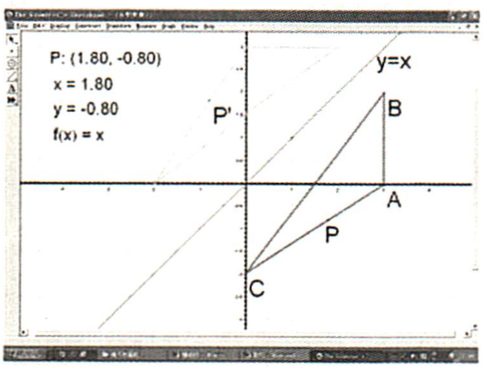


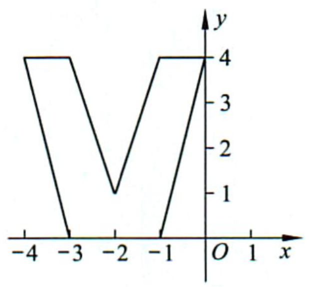
图 2-6

经过以上步骤后，任意拖动点 P(在$\triangle ABC$ 上运动)，就可以观察像点 P'与原像点 P 的位置关系. 任意拖动$\triangle ABC$ 的顶点或边就可以观察不同的三角形在该矩阵作用下的结果.

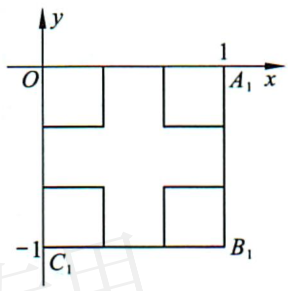
最后，在图表菜单中选中绘制新函数，然后输入 x 后确定，就得到直线 $y=x$. 可以利用变换菜单中反射功能绘制$\triangle ABC$ 关于 $y=x$对称的图形，进一步验证自己的猜想结果.

练　习　1

1. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$把图中的“V”字图形变成了什么？计算并画图，并选出若干点进行验证.



（第 1,2 题）



（第 3 题）

2. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$把图中的“V”字图形变成了什么？计算并画图，并选出若干点进行验证.

3. 猜想矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$把图中的正方形 $OA_1B_1C_1$ 变成了什么图形？并选出若干点进行验证.

4. 仿照本节“实例分析”中的研究过程，试着研究矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$表示的是什么变换？

5. 当 $k>0$ 时，你能猜想矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$表示的变换吗？试着用语言描绘出你的猜想.

1.3　旋转变换

旋转也是一种常见的图形变换.

实例分析

图 2-7 中，图形绕着原点 O 逆时针旋转了 90°.

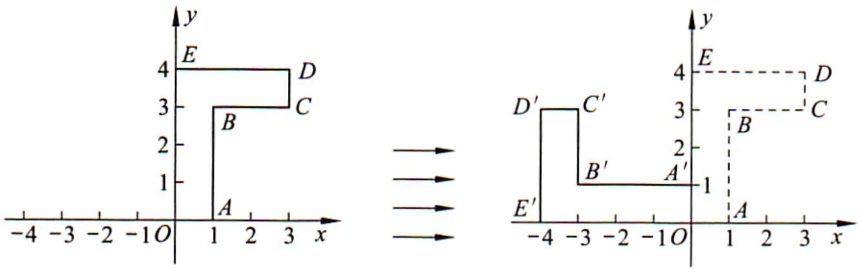
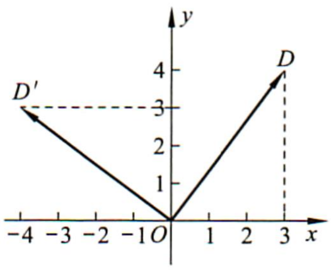


图 2-7

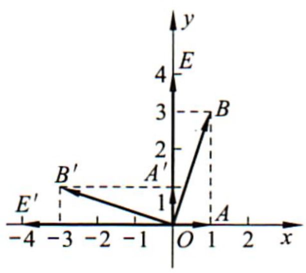
我们来研究矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，考察它对点 $D(3,4)$ 的作用.

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+(-1)\times4\\ 1\times3+0\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix},$$

在矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的作用下，点 $D(3,4)$ 变成了像点 $D'(-4,3)$. 其中点 D' 的横坐标是点 D 纵坐标的相反数，点 D' 的纵坐标是点 D 的横坐标. 那么，这两个点，或者说向量 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OD'}$ 在几何上有什么关系呢？由图 2-8(a) 不难看出向量 $\overrightarrow{OD'}$ 是把向量 $\overrightarrow{OD}$ 绕着原点逆时针旋转 90° 得到的. 也就是矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 把点 D 绕原点逆时针旋转 90° 变成 D'.



(a)



(b)

图 2-8

对于其他点，如 $A(1,0)$，$B(1,3)$，$E(0,4)$. 由

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 0\end{pmatrix}$$

可知，矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 把它们都绕原点逆时针旋转了 90°，分别变成点 $A'(0,1)$，$B'(-3,1)$，$E'(-4,0)$，如图 2-8(b) 所示.

抽象概括

对平面上任一点 $P(x,y)$，在矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 的作用下，

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot x+(-1)\cdot y\\1\cdot x+0\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix},$$

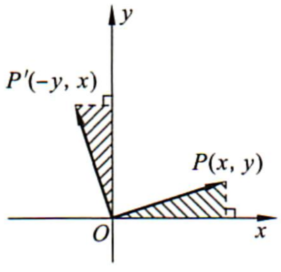


图 2-9

点 $P(x,y)$ 变成了像点 $P'(-y,x)$. 由图 2-9 可知，点 P' 是点 P 绕着原点逆时针旋转 90°得到的，即矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 把平面上每一点都绕着原点逆时针旋转了 90°，只有原点没动. 我们说矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 表示的是(逆时针旋转 90°的)**旋转变换**.

1.4 切 变

试分析以下矩阵的作用

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

> **信息技术建议**
> 应用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 所表示的几何变换，具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用”.

首先，我们考虑矩阵对图 2-10(a)中正方形 $ABCO$ 的四个顶点的作用. 并猜想该矩阵把这个正方形变成了什么.

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times0\\0\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1\\0\times1+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times0+1\times1\\0\times0+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

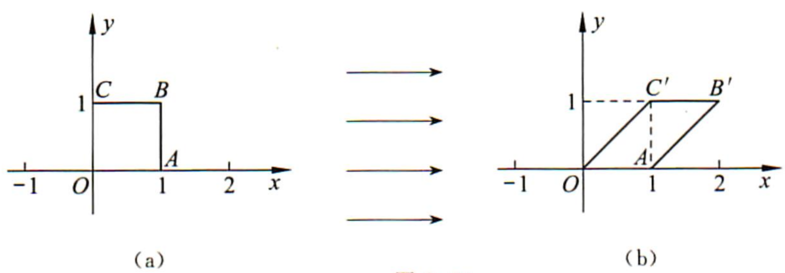


图 2-10

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把图 2-10(a) 中正方形 $ABCO$ 的顶点 A，B，C，O 分别变成了点 $A(1,0)$，$B'(2,1)$，$C'(1,1)$，$O(0,0)$．如图 2-10(b) 所示，直观上可以看出，正方形 $ABCO$ 变成了平行四边形 $AB'C'O$．

我们称矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 表示的是(沿 x 轴正向的)**切变变换**．

思考交流

给定点 $P(x,y)$，请讨论点 $P(x,y)$ 在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 的作用下，像点 P' 的坐标特点，并给出几何解释．

信息技术应用

二、利用几何画板研究矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，仿照反射变换“信息技术应用”中的步骤 1，2，构造四边形 $BCDE$ 上任一点 $P(x,y)$，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，如图 2-11 所示．

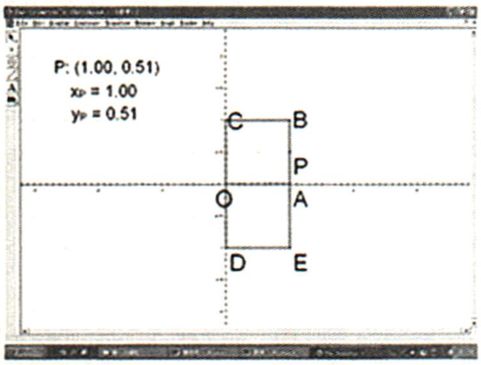


图 2-11

2. 根据矩阵乘向量的定义，计算 $1\cdot x+1\cdot y$ 和 $0\cdot x+1\cdot y$，并分别标记为 x'，y'，然后绘制点 (x',y') 标记为 P'．仿照反射变换“信息技术应用”中步骤 4，构造点 P' 轨迹，便得到四边形 $BCDE$ 在矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 作用下的像，如图 2-12 所示．

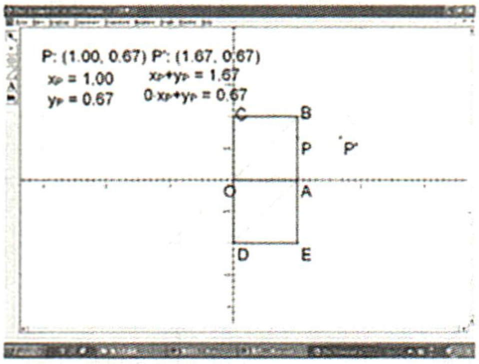
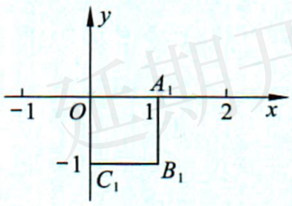


图 2-12

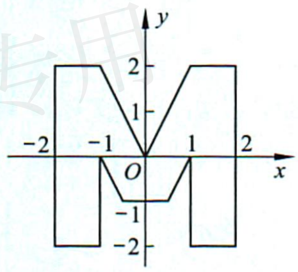
经过以上步骤后，任意拖动点 P(在四边形 $BCDE$ 上运动)，可以观察像点 P'与原像点 P 的位置关系.

练习 2

1. 试给出矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 对图中正方形 $A_1B_1C_1O$ 的作用结果. 这和你想像中的结果一样吗?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 猜想下列矩阵把图中的字母“M”分别变成了什么? 选出若干点计算并画图验证一下你的猜想.

(1) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. 试研究下列矩阵把图 2-10(a)中的正方形和第 1 题图中的正方形变成了什么? 你能感受到它们所表示的变换吗?

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;　　(3) $\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (其中 k 为任意实数).

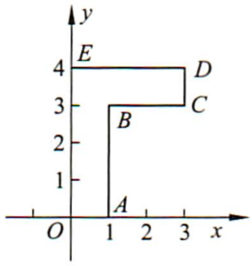
习 题 2—1

A　组

1. 分别给出下列矩阵对图中图形的作用结果.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

你认为它们分别表示什么变换？能证明吗？



（第 1 题）

2. 分别给出下列矩阵对第 1 题图中图形的作用结果.

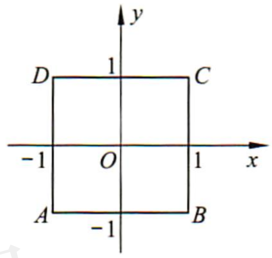
(1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

直觉上它们分别表示什么变换？能证明吗？

3. 分别给出下列矩阵对图中正方形的作用结果.

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$（其中 $k>0$）.

从几何上说明它们分别表示什么变换，并给出证明.

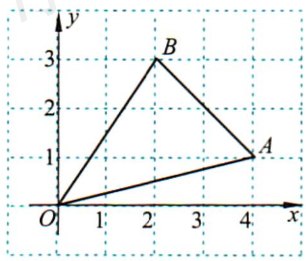


（第 3 题）

4. 分别给出下列矩阵对图中的三角形 OAB 的作用结果.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$；　(3) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$　（其中 $k>0$）.

从几何上试说明它们分别表示什么变换，并给出证明.



（第 4 题）

B　组

1. 试通过访问、咨询或读书自学等方式了解三角函数及三角变形公式，并完成以下内容：

(1) 利用给定图示，研究矩阵 $M=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 表示什么变换.

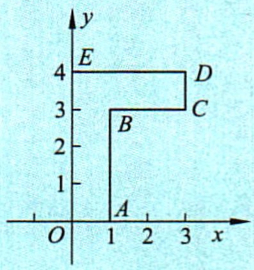
(2) 试证明你的结论.

(3) 当 $\theta=30^\circ$ 时，图中的图形变换结果是什么？
当 $\theta=75^\circ$ 时呢？

(4) 你能给出表示逆时针旋转 60° 的矩阵吗？

(5) 你能给出表示顺时针旋转 60° 的矩阵吗？

(6) 表示顺时针旋转 θ 的矩阵结构如何？能证明你的结论吗？



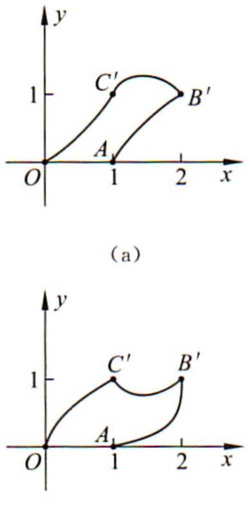
（第 1 题）

2. 试证明以下矩阵分别把直线变成直线.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}；\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

§2　矩阵变换的性质

问题提出



(a)

(b)

图 2-13

上一节研究矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$表示的变换时，我们只计算了正方形四个顶点 A,B,C,O 的变换结果，并没有讨论其他点. 那么能保证正方形 $ABCO$ 不会变成图 2-13 中的各种样子吗？

也就是说，矩阵变换是不是把直线变成直线. 为了回答这个问题，我们先来研究矩阵变换的性质.

实例分析

我们研究矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，它表示的是关于 x 轴的反射变换，它把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 反射成了向量 $\boldsymbol{M\alpha}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M\beta}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$，如图 2-14.

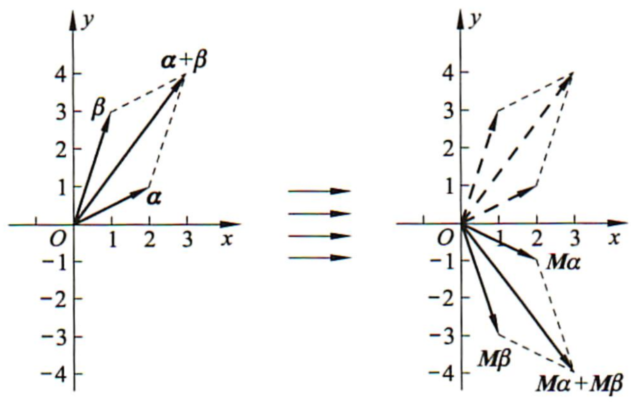


图 2-14

直观上，由于向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别与向量 $\boldsymbol{M\alpha},\boldsymbol{M\beta}$ 关于 x 轴对称，所以，向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与向量 $\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$ 也关于 x 轴对称. 即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$反射成了向量 $\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$，即 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$. 验证这一点并不困难，因为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$ 成立.

类似地，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 把向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 沿逆时针方向旋转 90°，也把向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 沿逆时针方向旋转 90°成了向量 $\boldsymbol{N\alpha}+\boldsymbol{N\beta}$. 如图 2-15 所示，即有 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{N\alpha}+\boldsymbol{N\beta}$. 请同学们自己进行验证.

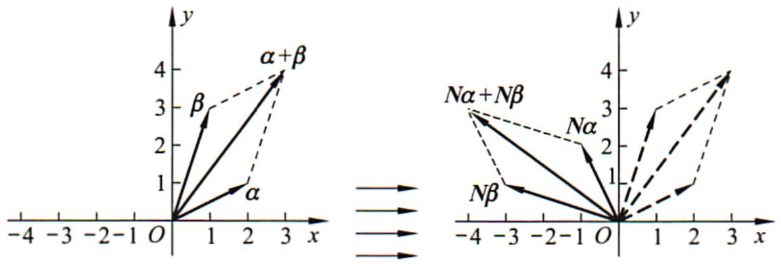


图 2-15

抽象概括

一般地，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，有

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}. \tag{2.1}$$

下面我们来证明(2.1)式.

证明 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\left(\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}p_1+q_1\\p_2+q_2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1+q_1\\p_2+q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(p_1+q_1)+b(p_2+q_2)\\c(p_1+q_1)+d(p_2+q_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap_1+aq_1+bp_2+bq_2\\cp_1+cq_1+dp_2+dq_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ap_1+bp_2\\cp_1+dp_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}aq_1+bq_2\\cq_1+dq_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ap_1+aq_1+bp_2+bq_2\\cp_1+cq_1+dp_2+dq_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M\alpha}+\boldsymbol{M\beta}$ 成立.

实例分析

考察矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，它表示逆时针旋转 90° 的变换，那么，不难想像把向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 先伸长 2 倍，再逆时针旋转 90°，和把它先逆时针旋转 90°，再伸长 2 倍，结果相同，如图 2-16 所示.

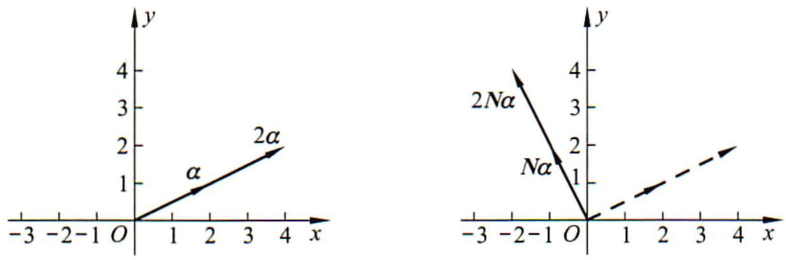


图 2-16

从代数运算上来看，由于

$$\boldsymbol{N}(2\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{N}\left(2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},$$

$$2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha})=2\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}.$$

所以，$\boldsymbol{N}(2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha})$ 成立.

抽象概括

一般地，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，及任意实数 λ，有

$$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}).\tag{2.2}$$

综合以上的两个结论，可以得出

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，以及任意实数 λ 和 μ，总有

$$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}).\tag{2.3}$$

这是矩阵变换最重要的性质.

请同学们自己完成对(2.2)式和(2.3)式的证明.

上一章我们已经知道，任意向量 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 总可以写成

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

利用矩阵变换的性质(2.3)式，有

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

那么，只要确定了基向量$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，任意向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$在 $\boldsymbol{M}$ 作用下的结果 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$均可以用向量 $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$表示.

由于任意向量均可由基向量$\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$表示，因此，在研究较复杂的矩阵变换时，先考虑基向量的变换结果，再考虑一般向量的变换结果，这是用数学解决问题的基本思想之一.

给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，我们知道

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第一列，

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第二列，

这样，对任意向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，可以利用基向量间接计算：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+y\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\&=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix},\end{aligned}$$

也可以根据矩阵与向量乘法的定义，直接计算：

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix},$$

这两种方式得到的结果是一致的.

练　习　1

1. 对矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$，在平面直角坐标系中画出下列向量：

(1) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$2\boldsymbol{\alpha}$，$2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$；

(2) $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha})$，$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$，

并验证

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta};$$

$$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha})=2(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha});$$

$$\boldsymbol{M}(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}.$$

2. 证明矩阵变换的性质(2.2)式及(2.3)式.

3. 通过讨论矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 对基向量 $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ 的变换结果，并利用基向量间接计算该矩阵把向量 $\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$ 变成了什么.

现在我们来讨论本节开始时提出的问题，矩阵变换是否把直线变成直线.

实例分析

设直线 l 经过点 $A(2,1)$，且平行于向量 $\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$，如图 2-17(a)，它的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\boldsymbol{v}_0 \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

其坐标形式为

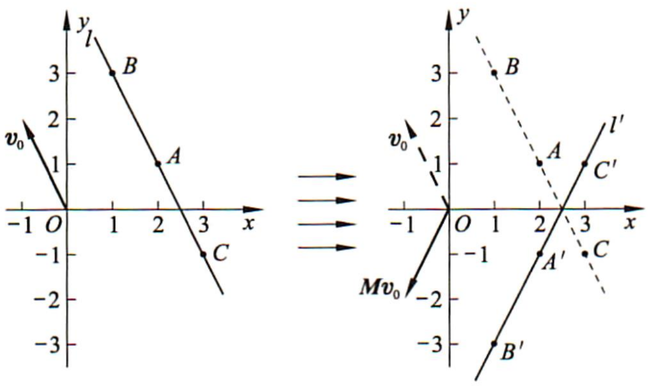
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbf{R}).$$

考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，它表示关于 x 轴的反射变换，则由

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 $A(2,1)$ 反射成了点 $A'(2,-1)$，把向量 $\boldsymbol{v}_0$ 反射成了向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$，如图 2-17(b). 过点 A' 且平行于向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$ 的直



（a）　　　　（b）

图 2-17

线 l' 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OA'}+t\cdot(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}),$$

其坐标形式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

对直线 l，分别取参数 $t=1,-1$ 时得到直线上不同于点 A 的点 $B(1,3)$，$C(3,-1)$，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，它们分别变成了点 $B'(1,-3)$，$C'(3,1)$，而 B'，C' 恰在直线 l' 上，是参数 $t=1,-1$ 时对应的点.

对直线 l 上任一点 $X(x,y)$，由

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OX'}.$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 上任意一点 $X(x,y)$ 都反射成了直线 l' 上的一点 X'. 也就是说，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 反射成了直线 l'.

信息技术建议

应用信息技术可以帮助我们更好地理解矩阵变换把直线变成直线或一个点，具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用一”.

抽象概括

一般地，对平面上任意直线 l，若 l 经过点 A，且平行于向量 $\boldsymbol{v}_0$，那么 l 的向量方程为

$$l:\ \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{v}_0\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，它把点 A 变成点 A'，即把向量 $\overrightarrow{OA}$ 变成向量 $\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{M}$ 把向量 $\boldsymbol{v}_0$ 变成向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$.

对 l 上任意一点 X，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 X 变成点 X'. 根据矩阵变换的性质(2.3)式，有

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}(\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{v}_0)=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

当向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0\neq\mathbf{0}$ 时，点 X' 在经过点 A' 且平行于向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0$ 的直线 l' 上，其中，l' 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX'}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0)\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

即当 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0\neq\mathbf{0}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 变成直线 l'.

当向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_0=\mathbf{0}$ 时，由 $\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}$ 可知，点 X' 就是点 A'. 即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把整条直线 l 变成一个点 A'.

简而言之，

矩阵表示的变换，把直线或者变成直线，或者变成一个点.

我们称这样的变换为**线性变换**. 换句话说，矩阵表示的是线性变换.

例 1 直线 l 经过点 $A(1,0)$ 和 $B(1,1)$. 考察矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 把直线 l 变成什么？

解 依题意，向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为直线 l 的方向向量，则 l 的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

其中 $\qquad\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

即在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下点 A 变成点 A，点 B 变成点 $B'(2,1)$，且 $\boldsymbol{M}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OB}-\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB'}$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 变成向量 $\overrightarrow{AB'}$.

由于 B' 与 A 不重合，$\overrightarrow{AB'}\neq\mathbf{0}$，所以，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 l 变成了经过点 A 和 B' 的直线 l'

$$\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB'}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

其中 $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，如图 2-18 所示.

应该说，大多数的矩阵变换是把直线变成直线. 但也的确存在一些矩阵，把某些直线变成一个点.

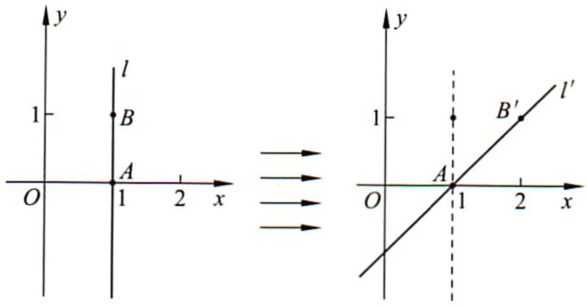


图 2-18

例 2　给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，考察该矩阵把经过点 $A(2,1)$ 垂直于 x 轴的直线 l 变成什么？

解　垂直于 x 轴的直线的方向向量可以用 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 表示，则直线 l 经过点 $A(2,1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，它的向量方程为

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\boldsymbol{j}\qquad(t\in\mathbf{R}).$$

在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的作用下

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA'},$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

这样，矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 把点 A 变成点 $A'(2,0)$，把方向向量 $\boldsymbol{j}$ 变成了零向量，即 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$.

这样，对直线 l 上任意点 X，在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，$\overrightarrow{OX}$ 变为：

$$\boldsymbol{M}\overrightarrow{OX}=\boldsymbol{M}\overrightarrow{OA}+t(\boldsymbol{M}\boldsymbol{j})=\overrightarrow{OA'}+t\cdot\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA'},$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把点 X 都变成同一个点 $A'(2,0)$.

即矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 把垂直于 x 轴的直线 l 变成了一个点 A'，如图2-19 所示.

事实上，由

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$$

可知，在矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 的作用下，平面上任意一点 $X(x,y)$ 的横坐标不

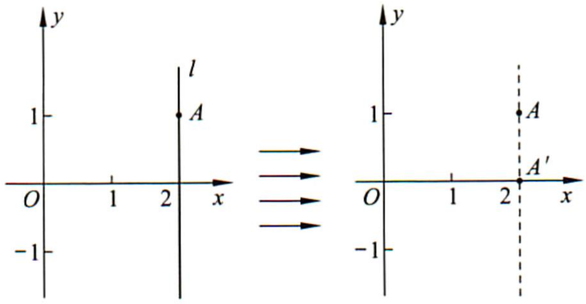


图 2-19

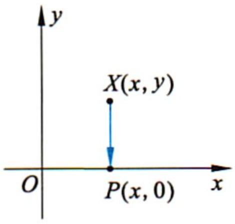


图 2-20

变，纵坐标变成零，即点 X 被该矩阵垂直投影到了 x 轴上，如图 2-20 所示. 它把每一条垂直于 x 轴的直线都变成了一个点，把整个平面变成了一条直线——x 轴. 我们称矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 表示的是**投影变换**.

动手实践

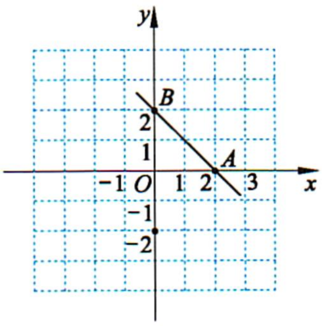


图 2-21

试着研究矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 把图 2-21 中直线 AB 变成什么图形，分析并判断该矩阵表示的是什么变换. 应用信息技术，可以帮助我们更好地理解这一矩阵变换. 具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用二”.

抽象概括

信息技术建议

应用信息技术可以更直观、更方便地演示该矩阵对直线 AB 的作用结果，帮助我们理解该矩阵表示的变换. 具体结果可以参看本节后面的“信息技术应用”.

一般地，对任意矩阵 $\boldsymbol{M}$，只要研究它对直线上的两个点 A 和 B 的变换结果 A'，B'，就可以掌握它对整条直线 AB 的变换结果. 其中，

当 A' 与 B' 不重合时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 AB 变成直线 $A'B'$；

当 A' 与 B' 重合时，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 把直线 AB 变成一个点 A'（即 B'）.

这样，我们就回答本节开始时提出的问题了，正方形 $ABCO$ 在矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 表示的作用下，不会出现图 2-13 中的各种样子，只可能把正方形 $ABCO$ 变成平行四边形 $AB'C'O$（见图 2-10）.

信息技术应用

一、利用几何画板理解矩阵变换的性质

步骤：

1. 仿照矩阵乘向量的几何意义的“信息技术应用”中步骤 1～3，得到矩阵$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

2. 绘制点 $A(2,1)$，$V(-1,2)$，构造线段 OV 及过点 A 平行于 OV 的直线 l，如图 2-22 所示.

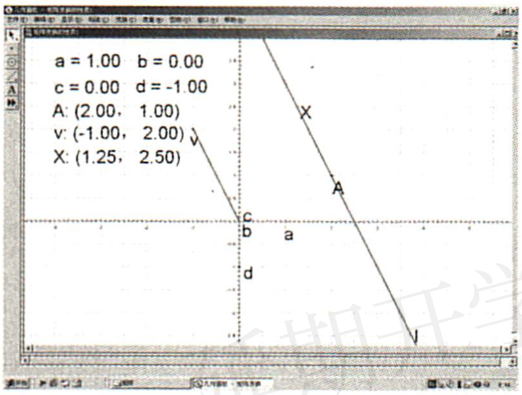


图 2-22

3. 构造直线 l 上任意一点 $X(x,y)$，仿照矩阵乘向量的几何意义的“信息技术应用”中步骤 5～6，构造点 A，V，X 在矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$作用下的像点 A'，V'，X'，并构造点 X' 的轨迹，标记为 l'，如图 2-23 所示.

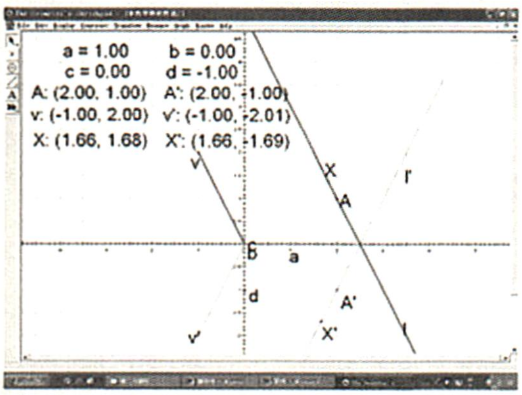


图 2-23

经过以上步骤后，拖动点 X(在直线 l 上运动)可以观察像点 P' 与原像点 P 的位置. 任意拖动 a,b,c,d 四个点，可以得到不同的矩阵，可以观察轨迹 l'的形状变化.

最后，构造过点 A'平行于 OV'的直线 m，观察直线 m 与轨迹 l' 的关系.

二、利用几何画板研究矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$表示的变换

步骤：

1. 在新建画板中建立直角坐标系，并绘制点 $A(2,0)$，$B(0,2)$，然后构造直线 AB.

2. 构造直线 AB 上的点 $P(x,y)$，仿照反射变换的"信息技术应用"中的步骤 3～4，构造点 $P(x,y)$在矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$作用下的像点 $P'(x',y')$，并构造点 P'的轨迹，如图 2-24 所示.

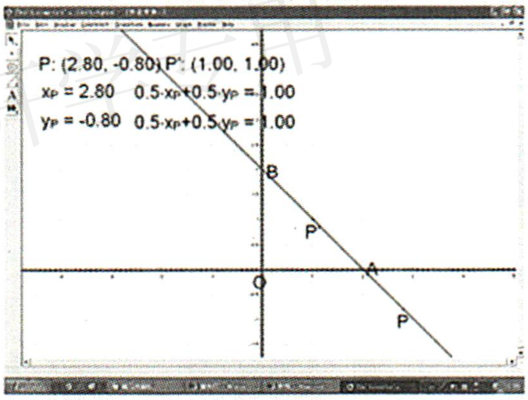


图 2-24

经过上述步骤后，拖动点 P(在直线 AB 上运动)，观察像点 P' 及其坐标并思考.

3. 利用直线工具，在坐标平面上画任一直线 CD，重复步骤 2 构造直线 CD 在矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$作用下的像 m，如图 2-25 所示.

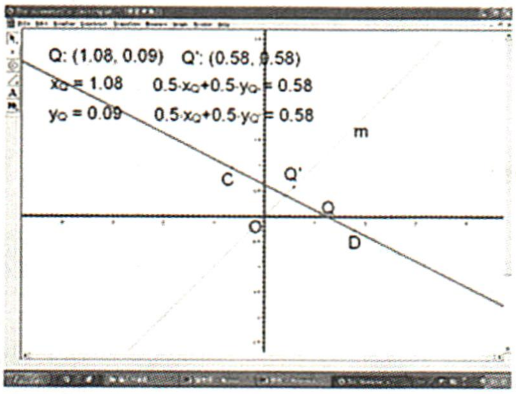


图 2-25

4. 经过上述步骤后，拖动点 Q(在直线 CD 上运动)，观察像点 Q' 及其坐标，拖动点 C(或点 D)观察轨迹 m 与直线 CD 的关系.

练 习 2

1. 考察在矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 作用下，点 $B(1,1)$，$D(2,3)$ 的像点的坐标，并说明在矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的作用下，直线 BD 的像是什么图形.

2. 考察矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 把点 $A(2,1)$，$B(1,3)$，$C(2,2)$ 各变成的像点的坐标，并回答以下问题，画出示意图：

(1) 该矩阵把直线 AB 变成什么图形？

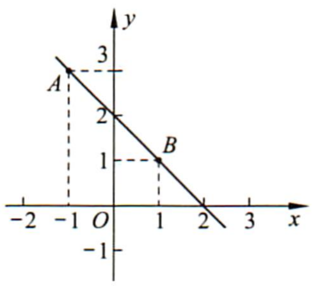
(2) 该矩阵把直线 AC 变成什么图形？

习 题 2—2

A 组

1. 你认为下列矩阵把图中的直线变成什么？简述你的理由.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.



(第 1 题)

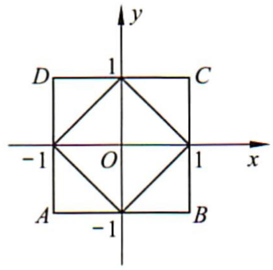
2. 考察矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 把点 $A(1,2)$，$B(1,3)$，$C(2,1)$ 变成的像点的坐标，并回答以下问题：

(1) 该矩阵把直线 AB 变成了什么图形？画出图形；

(2) 该矩阵把直线 AC 变成了什么图形？画出图形；

(3) 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 表示的是什么变换？

3. 研究下列矩阵把图中的正方形图案变成了什么图形，并说明它们所表示的变换.



(第 3 题)

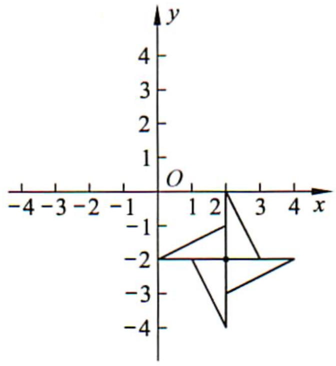
(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$(其中 k 为任意实数).

4. 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，及实数 λ 和 μ，证明下列矩阵都满足
$\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta})$.

(1) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

5. 图中的美丽风车，每接受一个矩阵命令就作一次图形变换，每完成一次变换就得到一种动画效果，从现在图中位置，按 $A\to B\to C\to D\to E$ 的顺序依次接受了五个矩阵命令，完成了一组连续变换，画出风车每一次变换后的图案.



(第 5 题)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix};\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

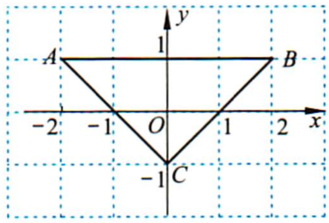
B　组

如果你掌握了有关算法的基本知识，在条件允许的情况下，设计算法程序，在计算机上实现 A 组第 5 题所要求完成的变换过程.

复习题二

A　组

1. 如图，分别给出下列矩阵对$\triangle ABC$的变换结果.



（第 1 题）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

2. 对矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，验证以下等式成立.

(1) $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$；

(2) $\boldsymbol{M}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})$；

(3) 对任意实数 λ，μ，有 $\boldsymbol{M}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha})+\mu(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta})$.

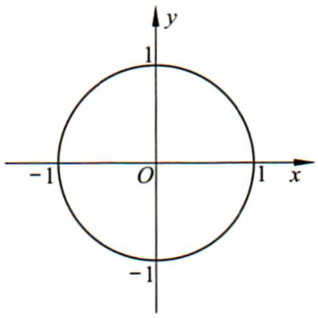
3. 已知经过点 $A(0,2)$，平行于向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的直线 l. 考察下列矩阵把直线 l 变成什么.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 分别讨论下列矩阵对基向量 $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的变换结果，并利用基向量间接计算这些矩阵分别把向量 $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ 变成什么？

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (1) 如图，分别给出下列矩阵对圆 O 的变换结果.

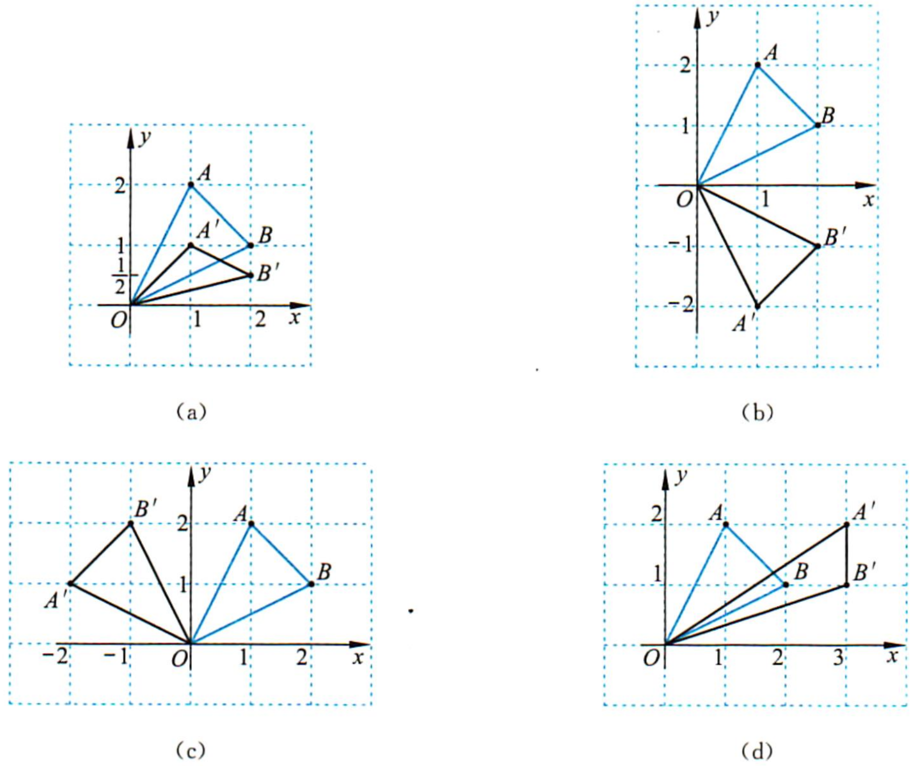


（第 5 题）

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；　② $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；　③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

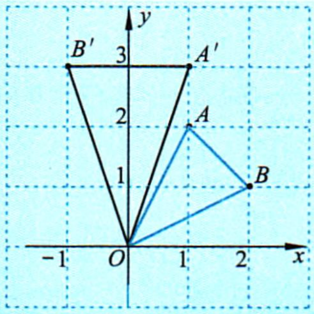
(2) 若圆 O 方程为 $x^2+y^2=1$，分别写出上述矩阵变换后曲线的方程.

6. 在矩阵变换下，下列各图中的$\triangle ABO$变成了$\triangle A'B'O$，其中点 A 的像点为点 A'，点 B 的像点为点 B'. 试判断表示下列 4 个图中几何变换的矩阵分别是什么？



（第 6 题）

B　组



（第 1 题）

1. 若有一矩阵把图中$\triangle ABO$变成$\triangle A'B'O$，其中点 A 的像点为点 A'，点 B 的像点为点 B'. 试求该矩阵.
2. 已知在一个矩阵的作用下，点 $A(1,2)$变成了点 $A'(5,11)$，点 $B(3,-1)$变成了点 $B'(1,5)$，点 $C(x,0)$变成了点 $C'(2,y)$. 求实数 x,y 的值.
3. 对任意矩阵 $\boldsymbol{M}$，平面中四点 A,B,C,D 在该矩阵作用下变成A',B',C',D'. 试证明，若 $AB/\!/CD$，则 $A'B'/\!/C'D'$.

第三章　变换的合成与矩阵乘法

§1　变换的合成与矩阵乘法

实例分析

矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 分别表示把平面上的点向 x 轴垂直压缩为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的变换. 利用 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$，对平面上的点连续作两次变换，即先压缩为 $\frac{1}{2}$，再压缩为 $\frac{1}{3}$，实际上连续完成这两个变换，变换的效果可以用一个变换来表示，即压缩为 $\frac{1}{6}$ 的变换（如图 3-1 所示），矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ 恰好表示了这一变换.

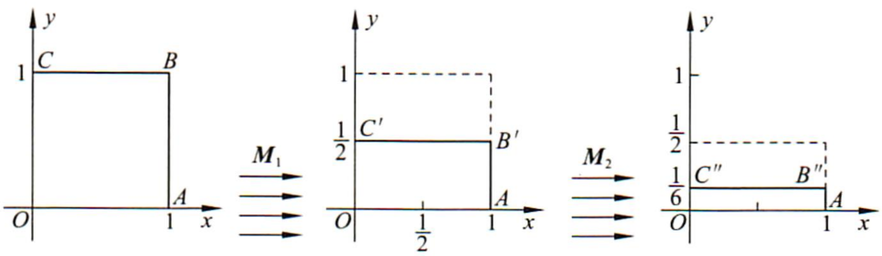


图 3-1

对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，上述过程可以表示为：

$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)$$

$$=M_2\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{2}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{6}y\end{pmatrix},$$

$$N\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{6}y\end{pmatrix}.$$

于是，　$$M_2(M_1\alpha)=N\alpha.$$

类似地，设 $M_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 表示关于 y 轴的反射变换，即把平面上的点反射到此点关于 y 轴的对称点，$M_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 表示关于 x 轴的反射变换，即把平面上的点反射到此点关于 x 轴的对称点. 对平面上的点连续作这两个变换，先关于 y 轴反射，再关于 x 轴反射，实际上连续完成这两个变换的结果可以通过一个变换完成，即绕原点逆时针旋转 180° 的变换（参看图 3-2）. 矩阵 $N=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 恰好表示了这一变换.

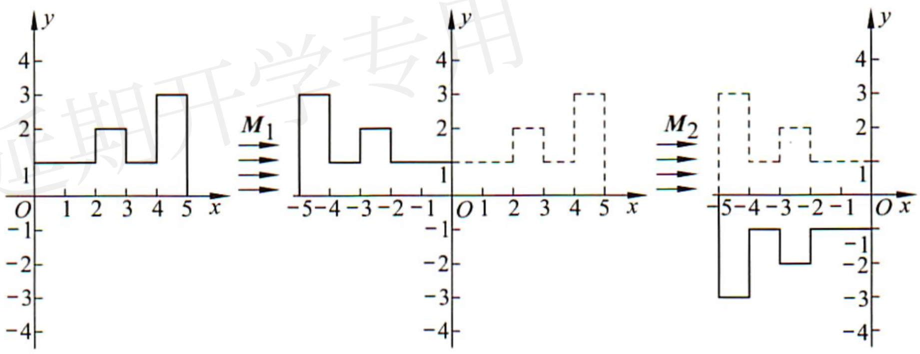


图 3-2

对任意向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，上述过程可以表示为：

$$M_2(M_1\alpha)=M_2\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=M_2\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix},$$

$$N\alpha=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix},$$

于是，　$$M_2(M_1\alpha)=N\alpha.$$

分析理解

对于任意的两个矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$，是否存在一个矩阵 $\boldsymbol{N}$，使得矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换恰好相当于先作矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 的变换，再作矩阵 $\boldsymbol{M}_2$ 的变换呢？即对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha}) \tag{1}$$

成立．如果这样的矩阵 $\boldsymbol{N}$ 存在，它和矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 又有着怎样的关系呢？

我们知道，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，它可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 构成一组基向量；

另一方面，我们还知道，任何矩阵 $\boldsymbol{N}$ 都是线性变换，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，任意实数 λ,μ，有

$$\boldsymbol{N}(\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{N}\boldsymbol{\beta};$$

特别地，　$\boldsymbol{N}(x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j})=x\,\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}$.

这样，我们首先考查上面问题在特殊情况下是否成立，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{i}$ 或 $\boldsymbol{j}$ 时，是否存在 $\boldsymbol{N}$，使得

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i}); \tag{2}$$

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j}). \tag{3}$$

设　$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}u&v\\s&t\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}x&x'\\y&y'\end{bmatrix}$.

下面我们来确定 $\boldsymbol{N}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})&=\boldsymbol{M}_2\left(\boldsymbol{M}_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}u&v\\s&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}u\\s\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\s\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}au+bs\\cu+ds\end{bmatrix},\end{aligned}$$

我们要确定矩阵 $\boldsymbol{N}$，应该满足(2)式，即

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i}).$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}&=\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}x&x'\\y&y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

这样，我们可以推出：

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}au+bs\\cu+ds\end{bmatrix},$$

从而
$$\begin{cases}x=au+bs,\\y=cu+ds.\end{cases}$$

同样道理，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})&=\boldsymbol{M}_2\left(\boldsymbol{M}_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{bmatrix}u&v\\s&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\\&=\boldsymbol{M}_2\begin{bmatrix}v\\t\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\t\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}av+bt\\cv+dt\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}&=\begin{bmatrix}x&x'\\y&y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{N}$ 亦应满足(3)式：

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j}),$$

所以，
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}av+bt\\cv+dt\end{bmatrix}.$$

从而，
$$\begin{cases}x'=av+bt,\\y'=cv+dt.\end{cases}$$

这样，我们就得到

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}au+bs&av+bt\\cu+ds&cv+dt\end{bmatrix}.$$

并且这样构成的矩阵 $\boldsymbol{N}$，满足(2)(3)式.

最后，我们再来验证一下，对任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，(1)式是成

立的.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})&=\boldsymbol{M}_2[\boldsymbol{M}_1(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})]\\&=\boldsymbol{M}_2[\boldsymbol{M}_1(x\boldsymbol{i})+\boldsymbol{M}_1(y\boldsymbol{j})]\\&=\boldsymbol{M}_2(x\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=\boldsymbol{M}_2(x\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})+\boldsymbol{M}_2(y\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{i})+y\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{N}\boldsymbol{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{N}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\\&=x\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{N}\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

所以， $\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\alpha})$成立.

我们定义矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 的乘法如下：

$$\boldsymbol{M}_2\cdot\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{N},$$

矩阵 $\boldsymbol{N}$ 称为 $\boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 的乘积.

给定两个矩阵：$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\\ s & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}au+bs & av+bt\\ cu+ds & cv+dt\end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

例 计算

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}$.

解 (1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times(-1)+2\times4\\ 3\times1+4\times0 & 3\times(-1)+4\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 3 & 13\end{bmatrix};$$

(2) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0\times3+1\times(-2) & 0\times0+1\times(-3)\\ 2\times3+4\times(-2) & 2\times0+4\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -12\end{bmatrix}.$$

显然，两个二阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 仍是一个二阶方阵，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由(3.1)式定义的乘积满足

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\alpha}). \qquad (3.2)$$

从几何意义上看，这表明，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 表示的变换，就是通过先作矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换，再作 $\boldsymbol{M}$ 的变换得到的变换.

我们把这样连续实施两个变换，称为**变换的合成**. 则矩阵变换的合成仍是矩阵变换. 根据(3.2)式，我们在以后的书写中可以省略括号，记 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{MN\alpha}$.

我们不难推出，单位矩阵 $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 与任意二阶方阵 $\boldsymbol{M}$ 乘积满足

$$\boldsymbol{II}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{IM}=\boldsymbol{MI}=\boldsymbol{M}. \tag{3.3}$$

以上等式利用矩阵乘法(3.1)式均可证明. 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数“1”在数的乘法中的作用.

练习

1. 计算下列矩阵乘法，并说明它们的几何意义：

(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

2. 利用矩阵乘法(3.1)式证明(3.3)式.

习题 3—1

A 组

1. 计算下列矩阵乘法，并说明它们的几何意义：

(1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$；　　(6) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

2. 计算：

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

3. 利用矩阵乘法定义(3.1)式，证明下列等式并说明其几何意义：

(1) $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $(k>0)$；　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 利用矩阵乘法(3.1)式证明(3.2)式.

5. 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，利用

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

形式，根据矩阵的性质(2.3)式证明(3.2)式.

6. 假设我们收集到苹果和香蕉在两个不同商店的价格，每个男性和女性分别对这两种水果的日需求量，以及两个不同公司中男性与女性人员数量，并用矩阵表示如下：

价格　　　　日需求量　　　　人员数量

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{A店} & \text{B店}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{苹果}\\ \text{香蕉}\end{array} & \begin{pmatrix} 1.5 & 1.2 \\ 2.8 & 3.0 \end{pmatrix}\end{array}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{苹果} & \text{香蕉}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{男}\\ \text{女}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\end{array}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{男} & \text{女}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{公司甲}\\ \text{公司乙}\end{array} & \begin{pmatrix} 200 & 50 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}\end{array}$$

利用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，按下列要求求出矩阵乘积：

(1)计算乘积 $\boldsymbol{BA}$，并说明该乘积矩阵表示的是什么量表；

(2)哪两个矩阵的乘积可以表示两个不同公司对两种不同水果的日需求量？并计算出这个量表.

7. 注意观察，在你的生活中，有没有可以用矩阵以及矩阵乘法表示的事？

B　组

完整地叙述得到以下结论的全过程.

从矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix}$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 确定矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$，使得先作矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 的变换，再作 $\boldsymbol{M}_2$ 的变换，就相当于是矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的变换.

§2　矩阵乘法的性质

问题引入

在上节中，我们定义了矩阵的乘法，我们知道，每引入一种新运算，都要研究这种新运算的性质，然后，利用这些运算性质研究其他的问题，这是代数学科的基本任务.

以前，我们学习过数与数的加法运算和乘法运算，代数式与代数式的加法和乘法运算，向量与向量的加法运算，我们知道，这些运算都满足结合律和交换律.

那么，由(3.1)式定义的两个矩阵的乘法运算是否也满足结合律和交换律呢？

首先，我们讨论结合律，对于给定的三个矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{P}$，由矩阵乘法的几何意义，我们知道，$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示了按一定次序实施 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{P}$ 三个变换.

$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 表示先实施 $\boldsymbol{P}$ 变换，再实施先 $\boldsymbol{N}$ 后 $\boldsymbol{M}$ 的合成变换；

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示先实施先 $\boldsymbol{P}$ 后 $\boldsymbol{N}$ 的合成变换，再实施 $\boldsymbol{M}$ 变换.

即 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})$ 表示的变换，都是先实施 $\boldsymbol{P}$ 表示的变换，再实施 $\boldsymbol{N}$ 表示的变换，最后实施 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换，结果是相同的.

按照矩阵乘法的定义，对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，我们可以直接验证：

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP})\boldsymbol{\alpha}.$$

请同学们把它作为一个练习完成.

从代数上说，矩阵乘法运算满足结合律，即

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP}).$$

根据矩阵乘法不难验证这一等式.

由于有了乘法的结合律，在多个矩阵的乘法中，可将括号省去，即 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}$ 可直接写为 $\boldsymbol{MNP}$.

这样，给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，规定 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{MM}$，$\boldsymbol{M}^3=\boldsymbol{MMM}$，等等.

一般地，
$$\boldsymbol{M}^n=\underbrace{\boldsymbol{MM}\cdots\boldsymbol{M}}_{n\text{个}};$$

显然，$\boldsymbol{M}^n$ 仍是一个二阶方阵，它表示 n 个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的乘积，通常称为 **$\boldsymbol{M}$ 的 n 次幂**. 几何上，$\boldsymbol{M}^n$ 表示连续实施 n 次矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换.

例　计算下列各矩阵乘积，并说明(1)式运算结果的几何意义.

(1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&s\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}^3$.

解　(1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0\times1+1\times0&0\times k+1\times1\\1\times1+0\times0&1\times k+0\times1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\times0+1\times1&0\times1+1\times0\\1\times0+k\times1&1\times1+k\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix};$$

(2) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&s\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&k\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&s\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}k&0\\0&s\end{pmatrix};$$

(3) $\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3k\\0&1\end{pmatrix}.$$

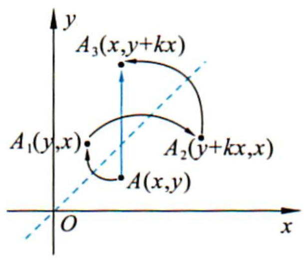


图 3-3

下面，对(1)，我们给出这些变换合成的几何意义，如图 3-3.

从图中很容易看出(不妨设 $k>0$)：

矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 把点 $A(x,y)$ 以直线 $y=x$ 为对称轴，反射到其对称点 $A_1(y,x)$；

矩阵 $\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$ 把点 $A_1(y,x)$，向 x 轴正向切变到像点 $A_2(y+kx,x)$；

矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 把点 $A_2(y+kx,x)$ 以直线 $y=x$ 为对称轴，反射到对

称点$A_3(x,y+kx)$.

这样连续三次变换的结果与用矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}$直接把$A(x,y)$,向$y$轴正向切变到$A_3(x,y+kx)$是一致的.

简单地说就是:先以直线$y=x$为轴反射,再沿x轴作切变,最后再以直线$y=x$为轴反射回来,与直接沿y轴作切变是一致的.

思考交流

仿照对例题中(1)几何意义的讨论,画图,并讨论(2)(3)的几何意义.

下面我们讨论,两个矩阵的乘法是否满足交换律呢?即给定矩阵$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$,是否有$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$成立呢?

实例分析

考查矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$和$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{M}$表示向$x$轴压缩为一半的变换,矩阵$\boldsymbol{N}$表示逆时针旋转$90^\circ$的变换.

正方形$ABCO$的顶点分别为$A(1,0)$,$B(1,1)$,$C(0,1)$,$O(0,0)$,如果对正方形实施矩阵$\boldsymbol{MN}$表示的变换,即先实施旋转变换$\boldsymbol{N}$,再实施压缩变换$\boldsymbol{M}$,则变换结果如图 3-4 所示.

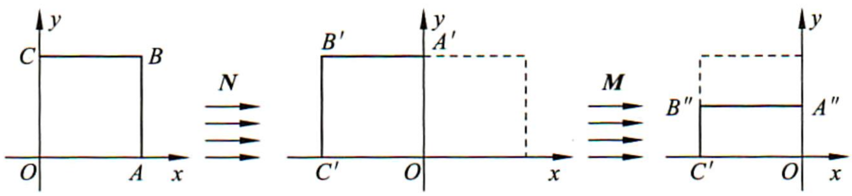


图 3-4

但如果对正方形实施矩阵$\boldsymbol{NM}$表示的变换,即先实施压缩变换$\boldsymbol{M}$,再实施旋转变换$\boldsymbol{N}$,则变换结果如图 3-5 所示.

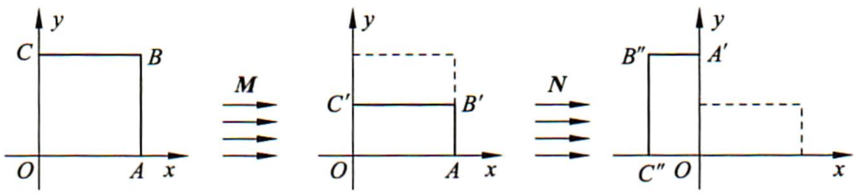


图 3-5

由图 3-4 和图 3-5 可知，$\boldsymbol{MN}$ 和 $\boldsymbol{NM}$ 表示的不是同一个变换.

事实上，根据矩阵乘法的定义，

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

显然 $$\boldsymbol{MN}\neq\boldsymbol{NM}.$$

信息技术建议

应用信息技术可以更方便地演示矩阵乘法不满足交换律.

具体方法可以参看本节后面的“信息技术应用”.

抽象概括

从上面的例子，我们可以得到：

矩阵的乘法不满足交换律.

即存在一些矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$. 故而，在连续实施一系列矩阵变换时，不能轻易改变实施矩阵变换的顺序. 矩阵乘法运算不同于以前学过的实数的加法、乘法，代数式的加法、乘法，向量的加法，等等. 它是我们见到的第一个不满足交换律的运算.

当然，对一些特殊矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$，可以有 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$，例如，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 都是旋转矩阵时，乘法可以交换顺序. 还可以举出其他的一些例子. 特别地，单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 和零矩阵 $\boldsymbol{0}$. 对任何二阶方阵 $\boldsymbol{A}$，总有

$$\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{0A}=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}.$$

矩阵乘法不仅不满足交换律，而且也不满足消去律.

在实数的乘法中，若数 a，b，c，使 $ca=cb$，且 $c\neq0$，则一定有 $a=b$.

这一运算律在矩阵的乘法中却不一定成立，即对矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{P}$，若 $\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$，且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，不一定有 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$.

例如，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 是两个不同的矩阵，对任意点 (x,y)，由

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix},$$

可知，矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$ 把点 (x,y) 分别变成点 $(-x,y)$ 和点 $(-x,-y)$.

矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴上的投影变换，则

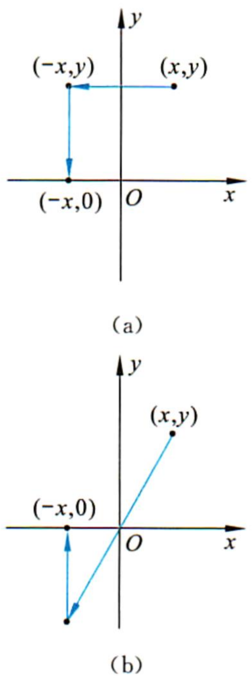


图 3-6

$$(\boldsymbol{PM})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\0\end{bmatrix},$$
$$(\boldsymbol{PN})\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{N}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\0\end{bmatrix}.$$

这表明，对任意点(x, y)，矩阵 $\boldsymbol{PM}$ 和 $\boldsymbol{PN}$ 都把它变成了点$(-x,0)$. 如图 3-6 所示.

由矩阵乘法，

$$\boldsymbol{PM}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{PN}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

也就是说，对矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$ 有 $\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但显然，$\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$.

事实上，在数的乘法中，若数 a,b，使 $ab=0$，则 a,b 中至少有一个为零，即有 $a=0$ 或 $b=0$. 但在矩阵乘法中却不然. 若 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{0}$，可能有 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$. 例如，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 把点垂直投影到 x 轴上，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 把点垂直投影到 y 轴上，有

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

即 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{0}$，但显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$，这一点与数的乘法不同. 由此亦可说明矩阵乘法中消去律不成立.

信息技术应用

利用几何画板演示矩阵乘法不满足交换律

步骤：

1. 仿照反射变换中“信息技术应用”的步骤 1 在新建画板中构造正方形 $ABCO$ 上一点 $P(x,y)$，如图 3-7 所示.

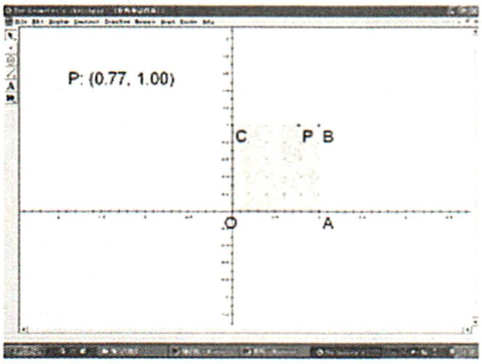


图 3-7

2. 分别构造正方形 $ABCO$ 先被矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 作用，再被矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 作用得到的图形，如图 3-8 所示.

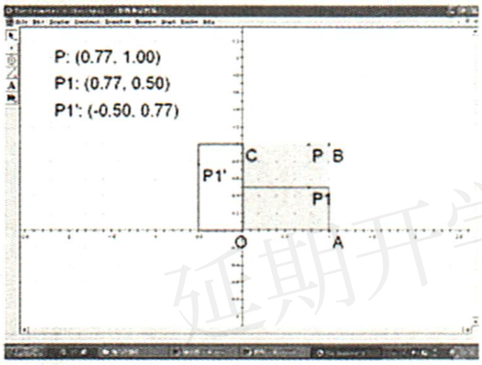


图 3-8

3. 分别构造正方形 $ABCO$ 先被矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 作用，再被矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 作用得到的图形，如图 3-9 所示.

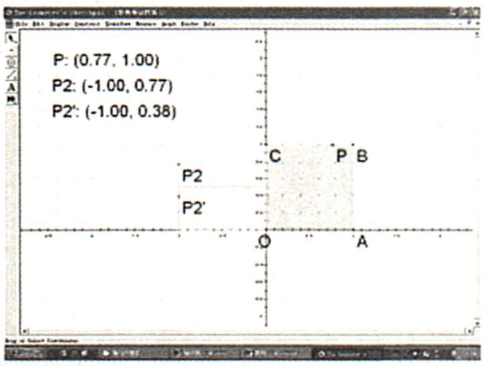


图 3-9

经过以上步骤，比较两次变换结果，并拖动点 P（在正方形 $ABCO$ 上运动）观察比较各个像点，如图 3-10 所示.

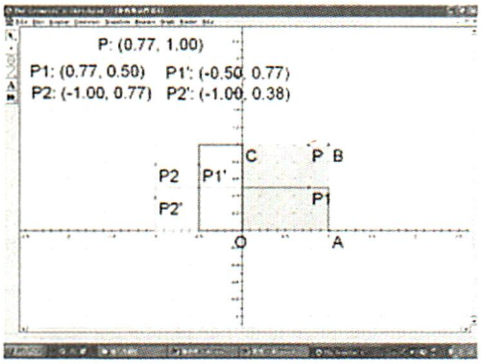


图 3-10

练　习　1

计算并验证下列事实，并从几何上给出解释.

(1) 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$，验证 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{0}$.

(2) 给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{I}$，验证 $\boldsymbol{M}^2=\boldsymbol{M}$.

上述情况表明，矩阵乘法与数的乘法有何不同？

习　题　3—2

A　组

1. 说明矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 所表示的几何变换，并从几何上说明不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$，再加以计算验证.

2. 下面算式都表明：$\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{PN}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. 下面等式都表明：$\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{NP}$ 且 $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{N}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

4. 证明矩阵乘法满足结合律，即对任意矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$，

$$(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NP}).$$

5. 验证下列等式，并说明其几何意义.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. 计算下列矩阵的幂：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^4$；　(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^8$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^n$.

7. 下面等式都表明：$\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{0}$. 请通过计算验证这个结果，并从几何上给予解释.

(1) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

B　组

归纳整理本节内容，并说明矩阵乘法与数的乘法在运算性质上有哪些异同点.

复 习 题 三

A　组

1. 计算下列矩阵乘积：

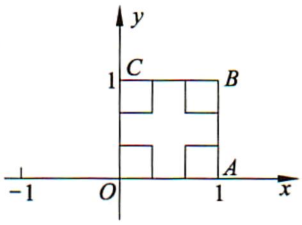
(1) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}^3$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.

(1)利用 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$，$\boldsymbol{M}_3$ 变换的几何意义，说明图中正方形 $ABCO$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下的变换结果；

(2)计算出矩阵 $\boldsymbol{M}$，并验证上述变换结果.



（第 2 题）

3. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(1)验证 $(\boldsymbol{MN})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{N\alpha})$，$(\boldsymbol{NM})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{M\alpha})$；

(2)验证这两个矩阵不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$.

4. 验证下列等式，并从几何上给予解释：

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

(6) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5. 求使下列算式成立的实数 a,b,c,d.

(1) $\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}a&2\\3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&c\\d&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$.

B　组

1. 利用矩阵变换的几何意义，请你构造满足下列条件的矩阵，并给出几何解释：

(1)构造两个矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，它们不满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}$；

(2)构造两个不同的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，使等式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$成立；

(3)构造两个不同的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，使等式 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{B}$ 成立；

(4)构造两个矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均不为零矩阵)，使 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$成立；

(5)构造一个矩阵 $\boldsymbol{M}$($\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{0}$)，使 $\boldsymbol{M}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$成立；

(6)构造一个矩阵 $\boldsymbol{N}$($\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{N}\neq\boldsymbol{I}$)，使 $\boldsymbol{N}^2=\boldsymbol{N}$ 成立.

2. 晴天和阴天的转移矩阵 $\boldsymbol{A}$，及表示今天天气晴、阴的概率 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} & \text{今日} \\ & \begin{array}{cc}\text{晴天} & \text{阴天}\end{array} \\ \text{明日}\begin{array}{c}\text{晴天}\\ \text{阴天}\end{array} & \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{array}{c}\text{晴天}\\ \text{阴天}\end{array}\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{7}{8}\end{pmatrix}.$$

(1)计算矩阵 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，并分别说明 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$ 的实际意义是什么；

(2)请用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示出明天、后天、再后天的天气概率.

第四章　逆变换与逆矩阵

§1　逆变换与逆矩阵

实例分析

问题 1　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 表示按逆时针旋转 90°的变换，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 表示按顺时针旋转 90°的变换.

参看图 4-1，显然，对任何点 P，连续实施这两个变换. P 又回到原来位置.

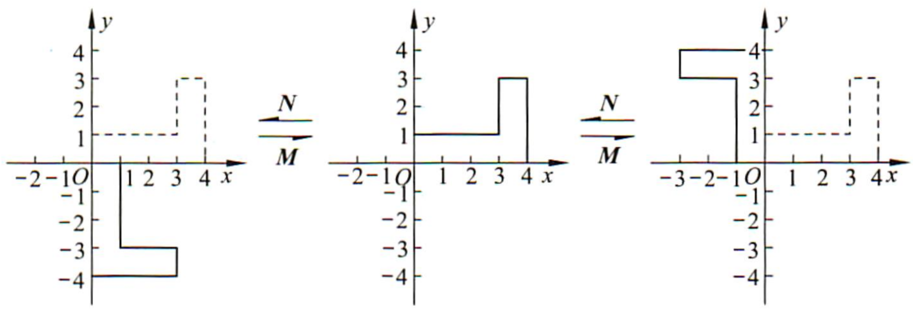


图 4-1

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

即以上的两个矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，满足

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I}.$$

问题 2　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴垂直压缩为 $\frac{1}{2}$ 的变换，矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 表示向 x 轴垂直拉伸为 2 倍的变换.

对任何点 P，连续实施这两个变换，P 点又回到原来的位置（参看图 4-2）.

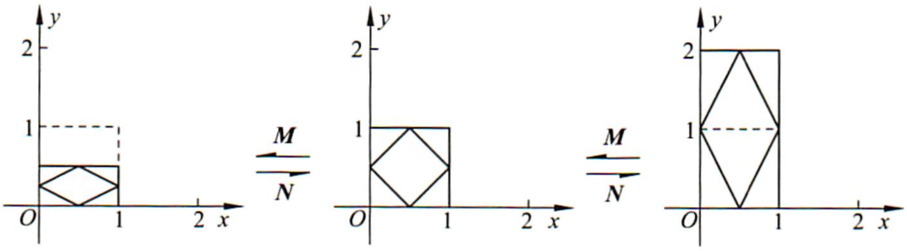


图 4-2

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{NM}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

以上的两个矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，满足 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I}$.

问题 3　我们知道，矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 是关于 x 轴的反射变换，从图 4-3 不难看出，对于任意点 P，连续实施两次 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换，P 点又回到原来的位置.

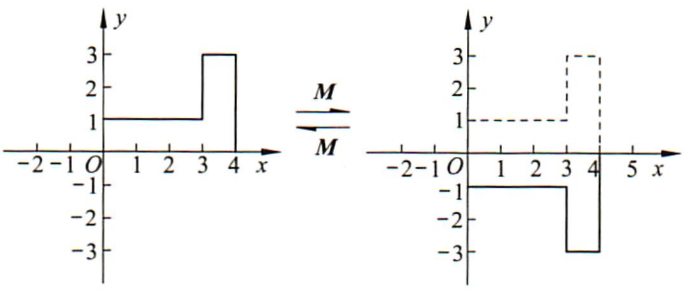


图 4-3

上述过程可以用矩阵乘法表示为

$$\boldsymbol{MM}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}.$$

即
$$MM=I.$$

抽象概括

一般地，若两个矩阵 M,N，满足
$$MN=NM=I, \tag{4.1}$$
则称矩阵 N 是矩阵 M 的**逆矩阵**，记作 $N=M^{-1}$. 同样，矩阵 M 也是矩阵 N 的逆矩阵，即 $M=N^{-1}$. 有时也称 M 与 N 互为逆矩阵.

根据上面对几个问题的分析，我们知道

矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 互为逆矩阵；

矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 也互为逆矩阵；

而矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 自己是自己的逆矩阵.

$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 分别表示关于 y 轴和直线 $y=x$ 的反射变换. 不难看出

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 都是自己的逆矩阵. 实际上，所有的反射变换矩阵都是自己的逆矩阵.

但也有一些矩阵不存在逆矩阵，如投影变换矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 等，它们都把某些直线上无数个点变成同一个点，不可能存在一个矩阵把一个点变回成无数个点.

这样，如果矩阵 M 存在逆矩阵，我们称矩阵 M 是一个**可逆矩阵**，如果矩阵 M 不存在逆矩阵，我们称它为**不可逆矩阵**.

例 1　从几何上，给出下列矩阵的逆矩阵，并用定义进行验证.

(1) $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(k>0)$；　　　　(2) $\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$.

解　(1)由于矩阵 $\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(k>0)$ 表示向 y 轴的垂直压伸变换，它把

平面上每个点 $P(x,y)$的横坐标变为原来的 k 倍，纵坐标不变，点 P 变成像点 $P'(kx,y)$. 要把这些点再变回原来的位置 $P(x,y)$，只需纵坐标不变，把横坐标变为原来的$\frac{1}{k}$倍. 矩阵$\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k>0)$表示这一变换，这样我们就从几何上给出了矩阵$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k>0)$的逆矩阵$\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k>0)$.

事实上，由
$$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$
和
$$\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$$
知，$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k>0)$的逆矩阵是$\begin{bmatrix}\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k>0)$.

(2)矩阵$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$表示沿 x 轴方向的切变，它把平面上每个点$P(x,y)$的横坐标加上了纵坐标的 k 倍，纵坐标不变，点 P 变成像点$P'(x+ky,y)$. 要把这些点再变回原来的位置 $P(x,y)$，只需保持纵坐标不变，把横坐标加上纵坐标的$(-k)$倍. 矩阵$\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$表示这一变换，这样我们就从几何上给出了矩阵$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$的逆矩阵$\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$.

由
$$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times k & 1\times(-k)+k\times1\\ 0\times1+1\times0 & 0\times(-k)+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I},$$
且
$$\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+(-k)\times0 & 1\times k+(-k)\times1\\ 0\times1+1\times0 & 0\times k+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I},$$
所以$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$的逆矩阵是$\begin{bmatrix}1 & -k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$(k\neq 0)$.

反射变换、压伸变换、切变等是最基本的几何变换，通常称为**初等变换**. 当 $k\neq 0$ 时，表示这些变换的矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}k&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\k&1\end{pmatrix}$等，称为**初等变换矩阵**.

根据前面的一些例题，我们不难发现，初等变换矩阵的逆矩阵仍是初等变换矩阵.

例 2　试证明：可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵唯一.

证明　若矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 都是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵，

则由(4.1)式，有

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=\boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{MP}=\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{I}.$$

在等式　$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{MN}$ 的两边左乘矩阵 $\boldsymbol{P}$，有

$$\boldsymbol{PI}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{MN})=(\boldsymbol{PM})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{IN},$$

即
$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}.$$

故，可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵唯一.

若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，则矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 也存在逆矩阵，且有 $(\boldsymbol{M}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{M}$.

特别地，单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{I}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 而零矩阵 $\boldsymbol{0}$ 是不可逆矩阵.

我们不难证明，在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的作用下，平面上不同向量（或点）的像必不同.

而把平面上不同的两个向量（或点）变成相同向量（或点）的矩阵，没有逆矩阵.

请同学们自己完成以上命题的证明.

问题提出

由于两个二阶方阵的乘积仍是一个二阶方阵. 那么，两个可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的乘积 $\boldsymbol{MN}$ 是否仍可逆？如果矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 有逆矩阵，它的逆矩阵 $(\boldsymbol{MN})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 有何关系？

分析理解

我们仍然先从几何上分析思考上述问题. 假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示旋转

变换，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 表示压缩变换，矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 表示先压缩再旋转的变换，那么，其逆变换应该是先旋转回来，即作矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 表示的变换，再拉伸，即作矩阵 $\boldsymbol{N}^{-1}$ 表示的变换，才能回到原状，参看图 4-4.

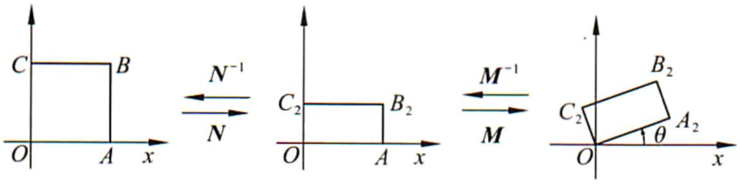


图 4-4

这好比日常生活中，先脱鞋再脱袜子的逆过程是先穿袜子再穿鞋.

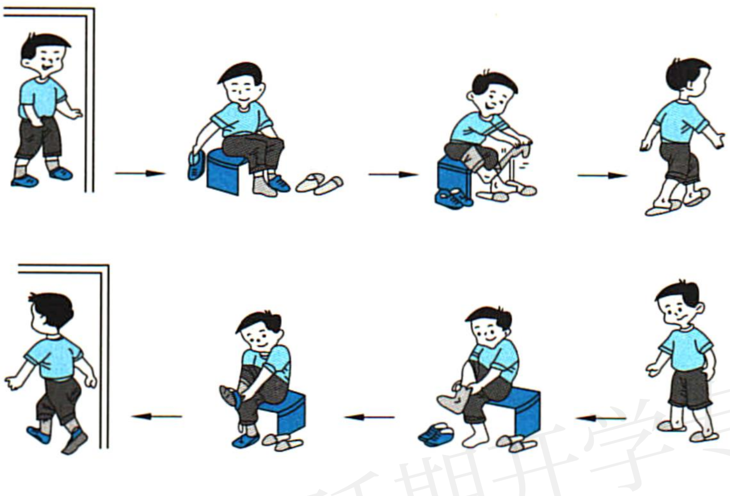


图 4-5

由此猜想，矩阵 $\boldsymbol{MN}$ 的逆矩阵应该是 $\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}$. 下面我们证明这一猜想.

根据矩阵乘法满足结合律，可知

$$(\boldsymbol{MN})(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{NN}^{-1})\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{MIM}^{-1}=\boldsymbol{MM}^{-1}=\boldsymbol{I},$$

$$(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})(\boldsymbol{MN})=\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{IN}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{I},$$

即满足 $$(\boldsymbol{MN})(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})=(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1})(\boldsymbol{MN})=\boldsymbol{I}.$$

由逆矩阵的定义，有

$$(\boldsymbol{MN})^{-1}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}.$$

这一结论可以推广到多个矩阵乘积的情形. 例如，若矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 的逆矩阵分别为 $\boldsymbol{M}^{-1},\boldsymbol{N}^{-1},\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Q}^{-1}$，则乘积 $\boldsymbol{MNPQ}$ 也有逆矩阵，且$(\boldsymbol{MNPQ})^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}$.

不难想像，若矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 中有一个把某些直线上的所有点变成了一个点，不存在逆矩阵，则乘积 $\boldsymbol{MN}$ 也不存在逆矩阵. 例如，投影变换矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$是不可逆矩阵，它与反射矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$的乘积 $\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$仍是投影变换矩阵，不存在逆矩阵.

严格的证明这里略去.

习题 4—1

A　组

1. 从几何上考虑下列矩阵表示的变换是否存在逆变换，如果存在，试给出其逆矩阵，并用定义(4.1)式验证：

(1) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$；　(5) $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

2. 从几何上体会，投影变换矩阵，如 $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ 等不存在逆矩阵. 请再给一些不存在逆矩阵的矩阵.

3. 若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{M}^{-1}$，试证明，矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 也存在逆矩阵，且 $(\boldsymbol{M}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{M}$.

4. 从几何上考虑下列乘积矩阵是否有逆矩阵. 如果存在，试给出其逆矩阵，并验证.

(1) $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

B　组

给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$，试证明：

(1)若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是可逆矩阵，则必有 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$；

(2)若 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta}$，则矩阵 $\boldsymbol{M}$ 必是不可逆矩阵.

并思考这一结论的几何意义.

§2 初等变换与逆矩阵

问题提出

前面，我们已经知道了如何从几何上求初等变换矩阵的逆矩阵.

对一般的矩阵，如何从几何上求出它的逆矩阵呢？

这一节我们将通过对具体实例的分析，体会用几何方法求矩阵的逆矩阵.

实例分析

给定矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，它把平面上的一点变为另一点.

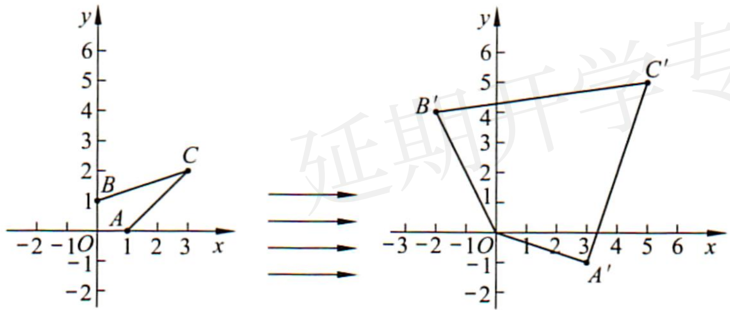


图 4-6

如图 4-6，它把

点 $A(1,0)$ 变成 $A'(3,-1)$；

点 $B(0,1)$ 变成 $B'(-2,4)$；

点 $C(3,2)$ 变成 $C'(5,5)$.

即把四边形 $AOBC$ 变成另一个四边形 $A'OB'C'$.

我们如何从几何上求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵呢？

求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵，从几何上，就是确定一个矩阵变换，它把

点 $A'(3,-1)$ 变回到点 $A(1,0)$；

点 $B'(-2,4)$ 变回到点 $B(0,1)$；

点 $C'(5,5)$ 变回到点 $C(3,2)$.

首先，我们确定一个矩阵变换，使得 $A'(3,-1)$ 变回到 $A(1,0)$.

观察图 4-6 中的点 A' 与 A 的位置及坐标关系，联想初等变换，我们发现，可以通过两步初等变换实现把点 A' 变回到 A.

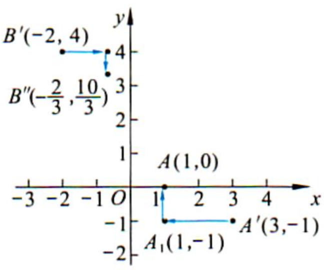


图 4-7

第一步，只需把点 $A'(3,-1)$ 垂直向 y 轴方向压缩为 $\frac{1}{3}$ 即可使 A' 变成 $A_1(1,-1)$；

第二步，实施沿 y 轴正方向的切变即可把点 $A_1(1,-1)$ 变到点 $A(1,0)$. 如图 4-7 所示.

矩阵 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 分别表示以上第一步和第二步的变换. 即

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}.$$

连续实施 $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$ 表示的变换即实施矩阵 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 表示的变换，可以把点 A' 变回点 A.

这时，点 B' 也在 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 的作用下，变成了点 B''.

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}_2\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_2\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}=\overrightarrow{OB''}.$$

即当实施 $\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 表示的变换时，点 $B'(-2,4)$ 变成了点 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$，如图 4-7 所示.

接下来，我们要确定一个矩阵变换，使得 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ 变回到 $B(0,1)$，同时，点 $A(1,0)$ 保持不变.

由于点 A 在 x 轴上，因此向 x 轴的垂直压伸变换 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}(k>0)$，沿 x 轴的切变 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$ 均能保证点 A 不变. 因此，我们用这样的初等变换把点 B'' 变回到 B. 可以通过两步完成.

第三步，利用向 x 轴的垂直压缩变换把 $B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ 的纵坐标变为 1，即实施矩阵 $\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$ 表示的变换，把 B'' 变成 $B_1\left(-\frac{2}{3},1\right)$；

第四步，用沿 x 轴正向的切变 $\boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 把点 B_1 变成 $B(0,1)$，如图 4-8 所示.

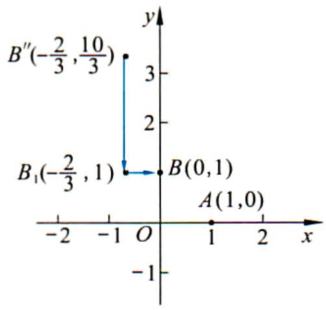


图 4-8

连续实施 $\boldsymbol{M}_3$ 和 $\boldsymbol{M}_4$ 表示的变换，即实施 $\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3$ 表示的变换，由

$$\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\,\overrightarrow{OB''}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}_4\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_4\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\overrightarrow{OB},$$

$$\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\,\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}_4\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{M}_4\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}.$$

可知，$B''\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$变回到点 $B(0,1)$，与此同时点 $A(1,0)$没变.

这样，我们找到了四个初等变换矩阵 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{M}_3,\boldsymbol{M}_4$. 依次连续实施这四个初等变换，把点 $A'(3,-1)$及 $B'(-2,4)$，分别变回了点 $A(1,0)$，$B(0,1)$. 即矩阵 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$，使得

$$\boldsymbol{N}\,\overrightarrow{OA'}=\boldsymbol{NM}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA},$$

$$\boldsymbol{N}\,\overrightarrow{OB'}=\boldsymbol{NM}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\overrightarrow{OB}.$$

由于 $\qquad\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$

而 $\qquad\overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=3\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)+2\left(\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right),$

故 $\qquad\boldsymbol{N}\,\overrightarrow{OC'}=\boldsymbol{NM}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=3\left(\boldsymbol{NM}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)+2\left(\boldsymbol{NM}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$

$$=3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\overrightarrow{OC}.$$

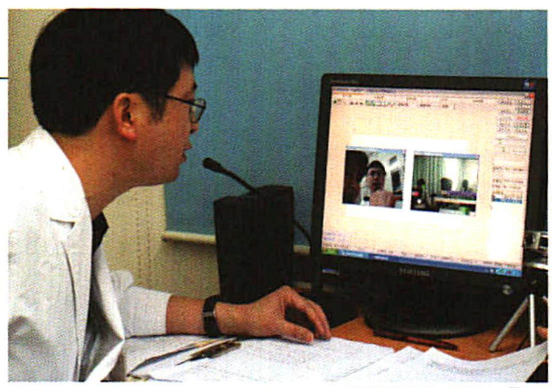
也就是，依上述方法构造的矩阵 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 在把点 A'变回点 A，点 B'变回点 B 的同时，也把点 $C'(5,5)$变回到点 $C(3,2)$.

事实上，对任何向量 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，不难验证

3 网络的伦理困惑

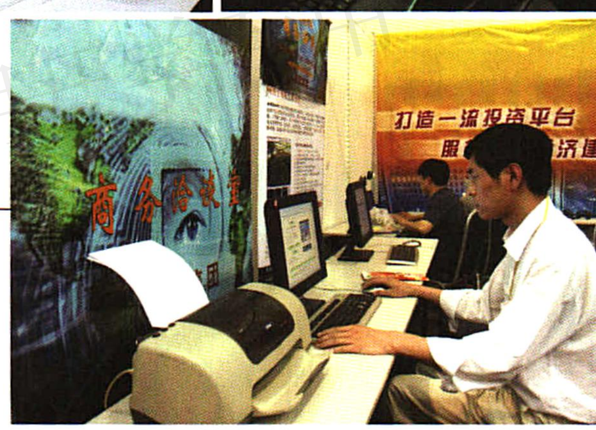
走进虚拟世界

2008年汶川地震发生后，上海开辟医疗救援“第二战场”，对伤员进行远程会诊。



通过互联网的可视通话，可省去探访的旅途劳顿。

2016年，中国电子商务市场交易规模突破20万亿元人民币。



说说网络给我们的生活带来了哪些变化。

网络改变着生活、改变着世界，缩短了人们的空间距离。网络已把世界连接在一起，使人们足不出户就能知晓天下大事，坐在电脑旁便可完成生活交往中的许多活动。学习、休闲、娱乐、交流、购物、科学研究、商业往来等日常生活和工作，都可以通过网络进行。网络迅捷地汇集、传递各种社会信息资源，极大地方便了人们的工作和生活，节约了社会交往的成本。

网络世界仿佛是另一个社会，被称为虚拟社会。但这个虚拟社会又实实在在地存在于人们的生活之中，对人们的生活产生着难以估量的影响。这正是网络世界的神奇之处。与现实社会生活相比较，网络世界有其显著的特性。

网络具有参与的随意性。人们可以随时进入网络世界，也可以随时退出。是否从事网络活动，成为网络世界的一员，完全取决于个人的意志。这同现实社会生活的不可脱离性，有显著区别。

网络角色具有可变换性。现实社会中，人们的社会角色是确定的，不易更改。作为网络角色，其身份具有不确定性。参与者可以虚拟性别、年龄、身份、国籍等一切个人资料，在一种虚拟状态下完成其社会交往活动。

相关链接

在网络交往中，活生生的人退到了网络终端背后，表现出来的只是符号。一个人在现实交往中难以隐瞒自己的性别、年龄等，但在网络交往中则不然。自称妙龄少女的人可能是黑面大汉，而自称李逵者则可能是位青春少女。这就是说，网民可以虚拟一个社会角色。当然，人们如果在计算机上安装摄像头，也可以进行现实的声像交流。

网络交往具有一定的虚幻性。网络参与的随意性和网络角色的可变换性，使人们可以在网络上进行跨国界、跨时空的交往，而这在现实社会中是不可能的。但随之而来的是，网络世界中信息的真实可靠性难以把握，这又使网络交往呈现出虚幻的一面。此外，受社会成本与技术条件等因素的制约，网络交往的责任追究难度较大，网络义务易于逃避。这种网络信息与现实社会信息在真实性上的反差，也是网络世界被认为是虚拟社会的一个重要原因。

网络带来的伦理挑战

网络技术的发展极大地提高了人类改造自然、改造社会的能力，同时网络技术的运用所带来的问题也越来越突出。这些问题，涉及国家安全、社会管理、商业秘密、个人隐私的保护等，日益引起人们的高度关注。

◇ 2010年初，网络盛传某省将要发生大地震的谣言，使几十个县市的数百万群众露宿街头“躲避地震”，公众产生心理恐慌，正常的学习、工作、生活受到干扰。

◇ 某网络平台发表文章称，疫苗损害人体健康，危害无穷，孩子自然感染疾病都比打疫苗强，家长要让孩子远离疫苗。这一消息在网络上引起轩然大波。事实上，疫苗是预防和控制传染病最经济、有效的公共卫生干预措施，也是减少疾病发生、降低医疗费用的有效手段。

网络使人们获取信息更为方便、快捷的同时，也给社会管理、国家安全和人们的生活增添了烦恼。你有这方面的感受或见闻吗？请用事例说明。

网络安全问题。例如，有人通过网络窃取、挪用、移植、复制他人的程序和其他信息，严重损害了产权所有人的权利和利益，造成侵权；有人利用网络修改、破坏他人计算机里的信息，制造、传播计算机病毒，致使他人的计算机无法工作、丢失信息资料、损坏计算机硬盘；更有人利用网络修改银行账户、盗取银行存款、设计诱骗软件，非法谋取他人财产。

网络自由的滥用问题。例如，有人在网上制造信息垃圾或利用电子邮件做商业广告，不仅占用网络资源，而且使真正有用的信息难以传递；有人利用网络制造和传播谣言，宣传封建迷信，进行人身攻击，欺骗玩弄他人情感；还有人任意传播和接收黄色信息，造成黄色信息泛滥，危害人们特别是青少年的身心健康。

相关链接

网上的信息良莠不齐，一些网络信息和网络游戏充斥着色情与暴力，致使青少年中有的人情感冷漠，暴力倾向增强；有的人沉溺于网络，影响学习；有的人随意约会网友，上当受骗。这些都给青少年的身心造成了严重的伤害。

隐私权的保护问题。任何人都有不愿告知他人的秘密，保护个人的隐私已得到各国法律的认可。但网络的普及使黑客们如入无人之境，随意浏览他人的个人资料。更有一些个人和组织利用网络窃取、买卖他人信息，乃至监控他人行为，侵犯个人隐私权，极大地损害了他人的身心健康。

专家点评

网络有虚拟性的一面，但人永远是真实的。虚拟世界中也应该有真实的规则，网络的虚拟性是考察个人慎独品性的一块试金石。

如果说网络世界是一个虚拟的社会，那么规范这个虚拟社会的秩序，单靠网络技术本身是难以奏效的。在虚拟状态下，现实的道德规范是否仍然有效？道德规范的要求如何与网络的虚拟性相协调？这就是网络伦理所面对的问题。

探寻网络伦理

网络生活中的不文明行为，败坏社会道德，引发犯罪，损害其他用户的权利，对网络的健康发展造成威胁。为维护网络安全，保护网民的权益，世界各国政府与组织纷纷订立相关法律和自律守则。

相关链接

多年来，我国为加强互联网管理，规范互联网秩序，相继出台了一系列法律、法规和规章，对促进互联网健康发展起到了积极作用。但一些不法分子利用互联网等信息网络的特点，将信息网络作为新的犯罪平台，恣意实施诽谤、寻衅滋事、敲诈勒索、非法经营等犯罪。2016年11月7日，中华人民共和国第十二届全国人民代表大会常务委员会第二十四次会议通过的《中华人民共和国网络安全法》，使我国网络安全工作有了基础性的法律框架，网络活动有了更多的法律约束。

解决网络生活中的问题，在依靠法律和行政手段的同时，还必须倚重伦理道德的力量，促使网民和网络服务的提供者、管理者自觉遵守一些具体行为规范。针对整日沉溺于网络生活的现象，要提醒网民多与家人、师友、同事、公众直接交往和交流；针对匿名性造成的问题，要告诫网民提高辨析能力，并注意讲文明、讲诚信；针对不健康信息的传播，要强调自爱自律，自觉抵制诱惑；针对个人隐私面临的威胁，要敦促网络服务的提供者、管理者，严守尊重客户隐私权的规范；针对网络安全问题，既要增强网民的防范意识，又要增强计算机程序设计者的道德责任感。

> *网络安全为人民，网络安全靠人民，维护网络安全是全社会共同责任，需要政府、企业、社会组织、广大网民共同参与，共筑网络安全防线。*
>
> ——习近平

网友倡议的相关社交平台使用准则：

◇ 只发布正能量信息；
◇ 看到不真实的信息要设法纠正；
◇ 不连续发布大量未经精选的信息；
◇ 不在短时间内重复发同一条信息；
◇ 不给不熟悉的朋友一对一地发广告；
◇ 不在朋友圈里面指责、谩骂；
◇ 转发原创作品时保留署名和尊重原文；
◇ ……

● 你怎么看待网友的倡议，你觉得使用社交平台时还应注意什么？

总之，尊重他人知识产权，保护公民个人隐私，维护网络安全，不得伤害他人和有损于社会，不利用网络非法谋取不正当商业利益等，都应该成为网络世界的伦理原则。

4 科技事业与人类福祉

科学家的伦理宣言

科学家对其研究是否负有道德责任，历来有两种不同的观点。

观点一

科学家从事科研活动的唯一目的是创造科技成果，至于这一成果是有益于人类还是有损于人类，完全取决于社会的选择。

观点二

科学家从事科研活动的根本目的是造福全人类，对于科学研究的方向和科技成果的运用，负有不可推卸的道德责任。

美国氢弹之父泰勒认为，科学家的研究只能是为了了解自然，不应该考虑是否对人类有益或有害，不能因为科学可能被滥用而停止思考。他说：“科学上能做到的，就应该去做。”

- 你认为泰勒对科学的看法属于哪种观点？
- 你赞成哪种观点？说说自己的理由。

科技工作者是科技活动的直接参与者，是科技成果的主要创造者，他们比任何人更能预见科技成果可能带来的社会后果。所以，对于科技事业的发展方向和科技成果的应用，科技工作者比其他人负有更大的社会责任。

◇ 在第二次世界大战中，纳粹德国加紧研制原子弹。为阻止纳粹的暴行，爱因斯坦召集众多科学家，积极帮助美国赶在德国之前研制出了原子弹。随着法西斯的崩溃，爱因斯坦认为会伤害太多的无辜者的核武器已经不再需要了。直到去世之前，他都利用一切机会呼吁美国不要把科学的发现变成杀人武器，号召全世界科学家团结起来反对核战争。

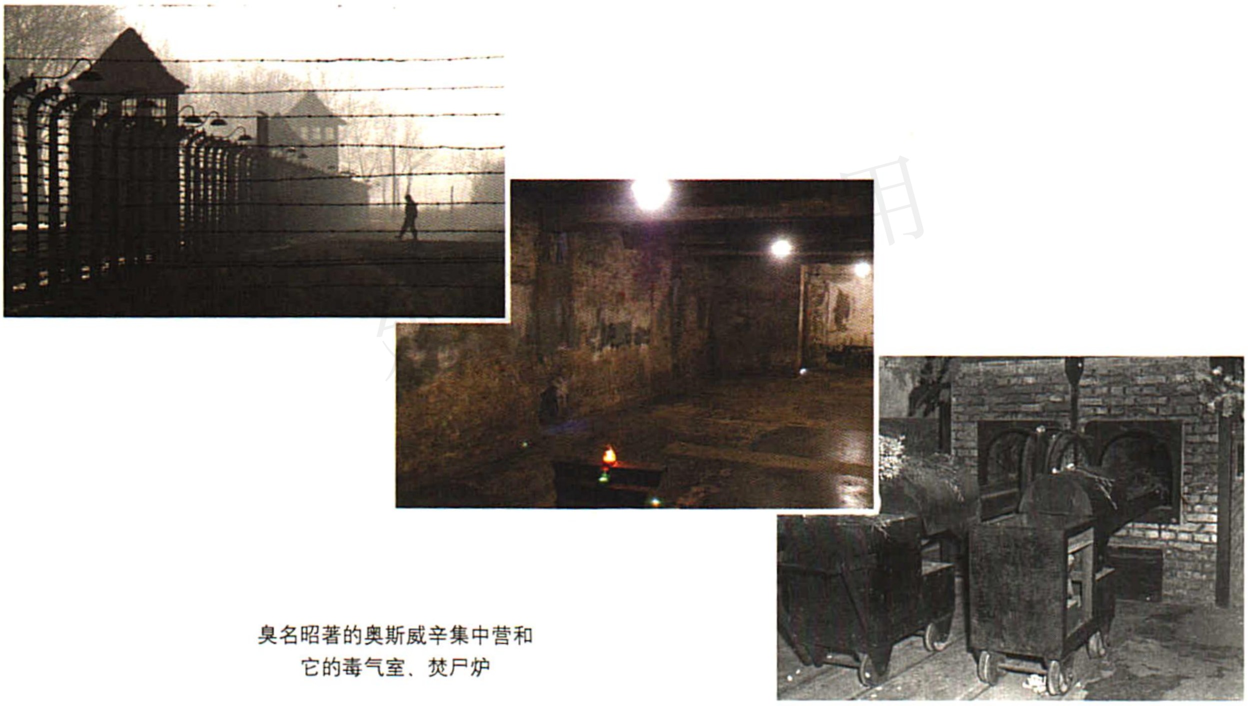
◇ 1946年，包括中国在内的14个国家的科学工作者协会的代表在伦敦举行首次会议，成立了世界科学工作者协会，初步制定了科技工作者的道德规范。1948年，首届代表大会通过《科学工作者宪章》，对科学工作者个人和集团应负的责任作出明确规定。

- 想一想：核技术研究有什么作用？对其进行伦理规范有何意义？
- 议一议：制定《科学工作者宪章》的意义何在？

世界科学工作者协会制定的《科学工作者宪章》规定了科学家的一些义务。例如，要保持诚实、高尚、协作的精神；要严格检查自己所从事工作的目的和意义，受雇时必须了解工作的目的，弄清有关的道义问题；要尽可能地发挥科学家的影响以防误用科学技术，用最有益于全人类的方法促进科学的发展；要在科学研究的目的、方法和精神上协助国民教育，不要使其拖累科学的发展；要促进国际科学合作，为维护世界和平作出贡献；要重视和发展科学技术所具有的人性价值；等等。

相关链接

德国犹太科学家、诺贝尔化学奖获得者哈伯发明了氨合成法。氨肥的使用，极大地提高了农作物的产量。但是，他在第一次世界大战中把自己所领导的实验室变成军事机构，将科研成果用于制造化学武器，这些化学武器给人类造成了极大的灾难。在第二次世界大战中，纳粹德国实施了灭绝犹太人的计划，在集中营用毒气残忍杀害犹太人。具有悲剧性意味的是，哈伯的好几位亲人也被毒死，而纳粹所使用的化学毒剂中就有哈伯的发明。



臭名昭著的奥斯威辛集中营和它的毒气室、焚尸炉

构筑科技进步的道德轨道

国际医学科学组织委员会明确要求：所有涉及人类受试者研究的建议，必须递交给一个或多个科学和伦理学评审委员会，由他们对其科学价值和伦理学的可接受程度进行审查，在进行研究之前必须获得批准。

对这一要求，有两种不同的观点。

观点一

科技组织设立伦理学评审委员会，对科技活动的立项、过程及其结果进行伦理监督，很有必要，既合乎常理，又体现了现代科技发展的特点。

观点二

对科学进行伦理学评审，就是给科学设禁区，意味着为科学研究设置障碍，有悖于科技发展的自身规律。

- 你赞同哪种观点？说说自己的理由。

科技成果层出不穷，而道德观念相对稳定，这使人们常常面临两难选择。一方面，一些可能产生深远影响的新科技，在运用中会带来各种伦理问题；另一方面，如果禁止这些新科技，则可能丧失发展的机遇。为了使科技成果的运用始终符合人类福祉，构筑科技进步的道德轨道，需要确立现代科技伦理的基本原则。

专家点评

为了使现代科技服务于人，有必要在科技与伦理之间建立一种缓冲机制。一方面，社会公众对当代科技活动及其成果运用涉及的伦理问题应当进行广泛的讨论，对伦理上可接受的条件形成一定的共识；另一方面，科技工作者和管理决策者应负责地向公众揭示当代科技活动及其成果运用的潜在风险，并自觉用伦理价值和伦理精神制约科研活动。

例如，科技工作者要深刻理解科技工作的意义，将对自然奥秘的探索与人类的福祉相结合。科技工作者在努力掌握专业技能的同时，更应该使自己成为一个热爱人民、为社会谋福利的创造者。科技的社会作用越大，科技工作者的社会责任越大。

再如，科技成果的运用，不能只顾眼前利益、局部利益。运用科技成果，应当既能带来眼前利益又能带来长远利益，有时为了长远利益还要牺牲一点儿眼前利益。如果背离了这一伦理原则，就可能导致人类的灾难。

又如，任何科技活动都必须遵守无害原则，即无损于自然环境和人类的存在与发展。不能损害人，是科技活动最起码的道德要求。科学研究和应用的每一环节，都应该慎思慎行，坚持这一原则。

弘扬科学精神　造福人类社会

科学精神是科技伦理的核心内容，科技工作者在科技活动中应当自觉弘扬科学精神。

在价值观上，科技工作者的科学精神体现为热爱祖国、热爱人民、奉献社会的博大情怀和崇高情操。科学没有国界，但科学家有祖国；科学研究没有禁区，但科学家有社会责任。

相关链接

1955年4月，伟大的物理学家爱因斯坦在即将离开人世之前，同哲学家罗素联合发表了《罗素—爱因斯坦宣言》，提出科学界应积极关心科学研究成果给人类带来的危险。1957年，根据这个宣言，10个国家的22位著名科学家在加拿大的帕格沃什镇召开了一次会议，即科学与世界事务会议。会后发表了《帕格沃什宣言》，探讨科学家的行为准则，并把维护世界和平列为科学家的第一责任，由此掀起了一场由科学家参与国际政治的著名的帕格沃什运动。

在思维方式上，科技工作者的科学精神体现在科技活动中探索、怀疑、实证、理性四个不可分割的方面。具有科学精神的思维方式，决不迷信权威，永远以事实为依据。

相关链接

1892年，英国物理学家雷利在测量不同来源的氮气的质量时，发现了一件怪事：从空气中得到的氮气每升质量是1.257 2克，而从氨气分解得到的氮气每升质量为1.250 8克，比空气中的氮气轻了0.006 4克。他抓住这个微小的区别，与化学家拉姆塞一起查阅资料，并用光谱分析，经过多次试验，终于找到一种化学性质很不活泼的新元素“氩”。

在行为准则上，科技工作者的科学精神表现为良好的职业道德。科学研究是一种社会活动，随着科学研究活动的不断深入，科学工作者的分工越来越细，而科学研究的项目则呈现出综合性特征，这就要求科学工作者联合起来，共同完成一项复杂的任务。因此，互相尊重、虚心、谦让、协作等行为准则，成为体现现代科学精神的重要美德。

科学精神的内涵很丰富，最基本的要求是求真务实、开拓创新、为真理而献身。弘扬科学精神，对全民族、全社会思想道德和科学文化素质的提高，具有根本性和基础性的作用。

在科学上没有平坦的大道，只有不畏劳苦沿着陡峭山路攀登的人，才有希望达到光辉的顶点。

——马克思

相关链接

江泽民指出：“弘扬科学精神，就要坚持解放思想、实事求是，勇于面对科技发展和各项工作中的新情况新问题，通过研究和反复实践，不断创新，不断前进；就要热爱科学、崇尚真理，依据科学原理和科学方法进行决策，按照科学规律办事；就要勤于学习、善于思考，努力用科学理论、科学知识

以及人类创造的一切优秀文明成果武装自己；就要甘于奉献、攀登高峰，为祖国为人民贡献一切智慧和力量，敢于战胜前进道路上的任何困难和艰险，始终勇往直前。

习近平指出："具有强烈的爱国情怀，是对我国科技人员第一位的要求。科学没有国界，科学家有祖国。广大科技人员要牢固树立创新科技、服务国家、造福人民的思想，把科技成果应用在实现国家现代化的伟大事业中，把人生理想融入为实现中华民族伟大复兴的中国梦的奋斗中。""科技界要共同努力，树立强烈的创新自信，敢于质疑现有理论，勇于开拓新的方向，不断在攻坚克难中追求卓越。""要大力弘扬'两弹一星'精神和载人'航天精神'，自力更生，勇攀高峰。"

专题活动建议

- *搜集科技活动和科技成果运用影响我们生活的事例（包括物质生活和精神生活两个方面），以"如何正确对待科技活动和科技成果运用"为题，撰写小论文。*
- *走访邻近的医院或相关科研单位，了解生命科学的新进展及相关问题。在此基础上，以"生命科学的宗旨是什么"为题，举办一次研讨会。*
- *搜集科学家成功的事例，共同评选出最具美德的科学家。*

专题五

对环境的伦理关怀

人类改造自然取得了空前成就，但环境污染和生态危机却随之加剧，这已成为当代人必须直面的伦理挑战。当前的环境问题有哪些突出表现？为何会成为全球性问题？面对严峻的环境形势，当代人应该如何进行伦理思考？坚持可持续发展道路的伦理要求和原则是什么？这些都是本专题所要探究的内容。通过学习，我们将深切理解：人与自然和谐共生，是建设美丽中国和构建人类命运共同体的内在要求；实现人与自然和谐共生，是环境伦理的应有之义；建设生态文明，树立尊重自然、顺应自然、保护自然的生态文明理念，是关系人民福祉、关乎民族未来的长远大计，是实现中华民族永续发展的重要保证。

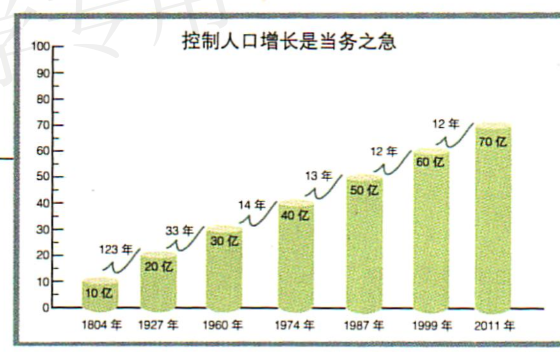
1 现代文明的环境危机

不堪重负的地球

日益严重的空气污染正在威胁着城市居民的健康。

随着城市垃圾数量的不断增加，垃圾包围城市已成为严重的环境灾害之一。

1804年，世界人口为10亿。1987年，世界人口升至50亿。1999年10月12日，我们迎来了“世界60亿人口日”。2013年，联合国最新报告预计，世界人口到2025年将增长至81亿，到2050年世界人口将约为96亿。全球人口的暴增，加剧了人与环境、资源的矛盾。



目前，世界上有60%的国家和地区面临淡水不足的问题。我国人均拥有的淡水量是世界人均拥有量的四分之一，北方地区是八分之一，西北地区是十六分之一。

请你说说身边的环境问题，归纳环境问题的主要表现。

环境污染与生态危机，统称为环境问题。通过电视、广播、报刊、网络等媒体，人们每天都会接触到有关环境问题的报道。环境问题为什么会成为当代人谈论最多的话题之一？这是因为随着世界范围内工业化进程的加快和人口总数的激增，环境污染更加严重，生态危机不断升级。

例如，环境污染区域扩展，当初在西方工业化国家出现的各种污染悲剧，如今在发展中国家普遍发生；资源短缺问题日益凸显，生产生活用水短缺，耕地短缺，能源短缺，矿产资源短缺；人口剧增、对自然环境的过度开发和利用，使得环境负载过于沉重；全球生态系统遭到破坏，致使土地荒漠化、沙漠化，森林大面积消失，物种大量灭绝，生物多样性锐减，全球气候变暖，这些都严重威胁着人类家园的安全。

相关链接

世界约有29%的土地受到沙漠化的威胁，每年约有2 000万公顷土地沙漠化。

对热带雨林的大量砍伐和对海洋渔业资源的过度捕捞，导致大量物种灭绝，生物多样性锐减。据世界自然保护联盟颁布的《濒危物种红皮书》统计，20世纪有110个种和亚种的哺乳动物、130个种和亚种的鸟类灭绝。目前，地球上有10%的物种面临灭绝的危险。

（资料来源：新华社）

环境问题的种种表现说明：人与自然的关系，同人与人的关系、人与社会的关系一样，需要伦理道德来调节。一方面，如果环境继续恶化、资源持续紧张，人与人、人与社会的和谐就难以实现；另一方面，如果人们没有形成正确的价值观、伦理观，就不能科学地认识和调节人与自然的关系。

环境危机的伦理反思

农业文明时期的生活图景

采集狩猎时期的生活图景

工业文明时期的生活图景

人类在采集狩猎时期生活了数百万年，在农业文明时期生活了数千年，在工业文明时期才生活了几百年。

- 为什么工业文明在短短的几百年内就遇到总体性的生态环境危机？
- 人们身边的环境问题，同价值观、伦理观有什么关联？

反思环境恶化的过程，我们可以发现，导致全球生态危机的主要原因，在于以满足少数人私利为目的的资本主义制度。一些企业追求利润最大化的行为、政府在环境保护立法方面的滞后也是造成全球环境状况恶化的重要因素。此外，在工业化迅猛发展时期形成的某些观念，对环境危机的出现具有不可忽视的影响。

片面的发展观。这种发展观把国内生产总值（GDP）的增加等同于经济发展。它只注意经济发展的数量和规模，忽视经济发展的质量和结构；把经济增长等同于社会进步，只注意经济总量的增加，忽视社会财富的公平分配以及其他社会目标（如社会福利、教育、安全、民主等）的实现；只看到人口作为劳动力对经济发展的积极作用，看不到人口作为资源的消耗者对经济发展的制约作用；把发展经济与保护环境对立起来，认为“先发展后

治理”是经济发展的必然途径。

> *我们不要过分陶醉于我们人类对自然界的胜利。对于每一次这样的胜利，自然界都对我们进行报复……我们连同我们的肉、血和头脑都是属于自然界和存在于自然之中的……*
>
> ——恩格斯

狭隘的人类主宰论。根据这种论点，人对自然拥有无限的权利，可以任意使用和支配自然界中的所有生物和非生物；自然不是伦理关怀的对象，人对自然的行为可以不受任何伦理原则的约束。这种论点忽视了人也是自然的一部分，人依存于自然，应该与自然和谐相处。

相关链接

英国近代地质学家赖尔认为，大自然赋予马、狗、牛、羊、猫和其他许多家畜适应气候的能力，明显地是为了使它们能听从人的调遣，使它们能为人类提供服务。

享乐主义和消费主义的幸福观。在享乐主义和消费主义者看来，我消费，所以我存在；消费得越多，自身的价值就越大。这种幸福观认为，幸福就是使自己的物质需要和欲望得到满足；谁占有和消费的物质财富更多，谁就更幸福。

专家点评

基本需要的满足无疑是人的全面发展的前提。但是，基本需要的满足并不会消费太多的物质财富。合理的消费能够促进经济的发展，而过度消费无助于经济的繁荣。在人类面临资源短缺威胁的今天，过度消费和炫耀性消费只能加剧环境危机。

科技万能论。这种理论认为，人类面临的所有问题都可以通过发展科学技术来加以解决。例如，可以通过太空移民等措施来解决人口膨胀的问题，不必为现在的环境危机担忧。根据科技万能论，只要科学技术足够发达，人类就不愁解决不了资源短缺、生态失衡等问题。

人类环境意识的觉醒

镜头一：1970年4月22日，美国两千多万人高举受污染的地球模型、巨幅图画和图表，举行集会和游行，要求政府采取措施保护环境和资源。这是人类有史以来第一次大规模的群众性环境保护运动。后来，联合国有关组织将4月22日确定为“世界地球日”。

镜头二：1973 年 1 月，联合国环境规划署（UNEP）成立。这是联合国系统内负责全球环境事务的牵头部门和权威机构。中国自 1973 年起成为其成员国。2003 年 9 月 19 日，联合国环境规划署驻华代表处在北京正式挂牌成立。

镜头三：1996 年，一个致力于公众环保教育的非营利民间环保组织——北京地球村成立，其宗旨是通过营造大众环境文化促进中国的可持续发展。

- 你知道上述事件吗，这些事件为什么会发生，参与这些事件的人关注的是什么问题？
- 你知道近些年世界环境日的主题吗？你还能列举出哪些重要的环境节日？

环境污染和生态危机给人类生活带来巨大损害。在付出沉重的代价后，人类的环境意识终于觉醒。

1962 年，美国海洋生物学家蕾切尔·卡逊的著作《寂静的春天》出版。该书向人们展示了一个被农药和化学品污染了的世界，并告诫人们，被毒化了的环境给人类造成的伤害是全面的、长期的，甚至是无可挽救的。该书引起了极大的反响。它促使人们重新思考人与自然的关系，被视为人类环境意识觉醒的一个标志。

相关链接

《寂静的春天》揭示了滴滴涕（DDT）等杀虫剂给动物带来的伤害。神秘的疾病夺走了成群小鸡的生命，牛羊气息奄奄，继而毙命。死亡的阴影笼罩着一切。农夫们诉说家人的种种疾病，医生面对病人的痛苦束手无策，有人（特别是儿童）不明原因地暴卒。卡逊认为，人类用来对付其他昆虫的武器，最终将转过来威胁人类自己；人类必须学会与其他生命和睦相处，并用伦理原则来指导对科技的运用。

1972 年 6 月 5 日，首次联合国人类环境会议在瑞典斯德哥尔摩召开，会议呼吁各国政府关注环境问题。1992 年，联合国环境与发展会议在巴西里约热内卢召开，把全球环境保护运动推向了新高潮，标志着环境意识在世界范围内的全面觉醒。从此，保护环境的观念更加深入人心，人类的环境意识日益增强。

大力宣传环境保护

积极投身环境保护活动

健全的环境意识，是准确的环境科学知识和正确的环境价值观念的统一。

环境科学知识是环境意识的基础。只有在掌握环境科学知识的基础上，才能理解人类目前的环境危机究竟是如何产生的，才能知道如何维护生态系统的平衡，如何降低以至避免环境污染事件的发生。

环境价值观念是环境意识的灵魂。只有树立正确的环境价值观念，才会有足够的动力采取行动，自觉地把环境科学知识应用于保护环境。环境价值观念是环境保护运动的发动机和牵引器。

环境伦理是环境价值观念的核心。环境伦理是调整人与自然之间的关系以及体现在其中的人与人之间关系的行为规范的总和。理解、接受并遵守环境伦理原则和相关的行为规范，是有效保护环境的重要前提，是实现人与自然和谐相处的重要保证。

2 环境伦理的原则和规范

破坏环境　违背道德

河流被污染

我国七大江河水系（长江、黄河、珠江、辽河、淮河、松花江、海河）均受到污染，近一半河段污染严重。许多湖泊由于污染出现了富营养化现象。

在北京南海子麋鹿苑中心有个世界灭绝动物墓地，墓志铭上的警句令人震撼：当物种灭绝的多米诺骨牌纷纷倒下的时候，作为其中之一的人类，能幸免于难吗？

北京麋鹿苑一景

- 污染和破坏环境对大自然、对人类自身造成了哪些伤害？
- 谁该为现代社会的环境危机负责？该负怎样的道德责任？

从道德评价的角度看，污染、破坏环境的行为是损人利己甚至损人害己的行为。其主要后果是：直接损害了污染源附近居民的利益，并可能使他们失去家园而成为生态难民；破坏后代人的生存环境，损害后代人的利益；毁坏其他生命的栖息地，扰乱生态系统的平衡，威胁着人类的生存。

与其他损人利己的行为相比，污染、破坏环境行为的责任主体较为复杂。对于目前的环境危机，那些违反环境保护法的企业，无疑要负主要责任，应当受到相应的制裁。而购买其产品或服务的消费者，实际上间接支持了企业的这种行为，也负有道义上的责任。此外，未能有效履行监管职能的政府部门，对污染、破坏环境的行为负有失职的责任；未能对环境问题表示关切并敦促政府采取行动的公民也负有一定的责任。正是公民和政府部门的这种不作为，为污染、破坏环境的行为提供了可乘之机。

每个人都在社会中扮演一定的角色，并与自然环境发生这样或那样的联系。在日常生活中，人人都应当意识到自己的行为会给环境带来什么影响，坚决抵制和反对一切污染、破坏环境的行为，认真履行保护环境的义务。

环境伦理的基本原则

◇ 电视机、电脑、手机、音响等产品，都含有毒物质。制造一台电脑需要700多种化学原料，其中50%以上对人体有害。采用填埋或焚烧的方式处理废弃的电子部件，会使有毒有害物质进入空气、土壤和地下水中，造成严重的环境污染。我国已进入家电报废高峰期，目前每年至少报废500万台电视机、400万台电冰箱、500万台洗衣机以及上千万部手机。根据2010年联合国环境规划署发布的报告，我国每年产生的电子垃圾超过230万吨，仅次于美国的300万吨，居世界第二位。


电子垃圾

◇ 200多年前，北美大陆生活着大约50亿只旅鸽，迁徙时的鸽群可遮天蔽日达数天之久。后来，由于欧洲移民的肆意捕杀，旅鸽开始了走向灭绝的厄运。现在，美国华盛顿国家博物馆的展厅里，陈列着旅鸽“玛莎”的标本。标本的字牌上写着：旅鸽种族中的最后一只，死于1914年9月11日。玛莎的眼睛圆瞪着，它那哀怨的目光，似乎在谴责人类，又似乎在提醒人们记住往昔沉痛的教训。


旅 鸽

● 电子产品给人类的生活带来巨大的便利，但电子垃圾又对人类的健康和环境构成严重威胁。谁应当承担处理电子垃圾的费用？我们应当依据什么原则来分配这种费用？

● 人们毫无顾忌地猎杀旅鸽的行为，使地球永远失去了一个重要的物种，使后人无法分享旅鸽给人类带来的好处。你认为这种行为是否应当受到道义上的谴责？

随着环境意识的觉醒，环境伦理逐渐被人们所了解和接受。保护环境，实现人与自然的和谐，必须同时处理好两种关系，即人与自然之间的关系以及体现在其中的人与人之间的关系（包括当代人之间的关系、当代人与后代人之间的关系）。用现代环境伦理调整这两种关系，应确立两个基本原则。

第一，环境正义原则。强调环境权利与环境义务之间的平衡是这一原则的基本精神。例如，既要公平地分配由公共环境提供的好处，又要共同承担发展经济所带来的环境风险；那些污染了环境的个人或团体，应当为污染的治理提供必要的资金；那些因他人的污染行为而受到伤害的人，应当从污染者那里获得必要的补偿；等等。

相关链接

某些发达国家的政府和企业，把高风险、重污染的工厂迁往发展中国家的做法，违背了国际环境正义的基本要求。

1984年12月3日，设在印度博帕尔的美国联合碳化物公司的一家农药厂，发生了异氰酸甲酯毒气泄漏事件，导致数千人死亡，数十万人受毒害。这一事件给当地居民留下了难以愈合的心灵创伤。

悼念博帕尔惨案的死难者

根据环境正义原则，所有人都有权利生活在一种有利于人的身心健康的环境中，有权享有自然馈赠给人类的最基本的生存条件：新鲜的空气，清洁的饮用水，充足的阳光，青山绿水，等等。每个人都应当充分意识到并积极维护自己和他人的这种权利。

专家点评

消除贫困，满足人们的基本需要，也是环境正义的内在要求。贫困与环境的恶化往往互为因果。当今世界，发达国家的人口占世界人口总数的四分之一，这些人却消费了大约四分之三的地球资源。从国际环境正义的角度看，发达国家有义务为发展中国家消除贫困，特别是为环境保护提供必要的资金和技术。

战争使人类的生命和地球上的其他生命被大肆毁灭，使局部生态环境遭到巨大的破坏。军备竞赛把本来可用于保护环境和消除贫困的有限资源用于研制和生产毁灭生命的武器。因此，环境正义原则要求我们维护和平。

第二，尊重自然的原则。这一原则强调，人与自然是生命共同体。自然生态系统的各个部分相互联系，使人类的命运与自然生态系统整体的命运休戚相关。随着现代科技的发展，人类对自然的依赖似乎减轻了，但人类的生存离不开自然这一基本前提并没有改变，人类不可能摆脱对空气、水、土地和各种动植物资源的依赖。人类对自然生态的破坏实际上就是对自己的伤害，对自然的不尊重实际上就是对自己的不尊重。因此，人类理应尊重自然，爱护自然。

专家点评

地球上生存着各种各样的生命，它们是几十亿年进化的产物。各种生命之间相互影响，并与地球构成一个密不可分的有机整体。作为地球生命大家庭中一个晚到的成员，人类虽然利用自己的聪明才智获得了巨大的生存空间，但其生存仍然离不开生态系统和其他生命的支撑。

今天，随着人类的活动越来越深地渗透到地球家园的每个角落，人类的命运与这个大家庭中其他

成员的命运更加紧密地联系在一起。作为地球上最强大的生命形式和唯一具有道德意识的物种，人类应主动承担起维护生物多样性和保护地球家园的崇高责任，成为生命的呵护者和地球的守护人。

尊重自然、顺应自然、保护自然是人类道德进步的表现。在原始社会，人们道德关怀的对象只局限于本氏族或本部落的人。随着文明的发展，人们道德关怀的范围逐渐扩展到外乡人、整个民族、整个国家，乃至全人类。随着环境意识的普遍觉醒，人们又把整个自然界视为道德关怀的对象。如今，对自然的尊重和爱护，已经成为国家文明程度的重要指标和个人道德素养的重要标志。

> *人类只有遵循自然规律才能有效防止在开发利用自然上走弯路，人类对大自然的伤害最终会伤及人类自身，这是无法抗拒的规律。*
>
> ——习近平

相关链接

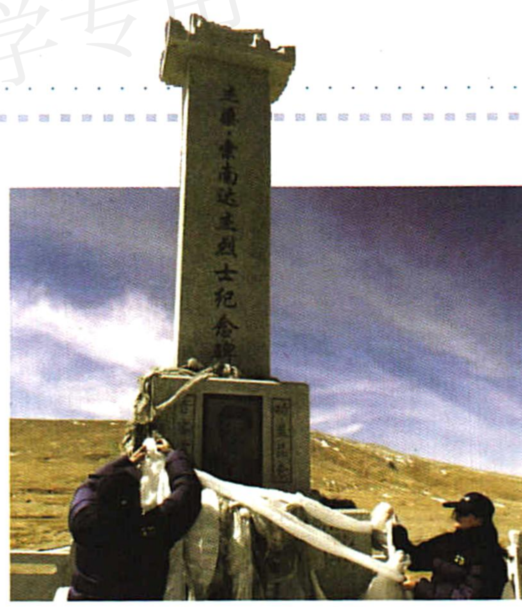
1982年，联合国大会通过的《世界自然宪章》要求：应尊重自然，不得损害自然的基本过程。

2000年3月，地球宪章委员会在巴黎联合国教科文组织总部颁布了旨在确保生命在地球上持续生存的《地球宪章》。该宪章确认了四条基本的伦理原则，即尊重自然，保护人权，关注经济正义，维护和平。

保护环境　人人有责

◇ 在青海省玉树藏族自治州，国家重点保护的珍稀野生动物曾频频受到目无法纪的盗猎者疯狂捕杀。治多县委副书记杰桑·索南达杰带人查获盗猎案6起，摧毁2个犯罪团伙。1994年1月18日，他在与盗猎分子的搏斗中英勇牺牲。

“绿带运动”



索南达杰烈士纪念碑

◇ 肯尼亚环境和自然资源部副部长马塔伊，在非洲推动妇女参与“绿带运动”，因而获得2004年度诺贝尔和平奖。这是和平奖首次颁发给环保领域的人士。

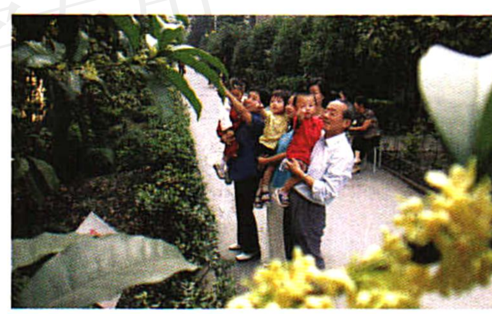
◇绿色生活方式渐渐成为人们所追求的生活方式。

绿色家庭

节约型机关

绿色出行

绿色学校



绿色社区

- 举出一位自己熟悉的、为环保作出贡献的人物，介绍他保护环境的事迹。
- 绿色正在成为一种时尚，你能说出其中的原因吗？为了更好地保护人类共有的地球家园，人类还应该从哪些方面规范自身？说说你的看法。

环境伦理原则，在人们的社会生活、职业生活和家庭生活中，体现为具体的环境道德规范。

环境道德规范，是人们处理环境事务时应当共同遵守的行为准则，也是评判其行为的伦理依据。例如，消除贫困，缩小贫富差距；计划生育，控制人口；节约资源，反对浪费；爱惜公共绿地，不随地丢弃垃圾；公平地分配环境保护的利益与负担；反对战争，维护和平；抵制公害输出，反对环境殖民主义；爱护动物，不虐待动物；保护濒危物种，维护生物多样性；保护地球的生命力，不破坏生态系统的完整和稳定；等等。

相关链接

2013年6月5日是第42个世界环境日，国家环境保护部联合全国妇联等部门在北京启动“巾帼环境友好使者行动”，旨在通过广大妇女身体力行，以一传千、以一传万，带动更多的人参与环保行动。

“巾帼环境友好使者行动”启动

遵守环境道德规范，要落实到具体的环保行动上。每个人都应关心并积极改善自己周围的环境状况。要从自身做起，选择简约适度、绿色低碳的生活方式，反对奢侈浪费和不合理消费，还要勇于并善于同污染、破坏环境的行为作斗争，使环境正义、尊重自然的伦理原则落实到日常生活的各个方面。

相关链接

绿色消费是一种权益，它保障当代人的安全与健康，维护后代人的生存。

绿色消费是一种义务，它提醒我们，环保是每个消费者的责任。

绿色消费是一种良知，它表达了我们对地球母亲的孝爱之心和对万物生灵的博爱之怀。

绿色消费是一种时尚，它体现着消费者的文明与教养，也标志着高品质的生活质量。

为了健康，选择绿色；为了健康，保护绿色。

你我携手，创造一个绿色的世纪！

3 呵护人类共有的家园

只有一个地球


高温天气使人们不得不泡在水中

世界气象组织称，2015年、2016年和2017年已被确认为有记录以来最热的三年。其中，2017年是无厄尔尼诺现象中最暖的一年，全球平均气温比1981—2010年的长期均值（14.3℃）高约0.46℃。

- 地球气候变暖与人类活动有什么关系？
- 除了全球变暖，人类目前还面临着哪些全球环境问题？

自20世纪中叶以来，随着人类“征服”自然的足迹踏遍全球，环境问题也逐渐从地区性问题发展成全球性问题。

全球环境问题，指的是全人类共同面临的环境问题。这种环境问题所带来的损失和影响，扩展到了整个世界，而不限于某些国家或地区。因此，解决这种环境问题，不是任何一个国家所能独自承担的，而是需要世界范围的广泛合作。

相关链接

人类目前面临着许多共同的全球环境问题，如臭氧层空洞、酸雨、物种灭绝、森林锐减、土壤沙化、水土流失、有毒化学品污染、海洋环境污染、固体废弃物污染等。其中，全球气候变暖是最危险、最具挑战性的问题之一。

全球环境问题，不是孤立的单项问题，而是同其他环境和社会问题联系在一起的“问题群”，具有综合性与复杂性。这意味着：导致全球环境问题的原因多种多样，治理起来相当困难；一个全球环境问题的解决，不仅有赖于其他全球环境问题的解决，而且有赖于其他社会问题的解决。

相关链接


气候变暖导致海平面上升

气候变暖会给人类带来许多不良影响。例如，海平面上升将会使许多沿海国家和岛屿国家遭受更多的风暴潮，甚至有被淹没的危险，直接威胁到这些国家的生存和发展。热带地区降水增多、温度升高，会造成霍乱、疟疾等疾病流行。水资源减少，使得邻近的国家之间因水资源发生争议甚至发生战争的可能性增加。全球变暖还会导致物种灭绝、粮食减产、害虫逞凶、土地荒芜、森林减少、风暴增多、洪涝频仍等一系列自然灾害。

全球环境问题，危及人类的生存和社会的发展。解决全球环境问题，具有紧迫性和挑战性。人类解决全球环境问题，既需要观念层面的及时调整，如树立人类命运共同体意识，又需要在制度层面有所作为，如建立既尊重各国主权又能够有效监督和协调各国政府的、对全球环境问题进行“全球治理”的国际机构。如何共同应对全球环境问题带来的挑战，已成为人类面临的一项重大课题。

解决全球环境问题的基本原则

保护全球环境是人类的共同利益，但各个国家在这一共同事业中所承担的责任以及从中获得的利益又是有差别的。你认为如何分配这种责任和利益才是公平的？

为了共同应对全球环境问题，国际社会从第一次联合国人类环境会议开始，就积极探讨解决问题的方案和途径，形成了一些被大多数国家接受的原则。

例如，共同但有区别的责任的原则。地球生态系统是一个统一的有机整体，发生在一个地区的环境灾难，往往会对其他地区产生有害影响。地球是人类共有的唯一家园，保护地球是所有人、所有国家的共同责任。

坚持共同责任原则，并不意味着所有国家都应该或都有能力承担相同的责任。发展中国家经济发展水平较低，缺乏充足的资金和必要的技术，在保护环境方面往往心有余而力不足，只能承担与其经济发展水平相适应的环保责任。发达国家在以往工业化的过程中，曾利用全球的资源和市场积累了大量财富，也制造了大量的环境污染问题，当前仍然是主要污染物的排放者。发达国家既拥有较雄厚的资金和较发达的技术，又对全球环境的恶化负有主要责任，理应在保护全球环境的事务中承担与其资金和技术相称的较多的责任。

又如，兼顾国家环境主权与国际合作义务的原则。国家环境主权是国家主权在国际环境关系中的具体体现，包括环境资源的享有权、环境资源的开发利用权、环境事务的管理权，以及抵制他国损害本国环境的反抗权。每个国家都拥有自己的国家环境主权，同时负有保护全球环境的共同义务。这些义务包括：保护好本国的环境；确保在其管辖范围内或在其控制下的活动，不对其他国家或地区的环境造成损害；遵守已经达成的国际环保协议，积极履行协议规定的义务；积极推动全球环保立法，创建有效的国际环保执法机制。

相关链接

一些发达国家的政府和企业，打着“经济援助”“经济合作”的旗号，把那些为本国法律所禁止的严重污染环境或将付出较高环保成本的企业迁往发展中国家，损害别国环境，换取一己私利。这种输出污染的行为被称为环境殖民主义。抵制公害输出，反对环境殖民主义，是世界各国人民共同的使命。

坚持国家环境主权，是解决全球环境问题的基础；履行国际合作义务，是解决全球环境问题的保障。世界各国都应当以全球环境问题的解决为宗旨，把这二者有机地结合起来。

共有的家园　共同来守护

◇ 世界自然基金会（WWF）成立于1961年，是世界最大的、经验最丰富的独立性非政府环境保护机构。该基金会已在超过150个国家发起或完成了13 000个环保项目。

◇ 人与生物圈计划（MAB）是联合国教科文组织发起的一项政府间跨学科大型综合性研究计划，目的是为资源和生态系统的保护及可持续发展提供科学依据，提高人类对生物圈

的认识和有效管理，为全球的环境与发展服务。我国于1978年成立了“中国人与生物圈国家委员会”。

◇ 国际生物圈保护区网络是人与生物圈计划项目建立的一个庞大的世界生物圈保护网络。截至2017年，全世界共有120个国家的669个自然保护区被纳入该网络，其中包括20个跨边界保护区。我国已有30多个自然保护区加入该保护网络。


世界自然基金会总部

- 你还知道哪些重要的国际环境保护公约和国际环境保护法？你知道哪些国际性的环境保护项目？
- 国际社会在保护全球环境方面取得了哪些重要成就，还面临着哪些挑战和困难？

随着经济全球化的发展，人类应当作为一个整体在全球范围内采取协调行动，共同应对全球环境问题的挑战。20世纪后半叶，特别是第一次联合国人类环境会议以来，国际社会采取了许多共同行动，以保护人类共有的家园。

目前，国际环保合作已取得许多成果，包括：发表了一系列指导和协调全球环保活动的宣言，如《内罗毕宣言》（1982年）、《里约环境与发展宣言》（1992年）、《约翰内斯堡宣言》（2002年）等；制定了许多具有法律效力的国际环保公约和条约，如《保护臭氧层维也纳公约》（1985年）、《控制危险废物越境转移及其处置巴塞尔公约》（1989年）、《生物多样性公约》（1992年）等；启动了许多国际性的环境保护计划和项目，如人与生物圈计划；建立了全球性的环境保护基金，如全球环境基金；成立了许多政府间的环保合作机构以及全球性的非政府组织，如联合国环境规划署和世界自然基金会等。

相关链接

全球环境基金于1990年由联合国发起建立，1991年正式开始运作，当时基金总额为15亿美元。其宗旨是以提供资金援助和转让无害技术等方式，帮助发展中国家实施防止气候恶化、保护生物物种、保护水资源、减少对臭氧层的破坏等保护全球环境的项目。

在国际社会的共同努力下，联合国于2005年宣布，《京都议定书》正式生效。《京都议定书》是全球第一份旨在控制温室效应，要求各缔约方共同减少排放造成温室效应的二氧化碳等六种气体的重要法律文件。议定书所要解决的是全球气候变暖问题。它的达成和生效经过了漫长而艰辛的谈判，具有特殊的意义，集中体现了发达国家和发展中国

家在全球环境保护问题上既冲突又合作的历程。2016年，联合国宣布《巴黎协定》正式生效。《巴黎协定》是继《京都议定书》后第二份有法律约束力的气候协议，为2020年后全球应对气候变化的行动作出了安排。

《京都议定书》《巴黎协定》的生效表明，在如何分配全球环境保护的义务和责任的问题上，虽然不同国家特别是发达国家与发展中国家之间存在不同意见，但是，只要各国人民共同努力，国际社会就能排除各种干扰因素，采取有效措施应对威胁全人类的全球气候变暖问题。

个别发达国家以维护自己国家经济发展利益为由，不履行《京都议定书》所规定的义务，退出《巴黎协定》。你认为这一举动是否符合环境伦理的基本原则？

4 推进生态文明建设　走可持续发展之路

透视“可持续”

2004年2月，圆明园湖底防渗工程（即在湖底铺上防渗膜）全面开工。此事引发了一场各界人士广泛参与的大讨论。圆明园湖底防渗工程是在国家重点文物保护单位内建设的。为此，国家环保总局按照有关规定举行了听证会。听证会上，来自社会各界的人士展开了激烈辩论，新闻媒体也进行了深度报道。

听证会现场

市民

既要充分发挥圆明园历史遗迹的经济和社会效益，又要切实保护好生态环境。否则，只会是好心办坏事。

生态学家

圆明园具备湿地生态系统的基本功能，它可以涵养水源，有海绵效应，有很好的生物多样性，还可以调节温度、湿度。这个工程会使这些功能彻底丧失。

圆明园工程管理处

在湖底铺设防渗膜是一项改善生态环境的节水工程。如不做湖底防渗，圆明园一年中将有七个月处于无水期。缺水已造成大量动植物死亡。

建筑学院教授

圆明园所处地质条件不好，渗漏严重。防止漏水属于节水措施，这是一种不得已而为之的措施，否则河湖会干涸，使圆明园成为水体枯竭的历史园林。

- 圆明园湖底防渗工程为什么会引起如此广泛的社会关注，成为新闻焦点？
- 在你看来，为什么会出现如此截然不同的各种观点？你比较倾向于哪种观点？
- 尝试以生态文明的基本理念为指导，从环境伦理的意义上谈谈自己对这个问题的见解。

1984年，联合国成立了环境与发展委员会。在挪威工党领袖布伦特兰夫人领导下，该委员会经过三年多的深入研究和充分论证，于1987年向联合国提交了研究报告《我们共同的未来》（也称布伦特兰报告）。这个报告第一次全面系统地论述了可持续发展的基本内容，以及实现可持续发展的基本途径。

根据布伦特兰报告，可持续发展是指既满足当代人的需要、又不对后代人满足其需要的能力构成危害的发展。它包括三个方面的内容，即生态的可持续性、社会的可持续性和经济的可持续性。

生态的可持续性，是指维持正常的自然发展过程，保护好生态系统的生产能力及其功能，使整个系统处于一种良性的运行状态。

社会的可持续性，是指社会的基本结构符合正义的基本要求，能够使人们的基本需要得到满足，并能保证同代人之间、不同代人之间在资源使用上的公平分配。

经济的可持续性，是指把经济的规模控制在生态系统可承载的范围内，在保证经济运行质量的基础上，实现经济长期稳定的增长。

相关链接

1992年，我国政府向联合国环境与发展大会提交的《中华人民共和国环境与发展报告》，首次阐述了我国关于可持续发展的基本立场和观点。同年8月，我国政府制定“中国环境与发展十大对策”，提出走可持续发展道路是我国的一项基本国策。

1996年3月，第八届全国人民代表大会第四次会议批准的《国民经济和社会发展“九五”计划和2010年远景目标纲要》，明确作出了实施可持续发展战略的重大决策。

2016年9月19日，我国发布《中国落实2030年可持续发展议程国别方案》。我国将贯彻创新、协调、绿色、开放、共享的发展理念，实施这一方案，加快推进可持续发展议程的落实，继续为全球发展事业作出力所能及的贡献。

对于可持续发展来说，生态的可持续性是基础，社会的可持续性是关键，经济的可持续性是手段。完整的可持续发展是这三种可持续性的内在统一。

> *我们要建设的现代化是人与自然和谐共生的现代化。*
>
> ——习近平

可持续发展的伦理原则


沙漠正在吞噬我们的家园


人与自然协调发展

- 沙漠为什么会吞噬我们的家园？
- “儿孙自有儿孙福，一代只管一代事。”请你结合环保问题，试对这句话进行分析。

由于历史传统、文化观念和经济发展水平不同，不同国家确定的可持续发展的具体目标、政策和实施步骤也各有不同。但是，根据环境伦理的基本原则，有两个基本要求应该共同遵循。

第一，坚持环境保护与经济发展相结合。环境是经济发展的物质基础，发展经济是保护环境的必要条件。两者相互影响、相互作用。经济发展在很大程度上受到资源环境条件的制约。环境保护不好，会使工农业生产的基础受到破坏，限制经济的发展；环境污染和生态破坏带来的有形和无形的损失，会抵消经济发展的成果。环境保护好了，可以提高资源的再生能力，增加经济发展的资源储备，促进经济持续健康发展，使经济发展和环境保护的目标同时得到实现。

专家点评

人类的经济系统是生态系统的一个组成部分。实现可持续发展，必须将经济系统的运行控制在生态系统可承载的范围之内。发展循环经济是实现经济持续健康发展的重要途径。

循环经济遵循的是“减量化、再使用、再循环”的原则。它把经济活动组织成一个“资源—产品—再生资源”的反馈式流程，对能源及其废弃物实行综合利用。循环经济能以尽可能小的资源消耗和环境成本，获得尽可能大的经济效益和社会效益，从而更有效地利用资源、保护环境，使经济系统与自然生态系统的物质循环过程相互协调。

实现环境保护与经济发展相结合，就是使经济系统与生态系统良性互动，协调发展。为此，要把减少和防治污染、提高资源利用率的要求贯彻到经济活动的每个环节，追求经济活动的社会效益、经济效益和生态效益的统一，同时要主动采取预防措施，避免给环境造成无法弥补的破坏。

第二，代际平等的要求。当代人享有的追求幸福生活的基本权利，后代人同样应该享有。由于人类已经拥有迅速消耗自然资源的能力，每代人都有可能损害后代人的生存环境和发展空间。因此，在当代人与后代人之间，如何公平地分配地球上的有限资源、公平地享受环境权益，已成为可持续发展无法回避的伦理问题。

相关链接

1997年，联合国教科文组织发布《当代人对后代人责任宣言》。该宣言有“后代人的需要与利益”“保护环境”“和平”等十二个条款。其中，第四条指出：当代人有责任把这样一个地球留给后代，这个地球不会因人类的行为而在任何一天遭受不可逆转的破坏；暂时栖息在地球上的每一代人都应细心而合理地使用自然资源，并确保人类对生态系统的改变不危及地球上的生命，确保各个领域的科技进步不伤害地球上的生命。第五条强调：当代人应确保后代人不遭受那些威胁他们健康和生存的污染的危害。

当代人与后代人共享地球上的有限资源，是代际平等的重要体现。为此，当代人对可再生资源的使用，应限制在这些资源的可再生速率的范围之内。也就是说，只使用自然资本的“利息”，而不使用自然资本的“本金”。当代人在使用不可再生资源时，要把所获得的相当一部分资金用于技术创新，以力争在某种不可再生资源枯竭以前，能够发现新的可替代资源。当代人还应控制自己的污染物排放量，把它限制在生态系统能够承受的范围内。

建设生态文明　实现中华民族永续发展

河北省北部的塞罕坝，曾经是“黄沙遮天日，飞鸟无栖树”的荒漠沙地。20世纪60年代以来，三代塞罕坝林场人以坚韧不拔的斗志和永不言败的担当，坚持植树造林，建设了百万亩人工林海，用实际行动诠释了绿水青山就是金山银山的理念，铸就了牢记使命、艰苦创业、绿色发展的塞罕坝精神。如今的塞罕坝已经变成了“河的源头、云的故乡、花的世界、林的海洋、鸟的乐园”。

- 请查找资料，了解塞罕坝今天的生态环境与20世纪60年代以前的不同。
- 请从生态文明建设角度谈谈你对塞罕坝精神的理解。

改革开放以来，我国经济持续高速增长，为人们提供了丰富的物质文化生活产品，但是，环境污染、生态破坏、资源短缺等问题也十分突出。要使我国的经济能够持续健康发展，人民的物质文化生活能够得到持续改善和提高，必须大力推进生态文明建设。

生态文明的基本理念是尊重自然、顺应自然和保护自然。其重要指标是：基本形成节约能源资源和保护生态环境的产业结构、生产方式和生活方式；基本实现绿色发展、循环发展、低碳发展；主要污染物排放得到有效控制，环境质量明显改善；生态空间山清水秀，给自然留下足够的修复空间；生态文明理念在全社会牢固树立。

生态文明建设功在当代、利在千秋。我们要牢固树立社会主义生态文明观，推动形成人与自然和谐发展现代化建设新格局，为保护生态环境作出我们这代人的努力！

——习近平

《易传》

天地之大德曰生。

白居易

莫道群生性命微，
一般骨肉一般皮。
劝君莫打枝头鸟，
子在巢中盼母归。

张载

乾称父，坤称母。予兹藐焉，乃混然中处。故天地之塞，吾其体；天地之帅，吾其性。民，吾同胞；物，吾与也。

中华传统文化中包含着丰富的生态智慧。请列举并说明它们对于生态文明建设的积极意义。

为了建设美丽中国，实现中华民族永续发展，我们必须按照建设中国特色社会主义的“五位一体”总体布局，把生态文明建设放在突出地位，融入经济建设、政治建设、文化建设、社会建设各方面和全过程，着力从制度层面推进生态文明建设；要坚持节约优先、保护优先、自然恢复为主的方针；大力建设资源节约型、环境友好型社会，走生产发展、生活富裕、生态良好的文明发展道路；大力提倡绿色消费、文明消费，弘扬人与自然和谐共生的价值观，形成尊重自然、热爱自然、善待自然的文化氛围与生活方式。

相关链接

中国共产党领导人民建设社会主义生态文明。树立尊重自然、顺应自然、保护自然的生态文明理念，增强绿水青山就是金山银山的意识，坚持节约资源和保护环境的基本国策，坚持节约优先、保护优先、自然恢复为主的方针，坚持生产发展、生活富裕、生态良好的文明发展道路。

——《中国共产党章程》

建设生态文明，必须建立系统完整的生态文明制度体系，实行最严格的源头保护制度、损害赔偿制度、责任追究制度，完善环境治理和生态修复制度，用制度保护生态环境。

——《中共中央关于全面深化改革若干重大问题的决定》

专题活动建议

- *列举我们日常生活（包括衣、食、住、行、休闲等）中哪些行为对环境是友好的，哪些是中性的，哪些是破坏性的。可分类排列，制成展板。*
- *模拟某工程项目听证会，论证该工程是否符合生态文明的基本理念。*

提示：听证会由有关主管部门主持；由本工程项目的代表首先就该工程的必要性与合理性等进行五分钟的陈述，其他利益群体的代表和各方专家再分别从各自角度对该工程发表看法。这些代表和专家应包括普通市民、工程附近的居民、生态学家、建筑工程专家、历史学家、环保专家、法律工作者、环保工作者、教师、学生等。

- *以“让人民群众喝上干净的水、呼吸清洁的空气、吃上放心的食物，在良好的环境中生产和生活”为主题，共同给所在地的行政领导写一封信，肯定本地政府在保护环境方面已取得的成绩，指出还有哪些方面需要改进和加强。*

后 记

根据教育部制定的《普通高中思想政治课程标准（实验）》，由教育部普通高中思想政治课课程标准实验教材编写指导委员会负责编写的《思想政治 选修6 公民道德与伦理常识》实验教科书，在编写期间得到诸多人士的热情帮助，余新华等专家为本书提出了宝贵的意见。在此我们表示衷心的感谢。

2008年，根据教育部办公厅印发的《初中思想品德课和高中思想政治课贯彻党的十七大精神的指导意见》，我们对教材进行了修订。

2013年，根据教育部办公厅印发的《初中思想品德课和高中思想政治课贯彻党的十八大精神的教学指导建议》，我们对教材进行了修订。

2018年，根据党的十九大精神，我们又对教材进行了修订。

教材如有疏漏之处，希望实验区的师生们在使用教材的过程中，把意见和建议直接反馈给我们，以期再版修订时使教材进一步完善。我们的联系方式如下：

电话：(010) 58758637

E-mail：jcfk@pep.com.cn

教育部普通高中思想政治课
课程标准实验教材编写组

谨向为本书提供照片的单位和人士致谢

《知荣辱　辨是非　重践行——社会主义荣辱观中学生读本》，人民教育出版社（P1 左一图）；《社会主义核心价值体系学习读本》，学习出版社（P1 左二图）；《公民道德歌》，安徽教育出版社（P1 左三图）；《青春在行动》，北京出版社（P1 左四图）；中国新闻图片网（P1 压底图，P6 右图，P9 四幅图，P20 上图，P24 左下图和右中图，P29 中图，P32 右图，P41压底图，P42 一幅图，P46 左下图和右图，P47 两幅压底图，P49 两幅图，P52 两幅压底图，P55 三幅图，P65 右下图，P66 中上图、左上图、左下图，P67 右图，P71 左图，P76 右上图，P85 右中图，P86 压底图、右上图、左下图，P87 压底图，P88 右上图和右下图，P90 两幅图，P92 压底图和两幅图，P93右图，P96 中左图和下两幅图，P103 一幅图，P104 压底图）；东方IC图片网（P2 压底图，左二图、左三图，P13 压底图，P18 压底图，P27 两幅图，P29 压底图，P35 压底图和正文三幅图，P37 一幅图，P40 三幅图，P65 上图，P66 压底图、中下图、右上图、右下图，P67 左图，P71 压底图，P72 中间图，P76 压底图、下图，P79 压底图，P80 压底图，P81 三幅图，P85 上图和下图，P94 一幅图，P95 左图，P98 压底图和一幅图，P99 一幅图）；新华通讯社（P1 右下图，P6 左一图、P8 压底图，P10 一幅图，P13 一幅图，P14 两幅图，P15 两幅图，P20 下图，P25 右下图，P29 左图、右图，P30 压底图，P33 一幅图，P61 压底图，P63 压底图，P68 两幅图，P75 一幅图，P76 左上图，P86 左上图，P87 一幅图，P95 右图，P97 一幅图，P103 压底图，P105 两幅图，P107 右上图）；《一千零一夜》，北京少年儿童出版社（P11 左图）；朱京（P25 压底图和正文上侧三幅图）；中国图片网（P65 左图，P70 压底图，P72 左上图和左下图）；视觉中国（P57压底图，P57两幅图，P96上图，中右图）；《人类社会的历程》，人民教育出版社（P88 左图）；《灭绝的美丽生灵》，中国工人出版社（P93 左图）；世界自然基金会北京办事处（P101 一幅图）；中国114黄页网（P107 左上图）。