经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

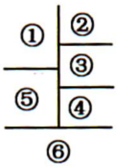
数学（选修3-4）

对称与群

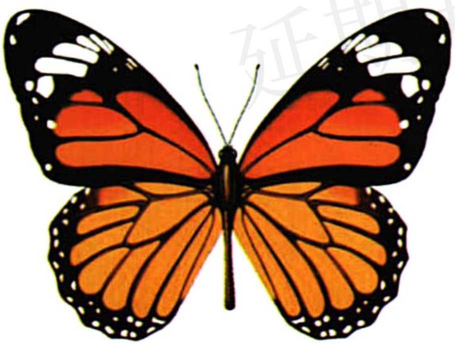
SHUXUE

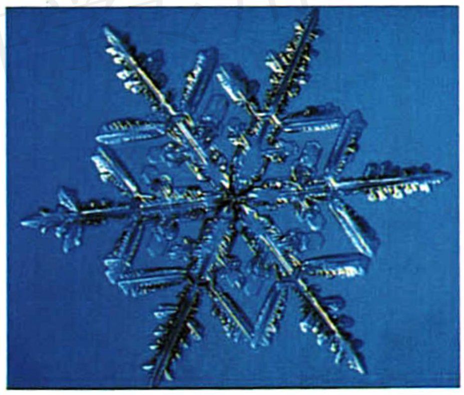
北京师范大學出版社

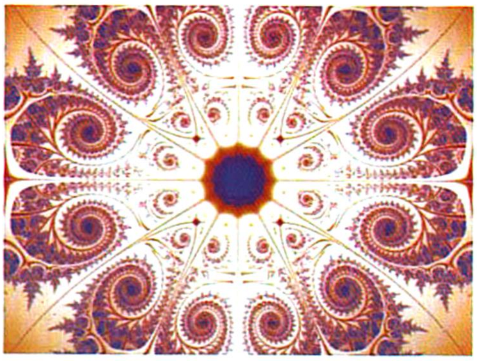
对称图形欣赏

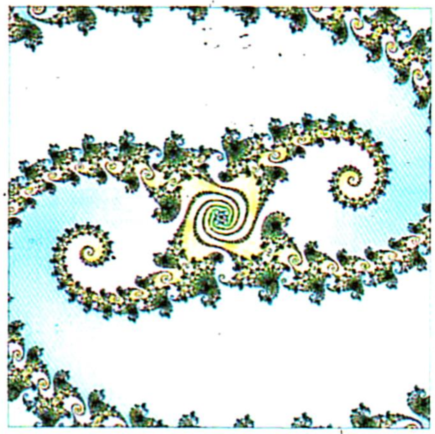


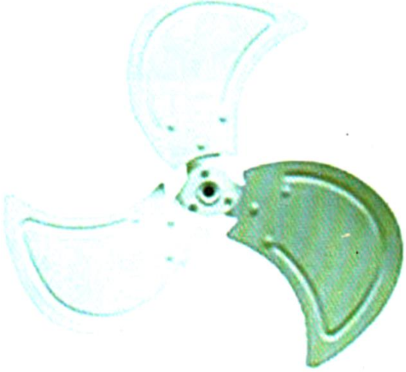
①京剧脸谱　④雪花
②故宫角楼　⑤蝴蝶
③枫叶　⑥飞机

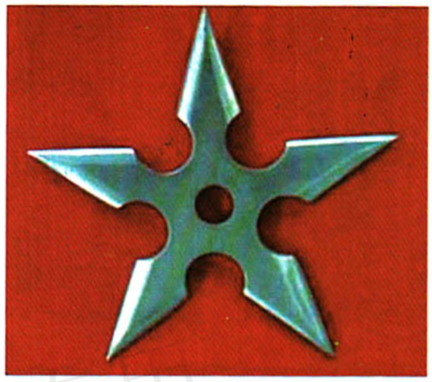


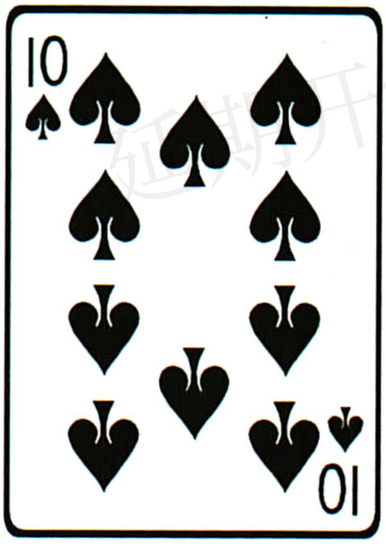


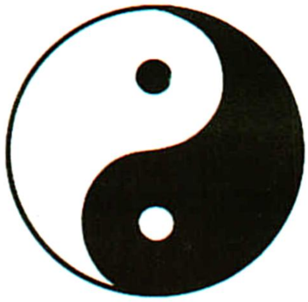












①	②
③	④
⑤	⑥
	⑦

①对称艺术图　⑤扑克牌
②分形艺术图　⑥伊斯兰图饰
③风扇叶片　⑦太极图
④五星镖

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

（选修3-4）

对称与群

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王汝楫

编写人员　（按姓氏笔画排序）

王汝楫　王尚志　张饴慈

顾　沛　彭　刚

北京师范大学出版社

·北　京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮购科电话　010-58808083
传　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：4.75
插　　页：1
字　　数：100 千字
版　　次：2007 年 5 月第 2 版
印　　次：2019 年 7 月第 24 次印刷
定　　价：4.85 元
ISBN　978-7-303-08092-2

责任编辑：邢自兴　焦继红　　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　　　　　　责任印制：孙文凯　窦春香

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

目　录

引 言

在这个丰富多彩的世界里，存在着各种美丽的对称图形：晶莹的雪花、明亮的窗户、皎洁的圆月、精致的五角星等. 从建筑物的外形到日常生活用品，从动植物的外貌到生物有机体的构造，从化合物的组成到分子晶体的排布，无不蕴涵着对称. 毫不夸张地说，自然界的对称可以从亚原子微粒的结构到整个宇宙结构的每一尺度上找到. 更让人惊奇的是，物理学家发现宇宙间普遍存在的许多守恒定律本质上都是一种对称，这使得人类用以理解世界、探索宇宙的思维深刻了几许. 可以说，对称这种现象既普遍又重要.

很自然地，我们会问：能否用数学工具来研究它呢?

德国著名数学家外尔(H. Weyl，1885—1955)给了我们肯定的回答："对称是一个广阔的主题，在艺术和自然两个方面都意义重大. 数学则是它的根本."

这个"根本"的数学概念就是"群".

本专题我们将从平面的对称性出发，利用"群"这个有力工具来研究、体会数学是怎样来刻画生活中的普遍现象——对称现象的.

在本专题的学习过程中，需要注意的是：我们头脑中以往的对称概念可能还处于一种静止的状态，还属于审美的、朴素的观念；而当我们用"群"这个数学工具来研究对称时，需要让我们的思维运动起来，让图形运动起来，这样我们才能真正让"对称"数量化、数学化，从而抓住"对称"的本质特征.

外尔(H. Weyl，1885—1955)，德国著名数学家. 著有《黎曼曲面的思想》、《典型群》等重要著作.

第一章　平面图形的对称性

本章我们将学习四种基本的对称变换：反射变换、旋转变换、平移变换以及滑动反射变换，这些变换刻画了所有平面图形的对称性；我们还将认识到这些变换的统一特征，即它们都是等距变换；最后我们将讨论变换的运算以及运算过程中所满足的一般规律.

§1　平面图形的对称性

在初中，我们学过轴对称图形和中心对称图形，图 1-1 给出了一些这样的例子.

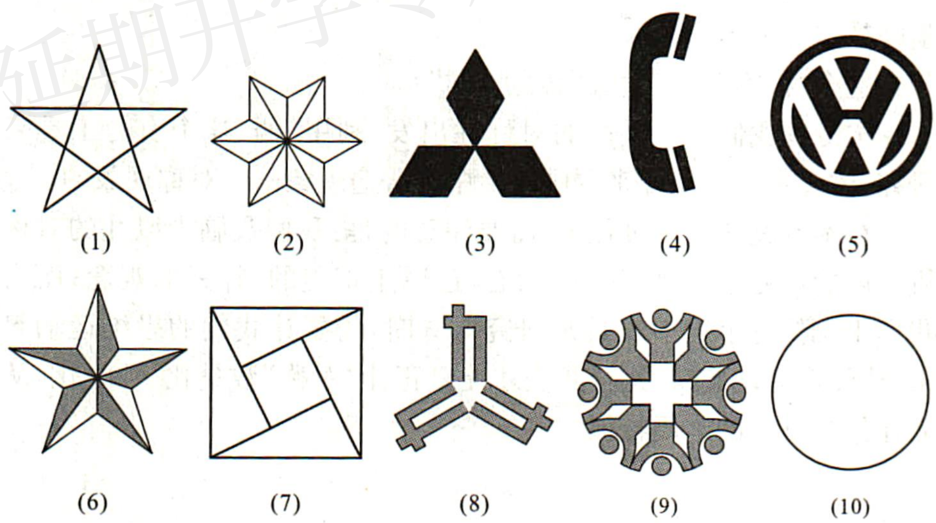


图 1-1

1.1　轴对称图形与反射变换

如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫作**轴对称图形**，这条直线叫作**对称轴**. 例如，等腰三角形是一个轴对称图形，底边上的高线（高所在直线）是对称

轴，我们也说，等腰三角形关于底边上的高线是对称的.

抽象概括

轴对称图形可以看作是通过一个镜面反射得到的. 下面我们给出“反射变换”的定义，用它来描述轴对称图形.

在平面上，若直线 l 垂直平分线段 PP'，就称点 P 和点 P' 关于直线 l 是对称的，或者说，点 P 关于直线 l 的对称点是点 P'.

平面的反射变换：将平面的每个点变成该点关于一条定直线的对称点，对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系，称为平面关于定直线的**反射变换**(见图 1-2).

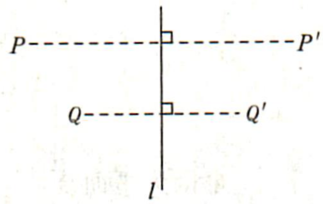


图 1-2

在图 1-3 中，点 A' 和点 B' 分别是点 A 和点 B 关于 y 轴的对称点，点 C 与点 C' 分别是位于线段 AB，$A'B'$ 上的关于 y 轴的对称点. 显然，线段长 $|A'B'|=|AB|$，$\angle A'CB'=\angle AC'B$.

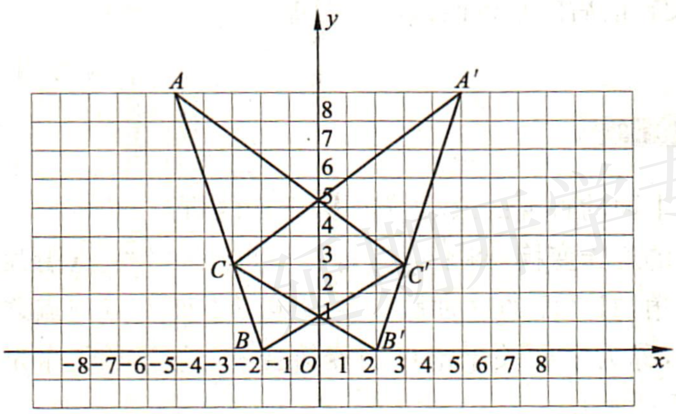


图 1-3

平面的反射变换把直线变成直线，把平行直线变成平行直线，把线段变成等长的线段，把角变成等角……

总之，平面的反射变换保持图形的形状和大小不变.

在平面上，如果存在关于一条直线的反射变换，使一个图形经过该反射变换后能与自己重合，就称这个图形是**轴对称图形**，这条直线是它的**对称轴**，还称这个反射变换是该图形的一个“**反射对称性变换**”，也说该图形有一个“**反射对称**”.

1.2　中心对称图形与旋转变换

在平面内，一个图形绕定点旋转 180°，如果旋转前后的图形互相重合，那么这个图形叫作**中心对称图形**，这个点叫作它的**对称中心**.

例如，平行四边形是一个中心对称图形，对角线的交点是其对称

中心，我们也说，平行四边形关于对角线的交点是对称的.

问题提出

图 1-4 中的正方形和平行四边形（非矩形）都是中心对称的，哪一个图形的对称性更好呢？

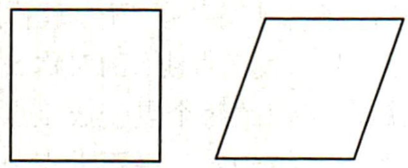


图 1-4

从直观感觉，你会说正方形比平行四边形有更高的对称性，这是因为，在平面里绕正方形中心分别旋转 0°，90°，180°和 270°❶，旋转前后的正方形都重合，而在平面里绕平行四边形的中心点在旋转 0°，180°时，旋转前后的平行四边形才能重合.

❶因为平面绕一个定点旋转角度 φ 和旋转角度 $360° + \varphi$ 的效果是一样的，故把它们当作相同的旋转. 特别地，我们把平面绕一个定点旋转 0°也叫作一个旋转. 此外，如无特别声明，通常把“逆时针旋转 φ”简单地说成“旋转 φ”.

抽象概括

按照上面的直观认识，我们引入下面的概念.

平面的旋转变换：将平面的每一个点绕一个定点沿某个方向旋转一个定角，对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系，称为平面关于定点的**旋转变换**，这个定点称为**旋转中心**（如图 1-5 所示）.

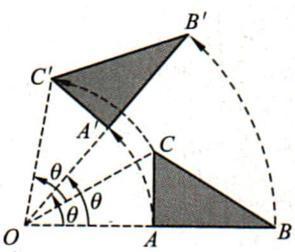


图 1-5

显然，与平面的反射变换一样，平面的旋转变换保持图形的形状和大小不变.

在平面上，如果存在关于某定点的旋转变换，使得一个图形经过该旋转变换能与自己重合，就称这个图形是**旋转对称图形**，这个定点是该图形的旋转对称**中心**，若这个旋转变换旋转的角是 θ，还称它是该图形的一个**“角为 θ 的旋转对称性变换”**，也说该图形有一个**“角为 θ 的旋转对称”.**

例如，图 1-1 的(1)有角为 0°，72°，2×72°，3×72°和 4×72°的旋转对称，图 1-4 中的正方形有角为 0°，90°，180°和 270°的旋转对称，而平行四边形只有角为 0°和 180°的旋转对称.

练　习

指出图 1-1 中哪些图形是轴对称图形，哪些是中心对称图形. 它们可以通过哪些反射变换或旋转变换来实现？

1.3　平移变换

实例分析

观察 $y=|\sin x|$ 的图像(如图 1-6 所示),我们看到,它可以由 $0\sim\pi$之间的那部分图形沿 x 轴无限多次重复排列得到.

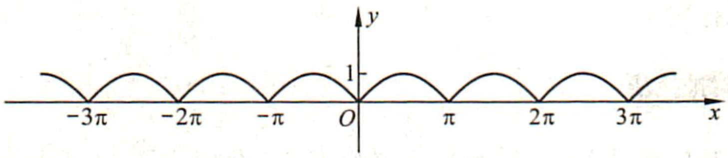
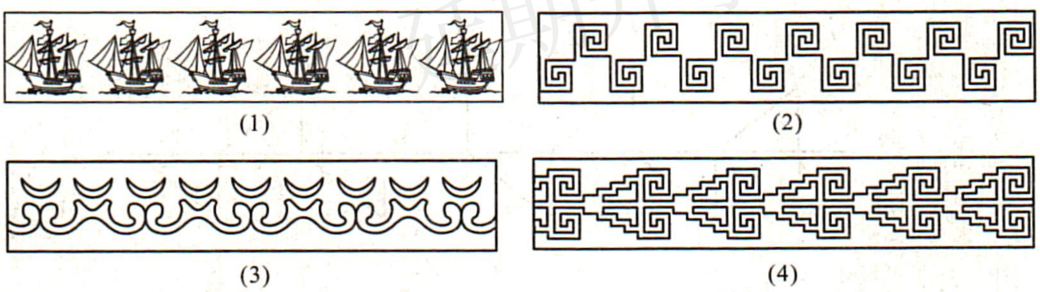


图 1-6

这种由一个有限图形(不妨叫作“基本图形”)沿一条直线无限多次重复所产生的图案称为“带型图案”或“带饰”.

带饰是向两边无限延长的,当然,实际生活中所见的仅仅是带饰的有限部分. 图 1-7 中所示的图形就是我们生活中常见到的一些带饰.



(1)　(2)　(3)　(4)

图 1-7

我们来观察图 1-7(1). 设一艘船是一个单位长,那么,在平面内沿水平直线平移任意整数个单位,平移后的图形都与原图形重合. 在初中,我们学过平移,它是将一个平面图形沿某个定方向移动一个定距离的图形运动,实际上可以看成是整个平面在运动,图形随之运动. 按照前面对于反射对称和旋转对称的直观认识,我们有理由说,图 1-7(1) 有不同于旋转和反射的另外一种对称性,即所谓平移对称性.

抽象概括

平面的平移变换:将平面的每一个点都沿某个定方向移动一个定距离,对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一种对应

关系，称为平面的一个**平移变换**（见图 1-8）．

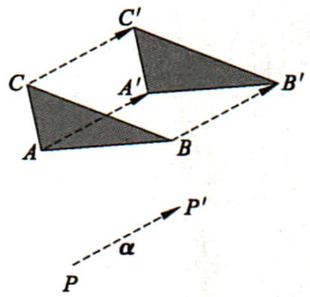


图 1-8

对于一个平移变换，任意点 P 到它平移后的对应点 P' 的向量都是相等的．因此，这个平移变换就说成“按向量 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{PP'}$ 的平移”．

平面平移变换保持图形的形状和大小不变．

在平面上，如果存在平移变换，使得一个图形通过该平移变换后能与自己重合，就称这个图形是**平移对称图形**，还称这个平移变换是该图形的一个“**平移对称性变换**”，也说该图形有一个“**平移对称**”．

1.4　滑动反射变换

实例分析

图 1-9 是沿着一条直线行走的脚印，设想它是向两个方向无限延伸的，那么，它就是一个带饰，我们来观察它的对称性．为了叙述方便，我们考虑图 1-10 所给带饰的对称性．

图 1-9

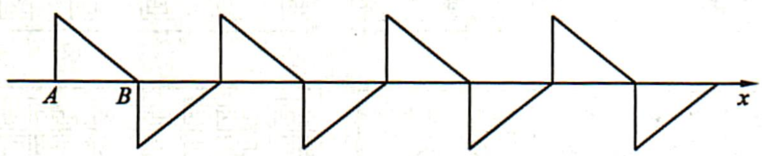


图 1-10

显然，它有无数个平移对称性变换，如果把 AB 的长度作为一个单位，那么沿 x 轴平移 $2k$ 个单位（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）都是一个平移对称．这个带饰没有反射对称．

当平面沿 x 轴平移 1 个单位，接着再关于 x 轴作反射，经这两步操作后，带饰又与自己重合．这个操作叫滑动反射操作，它是接连做两步完成的，其过程如图 1-11 所示（为了清楚追踪操作过程，其中一个三角形涂了阴影）．

显然，我们有理由说，这个带饰还有不同于旋转、反射和平移的另外的对称性，即所谓“滑动反射对称”．

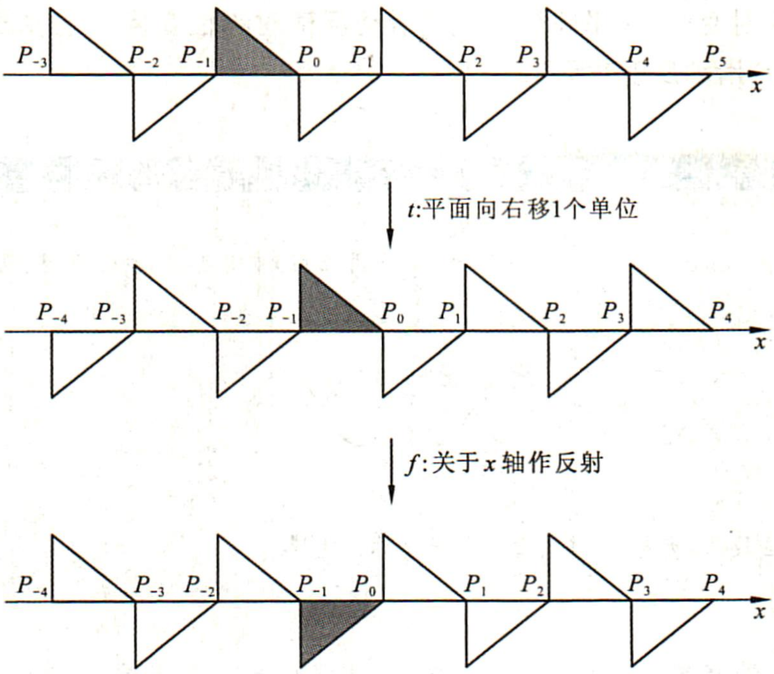


图 1-11

抽象概括

平面的滑动反射变换:将平面先沿一条直线作一个平移,接着再关于该直线作一个反射,对平面的这种操作就确定了平面上点与点之间的一个对应关系,称为平面的**滑动反射变换**(见图 1-12).

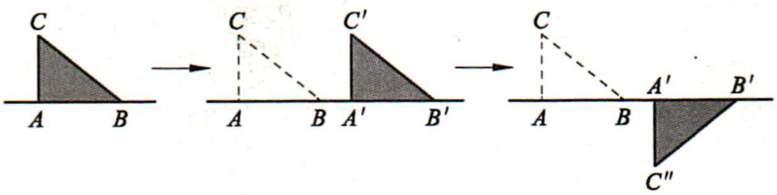


图 1-12

将平面沿一条直线先作平移再作反射与平面沿该直线先作反射再作平移,两者对平面操作的效果是一样的,因此,滑动反射变换中的反射和平移的操作次序是可以交换的(比较图 1-12 和图 1-13).

平面滑动反射变换保持图形的形状和大小不变.

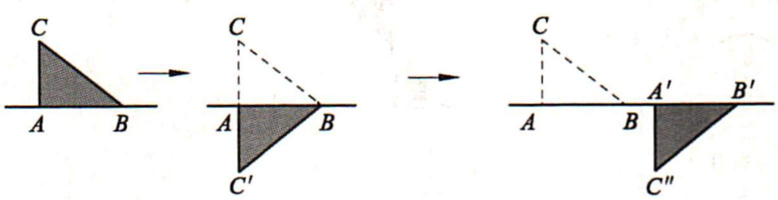


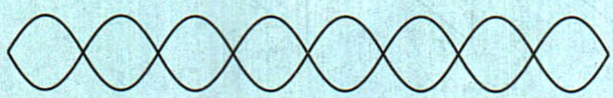
图 1-13

在平面上,如果存在滑动反射变换,使得一个图形经过该滑动反射变换后和自己重合,就称这个图形是**滑动反射对称图形**,还称这个

滑动反射变换是该图形的一个“**滑动反射对称性变换**”，也说该图形有一个“**滑动反射对称**”.

练　习

1. 讨论 $y=\pm\sin x$ 的图像（指 $y=\sin x$ 和 $y=-\sin x$ 两个图像合并而成）中是否有旋转、平移、反射或滑动反射等对称性变换.

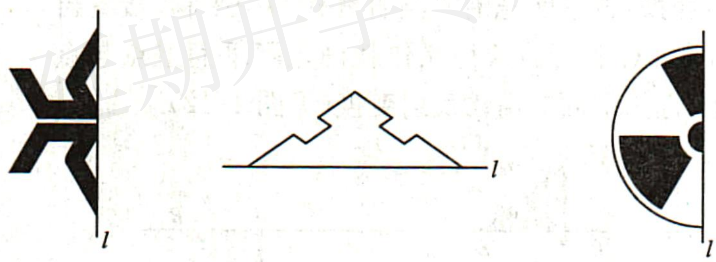


（第 1 题）

2. 讨论 $y=|\sin x|$ 的图像有哪些旋转、反射、平移或滑动反射对称性变换.

习　题　1—1

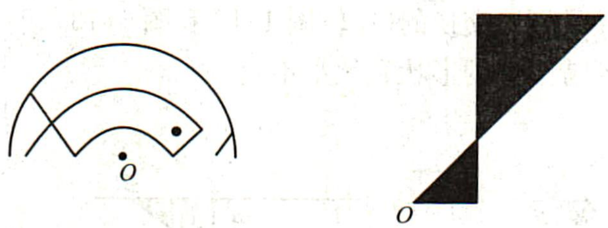
1. 下面的图形只画出了轴对称图形的一半，其中 l 为对称轴，请将另一半画出，得到完整的轴对称图形.



(1)　　(2)　　(3)

（第 1 题）

2. 指出图 1-1 中的旋转对称图形，并画出旋转中心，指出图形有哪些角度的旋转对称性变换.
3. 下面的图形只画出了旋转对称图形的一部分，其中 O 为旋转中心，请画出完整的旋转对称图形，再指出所得图形有哪些角度的旋转对称性变换.

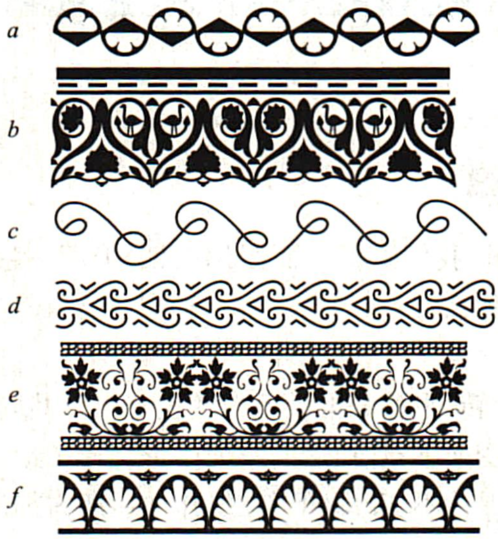


$\frac{1}{2}$部分　　$\frac{1}{4}$部分

（第 3 题）

4. 自己设计五个带饰，其中，一个只有平移对称，一个有竖直的轴对称，一个有水平的轴对称，一个有中心对称，一个有竖直的轴对称和水平的轴对称，再设计一个带饰有滑动反射对称.

5. 图形中所示的带饰是否有旋转、反射、平移或滑动反射等对称性变换？



（第 5 题）

6. 图中所示的(1)和(2)都是有滑动反射对称图形的一部分，分别从(1)和(2)出发，先对直线 l 作反射再沿直线 l 平移(平移的距离由自己设定)，画出有滑动反射对称性的图形；然后，观察所得图形有哪些反射、旋转、平移和滑动反射对称.

(1)　　　　(2)

（第 6 题）

7. 在平面沿直线 l 的滑动反射变换下，设点 P 对应点是 P'. 证明：线段 PP' 被直线 l 平分.

8. 我们都有这种经验：你的左右与你在镜中像的左右正好相反. 现在，在平面上画一个圆，并给圆定向，即用一个箭头将圆标成逆时针(或顺时针)方向，然后，垂直于平面放置一面镜子，观察镜面内外圆的方向有什么变化. 回答下列问题：

(1) 把圆换成一个顶点按逆时针(或顺时针)方向标记 $1, 2, \cdots, n$ 的多边形，观察镜面内外的多边形顶点的标记方向有什么变化，总结出结论；

(2) 在平面的反射、旋转、平移和滑动反射变换中，哪些改变圆的定向，哪些不改变呢？

§2　变换与平面图形的对称性

问题提出

在 § 1 里，我们讲了平面图形的四种对称性. 平面图形对称性的基本特点是什么？

反射、旋转、平移和滑动反射变换有以下共同的特点：

在这些变换下，变换后的平面图形与原图形重合，也就是说，图形形状和大小保持不变. 即图形在操作前后所占据的那部分空间或位置“不变”.

现在，我们抽象出平面图形对称性的一般概念.

2.1　平面的等距变换

抽象概括

直观上看，要保持图形的形状和大小不变，只需在操作平面时，保持整个平面不伸缩变形，这样，操作后的平面上，图形不会发生改变. 显然，这样的操作只要保持平面的任意两点之间距离不变就行了. 不难看出，反射、旋转、平移和滑动反射变换都能保持平面的任意两点之间距离不变.

保持平面的任意两点间距离不变的平面变换，称为(平面的)**等距变换**.

平面的反射变换、旋转变换、平移变换和滑动反射变换都是平面的等距变换.

恒等变换❶(参见第一章 § 4.1)是等距变换.

显然，在初中所学过的位似变换和相似变换都不是等距变换.

平面的等距变换保持平面上的任意两点的距离不变，这时，平面就可以想象成在任何外力下都不会发生变形的理想物体，即所谓“刚体”. 因此，平面的等距变换也叫“平面刚体运动”.

把平面的等距变换想象成平面刚体运动，就不难知道：

❶恒等变换就是使平面的每个点都保持不动的变换，它可以作为平移变换或旋转变换的特殊情况.

平面上不共线的三个点的像就唯一决定了等距变换，也就是说，如果存在平面上不共线的三个点，它们在两个等距变换下的像分别相同，则这两个等距变换必相同，即平面上每个点在这两个等距变换下的像都相同.

最后，自然要问，除去反射、旋转、平移和滑动反射变换，还有其他平面变换是等距变换吗？我们可证明，平面等距变换其实只有这四种，即：

任意一个平面等距变换必是平面的一个纯粹的平移、旋转、反射或滑动反射变换.

2.2 平面图形的对称性与对称性变换

有了平面等距变换的概念，我们就可以给平面图形的对称性下定义了.

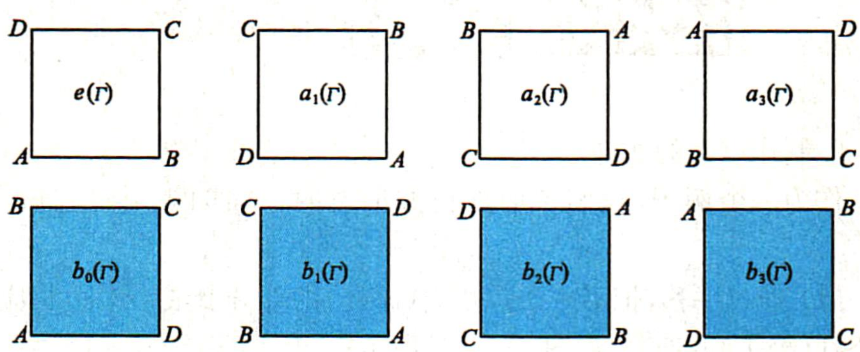
设 Γ 是一个平面图形，如果它经过平面的一个等距变换 t 后与自己重合，就称变换 t 是 Γ 的一个**对称性变换**.

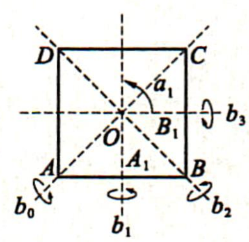
为了方便，我们通常用 $t(\Gamma)$ 表示图形 Γ 的像．用 $t(\Gamma)=\Gamma$ 来表示 $t(\Gamma)$ 与 Γ 重合.

于是，若 t 是 Γ 的一个对称性变换，那么 $t(\Gamma)$ 与 Γ 重合.

例 1 观察正方形有哪些对称性变换.

解 记正方形为 Γ，将它的顶点依逆时针方向记为 A,B,C,D，中心为 O，记边 AB 和 BC 的中点为 A_1 和 B_1，如图 1-14 的初始位置所示.





初始位置

图 1-14

Γ 在平面关于点 O 的 0°，90°，180°和 270°的旋转变换下均保持不变，故这四个等距变换都是 Γ 的对称性变换，记它们分别为 e,a_1,a_2,a_3；平面关于直线 OA,OA_1,OB 和 OB_1 的反射变换也是 Γ 的对称性变换，记它们分别为 b_0,b_1,b_2,b_3.

我们找到了正方形的 8 个对称性变换，即 $e,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3$，其中，4 个是旋转对称性变换，4 个是反射对称性变换.

（严格地讲，我们尚未证明正方形 Γ 只有这 8 个对称性变换，这放在以后证明，本节的例题和习题也都这样要求.）

注意：恒等变换不改变任何图形. 而依定义，恒等变换是任何图形的对称性变换. 因此，我们可以对任何图形谈论其对称性. 按照通常的说法，三边都不等的三角形没有任何对称性，现在，我们也说它有恒等对称性变换. 这在研究对称的运算时，会带来好处，如同把"没有书"说成"有 0 本书"，在数字运算时，会带来好处一样.

* **动手实践**

1. 观察几个有趣面饰的对称性.

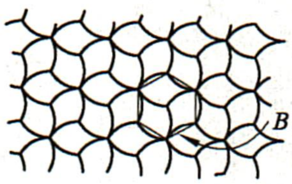


图 1-15

图 1-15 是一个向四周无限延伸的图案，你可以把它想象成正六边形地砖无限铺开的地面. 也就是说，图案的部分图形 B 沿着两个相交方向无限多次重复排列就产生了整个图案，或者说，图案是由部分图形 B 沿这两个方向分别平移所产生的，我们称这样的平面图案为"面饰".

图 1-16 是一些面饰，观察它们有哪些对称.

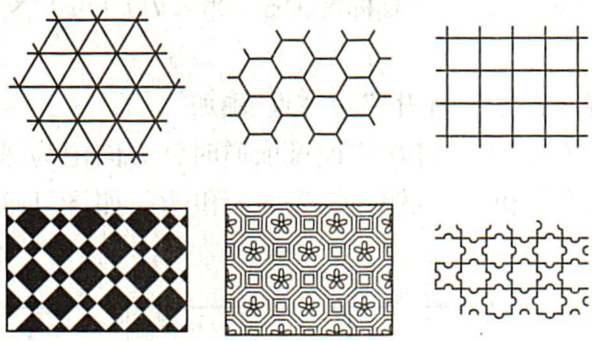


图 1-16

2. 制作有趣的面饰.

作为一个例子，我们考虑把正方形按照下面的规则对它做"挖补"：

(1) 通过平移，把沿一条边挖去（添补）的部分变成沿对边相应位置添补（挖去）的部分，如图 1-17(1)所示；

(2) 通过绕点 O 旋转 90°，180°，把沿一条边挖去（添补）的部分变成沿邻边相应位置添补（挖去）的部分，如图1-17(2)所示；

(3) 通过绕一条边的中点旋转 180°，把沿这条边某一半挖去（添补）的部分变成沿这条边另一半相应位置添补（挖去）的部分，如

图 1-17(3)所示；

(4) 通过沿正方形的一条对称轴的滑动反射，把沿一条边挖去(添补)的部分变成沿对边相应位置添补(挖去)的部分，如图 1-17(4)所示.

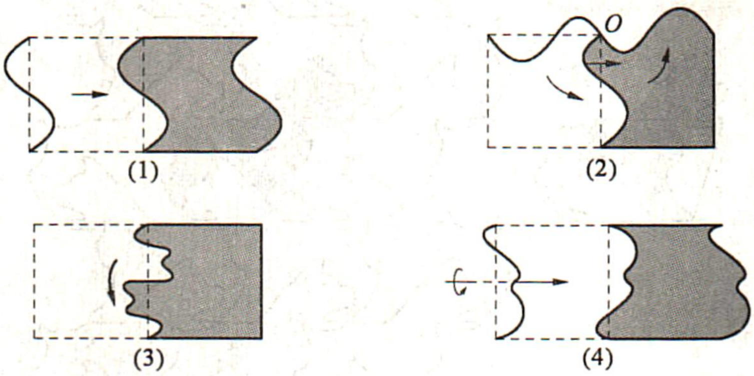
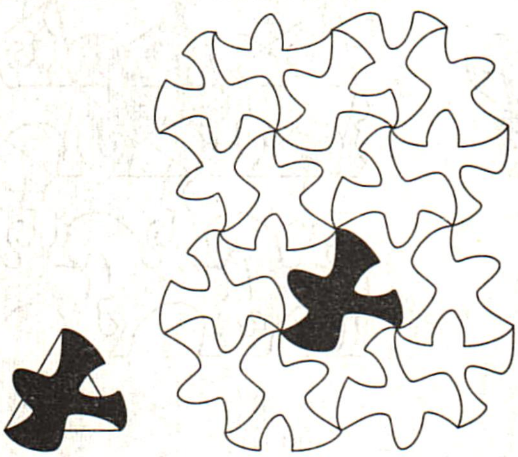


图 1-17

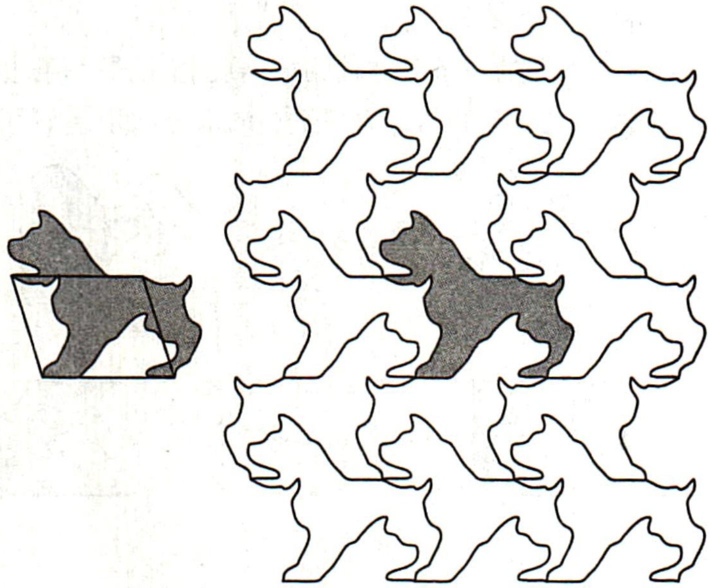
现在，用上述第一条规则做了一个如图 1-18(1)的阴影所示的基本图形，平移基本图形就得到一个面饰(如图 1-18(2)).

有兴趣的话，你可以把正方形改成平行四边形、正三角形、正六边形等图形，做类似的挖补，画出花样繁多的面饰. 我们给出几个例子供你参考，见图1-19的(1)～(4).

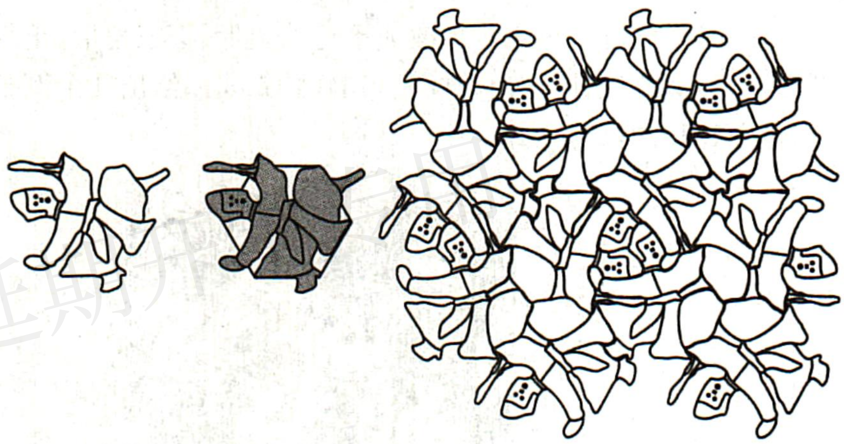
图 1-18



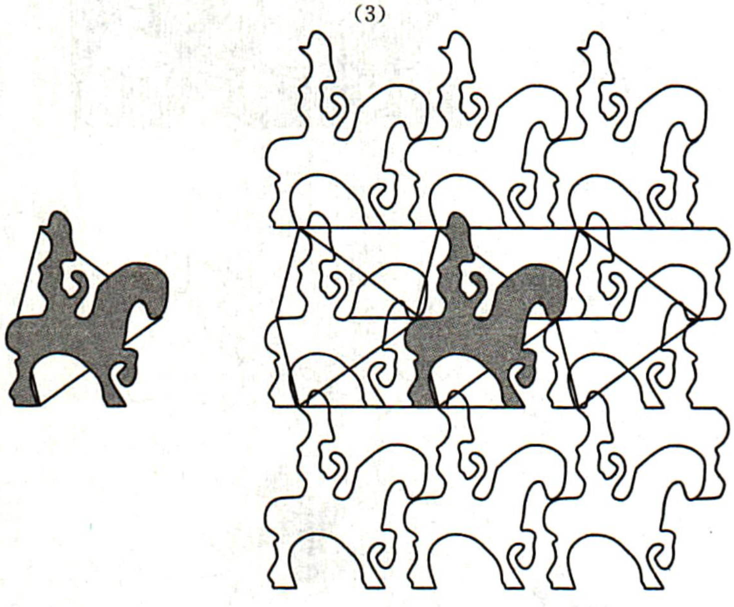
(1)



(2)



(3)

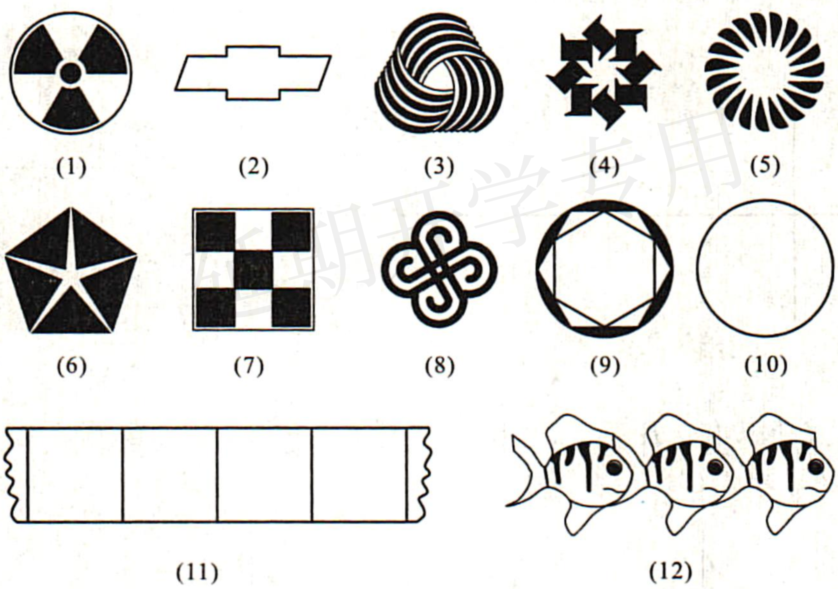


(4)

图 1-19

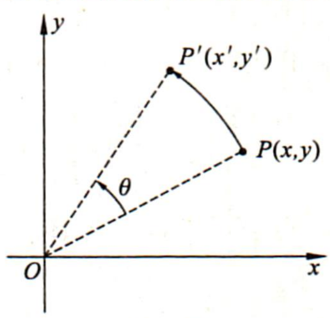
习题 1—2

1. 设 f 是沿直线 $y=x$ 的滑动反射，若 f 把点 $A(1,2)$ 变到点 $B(3,2)$，试问，f 把点 $P(x,y)$ 变到何点？
2. 设 t 是坐标平面的一个平移变换，它把点 $O(0,0)$ 变到点 $O'(h,k)$，对于任意点 $P(x,y)$，t 把它平移到哪个点，即求 $t(P)$ 的坐标.
3. 设 p 和 q 分别是将坐标平面的点向 x 轴和 y 轴作投影变换，对于任意点 $A(x,y)$，求 $p(A)$ 和 $q(A)$ 的坐标；说明 p 和 q 为什么不是等距变换.
4. 观察下列图形有哪些对称性变换：
   (1) 邻边不等的矩形；
   (2) 邻边不等且非矩形的平行四边形；
   (3) 非矩形的菱形.
5. 观察下图中的图形有哪些对称性变换（其中，(11)(12)是带饰）.



（第 5 题）

6. 设 r 是坐标平面的绕原点角为 θ 的旋转变换，求对于任意点 $P(x,y)$，r 把点 P 旋转到哪一点，求 $r(P)$ 的坐标. 然后，利用所得公式证明旋转变换是等距变换（参见下图）.



（第 6 题）

阅读材料

等距变换

请同学们阅读以下材料，思考材料中提出的问题，并与同学交流．

设 a 是任意一个等距变换，请按下列情况分类考察 a 如何变动平面的点，由此判断 a 是什么等距变换.

显然，只要考虑 a 不是恒等变换，则平面上至少有一个点 A 变到另一个点 A'. 设 B 是线段 AA' 的中点，并作 AA' 的垂直平分线 l（如图 1-20).

(1) 若 $a(B)=B$，即 a 不改变 B，分两种情况：

① 直线 l 上至少还有一点 C，使得 $a(C)=C$，即 a 不改变 C（如图 1-21). 这时，设平面关于直线 l 的反射变换为 b. 因为不共线的三个点 A，B 和 C 在变换 a 和反射 b 下分别有相同的像，故 $a=b$，即在这一情况下，a 是平面反射变换. 作为范例，在这里我们指出了 $a=b$ 的原因，以后情况由同学们分析.

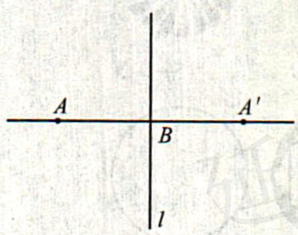


图 1-20

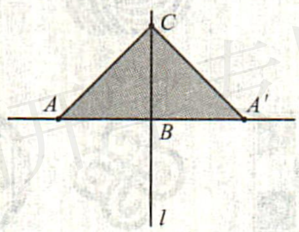


图 1-21

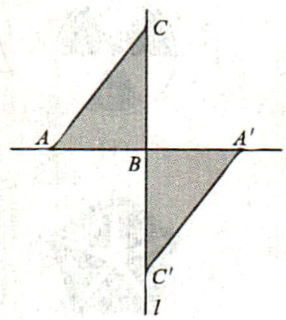


图 1-22

② 直线 l 上只有点 B 不动. 这时，在直线 l 上任取点 $C\neq B$，则点 C 变到另一点 C'（如图 1-22). 考虑 C' 必然在何处，由此判断 a 一定是平面的什么等距变换.

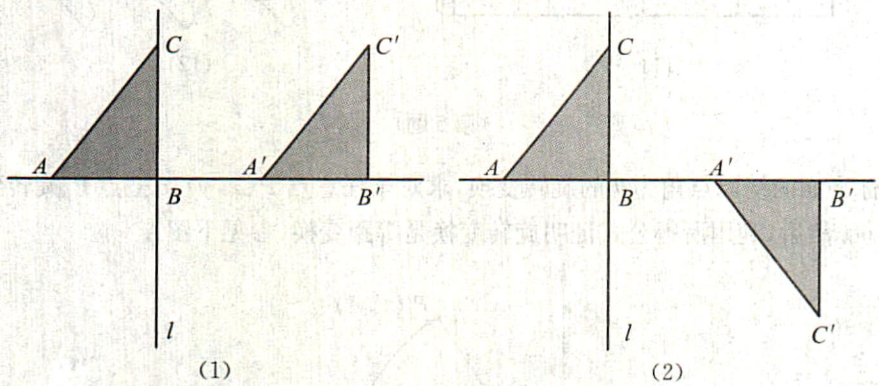


图 1-23

(2) $a(B)=B'\neq B$，即 a 改变点 B，变到了点 B'，也有两种情况：

① 若点 B' 也在过点 A 和 A' 的直线上(如图 1-23). 这时, 在直线 l 上任取点 $C\neq B$, 结合图 1-23 的(1)(2), 考虑线段 BC 变到何处, 由此判断 a 一定是平面的什么等距变换.

② 若点 B 不在过点 A 和 A' 的直线上. 由等距变换保持任意两点间的距离不变知, $B'=a(B)$ 必在以 A' 为圆心, $A'B'=AB=A'B$ 为半径的圆上, 且 $A'B'$ 不与 l 垂直, 那么过点 B' 作 $A'B'$ 的垂线必与直线 l 相交, 记交点 M(如图 1-24), 再分两种情况:

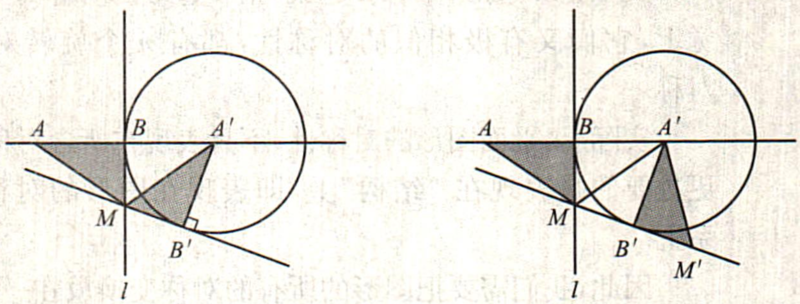


图 1-24

(a) 若点 M 不动, 即 $a(M)=M$, 由此判断 a 一定是平面的什么等距变换.

(b) 若点 M 动, 变到另一点 $M'=a(M)$, 考虑 M' 必然在何处, 由此判断 a 一定是平面的什么等距变换.

至此, 我们考虑了所有可能的情况, 故可以知道等距变换 a 的所有可能的种类.

综上所述, 证明过程如下所示:

前提: 等距变换由三个不共线的点唯一确定.

由于不是恒等变换, 则平面图形上至少有一个点 A 变到另一个点 A'.

取线段 AA' 的中点 B, 并作 AA' 的垂直平分线 l.

$$A\to A'\begin{cases} B\to B\begin{cases} l\text{上除点}B\text{有其他不动点 反射变换}\\ l\text{上只有点}B\text{是不动点 旋转变换(中心对称)}\end{cases}\\ B\to B'\begin{cases} B'\text{在}AA'\text{所在直线上}\begin{cases} C\text{与}C'\text{在}l\text{同侧 平移变换}\\ C\text{与}C'\text{在}l\text{异侧 滑动反射变换}\end{cases}\\ B'\text{不在}AA'\text{所在直线上}\begin{cases} M\to M\text{ 旋转变换}\\ M\to M'\text{ 滑动反射变换}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

§3　变换的合成

不等边矩形和图 1-1(7)都只有四个对称变换，但是，它们的对称性有很大的差异，不等边矩形有反射对称而后者没有. 可见一个平面图形所含对称的数量还不能完全反映出它的对称性.

又如正 n 边形，尽管 n 越大，正 n 边形的对称的个数越多，可是直觉上，它们又有极相似的对称性，都有 n 个旋转对称和 n 个反射对称.

实际上，平面图形的对称性，不只表现在所含对称变换的数量上，更主要的是表现在“结构”上，即表现在图形的对称变换之间的关系上.

因此，我们需要把图形的所有的对称变换放在一起构成一个集合来研究图形的对称性变换之间的关系.

3.1　变换的合成

把一个平面先绕中心 O 旋转 90°，接着再旋转 180°，其效果相当于平面绕点 O 旋转 270°. 于是，对 § 2 例 1 的正方形 Γ 而言，接连实施这样两个变换 a_1 和 a_2，相当于对 Γ 实施一个变换 a_3. 可见图形的对称性变换之间确实有联系，这个联系可以通过“接连实施两个变换”表现出来.

接连实施两个变换得到一个新的变换，就是“**变换的合成**”.

抽象概括

一般地说，设 a，b 是平面的两个变换，令 P 是平面的任意点. 如果 a 把 P 映射到 P'，b 接着把 P' 映射到 P''，那么，对平面接连实施变换 a 和 b 的操作就把 P 对应到 P''：

$$P \xrightarrow{a} P' \xrightarrow{b} P''.$$

这样的操作确定了平面的一个新变换，称为 a 与 b 的**合成**(变换)或乘积，并记为 $b \cdot a$，或省略“·”而记为 ba，也说这个操作是对 a 与 b 做了合成运算或乘法运算. ba 读作“b 乘 a”，有

$$ba:P\xrightarrow{a}P'\xrightarrow{b}P''.$$

ba 的操作过程可以画成如图 1-25 所示的变换合成图示.

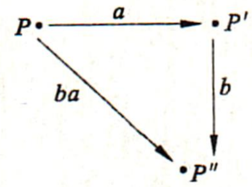


图 1-25

这个图示的意思是,从 P 到 P' 再到 P'' 的效果与从 P 直接到 P'' 的效果一样.

ba 的含义用等式表示,即

$$(ba)(P)=b(a(P)).$$

回到前面的例子,对正方形 Γ 接连实施变换 a_1 和 a_2 与对 Γ 实施一个变换 a_3 的效果是一样的,用变换的合成可表示为:$a_2a_1=a_3$.

又如,平面的滑动反射变换就是平面沿给定直线的平移变换与关于该直线的反射变换的合成.

为了方便,以下用 r_θ 表示平面绕点 O 旋转角为 θ 的旋转变换,f_l 表示平面关于直线 l 的反射变换.

我们说过,一个等距变换可由平面的不共线的三个点的像唯一确定,为了简单,这三个点常常取直角三角形的三个顶点. 在下面的例子,根据这个原理作出"变换合成的图示",我们来观察变换的乘积是四种等距变换中的哪种变换.

例 1　通过作变换合成的图示,求下列变换的乘积,指出变换的合成是四种等距变换中的哪种变换.

(1) $f_lr_{90^\circ}$,其中旋转中心 O 在给定直线 l 上;

(2) $f_{l_2}f_{l_1}$,其中 l_1 和 l_2 是相交的直线,交点为 O,从 l_1 到 l_2 方向旋转的角为 θ.

解　(1) 如图 1-26,任意作一个直角三角形 OAB,其中 OA 在直线 l 上.

对平面实施变换 r_{90°,直角三角形 OAB 绕点 O 逆时针旋转 90° 变为直角三角形 OA_1B_1;再对平面实施变换 f_l,即平面对直线 l 作反射(注意:这里所说"直线 l"总是指 l 的原始位置),直角三角形 OA_1B_1 变为直角三角形 $OA'B'$.

比较原始位置的直角三角形 OAB 和经过接连两次变换所得直角三角形 $OA'B'$ 的位置变化,利用平面几何的知识不难得知,直角三角形 $OA'B'$ 与直角三角形 OAB 关于直线 l' 对称,这里的直线 l' 是直线 l 绕点 O 按顺时针旋转 45° 得到的. 于是,平面关于直线 l' 的反射变换 $f_{l'}$ 把直角三角形 OAB 也变为直角三角形 $OA'B'$. 既然不共线的三个点 O,A,B 在 $f_lr_{90^\circ}$ 和 $f_{l'}$ 下的像一样,按照上述原理就有 $f_lr_{90^\circ}=f_{l'}$.

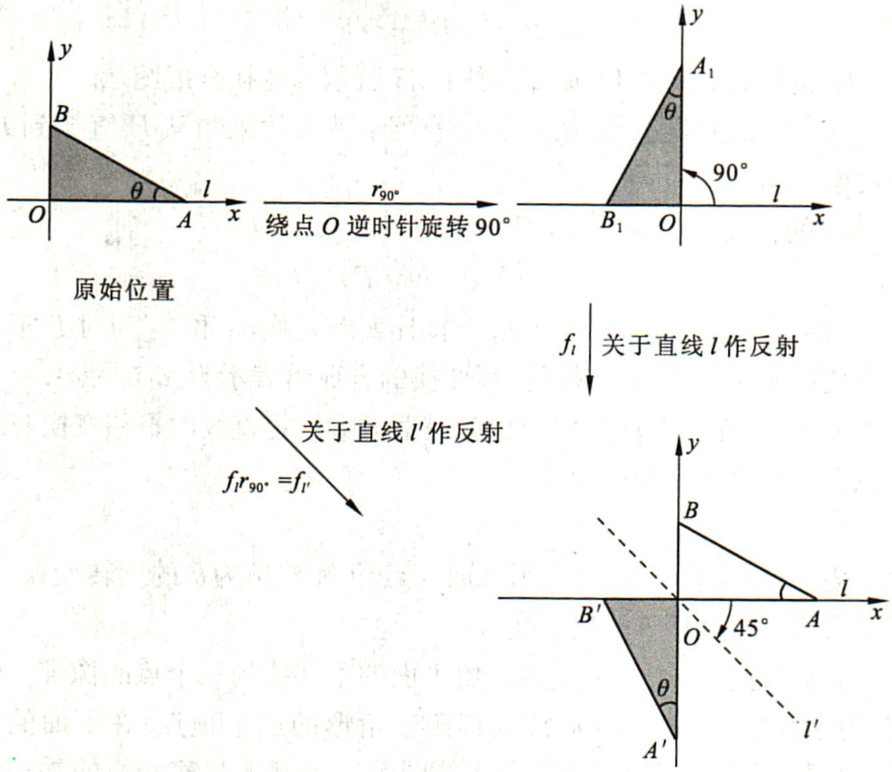


图 1-26

(2) 如图 1-27，在 l_1 和 l_2 上分别取点 A 和点 B，作一个三角形 OAB. 对平面先作变换 f_{l_1}，再作变换 f_{l_2}（仍要注意这里所说的“直线 l_1 和 l_2”总是指它们的原始位置），三角形 OAB 变为三角形 $OA'B'$.

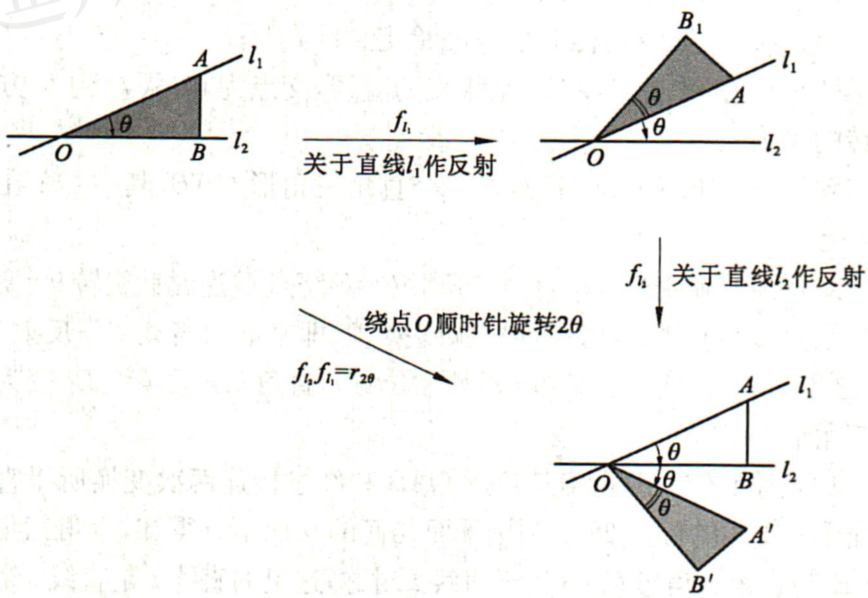


图 1-27

比较三角形 OAB 和三角形 $OA'B'$ 位置的变化可知，先后接连实施两个变换 f_{l_1} 和 f_{l_2} 的综合效果 $f_{l_2} f_{l_1}$ 恰好是三角形 OAB 绕点 O 依从 l_1 到 l_2 的方向旋转 2θ 得到的. 同理就有 $f_{l_2} f_{l_1} = r_{2\theta}$.

例 2　通过作变换合成的图示的方法，说明 $f_l r_{90°}=r_{-90°}f_l$ 成立，其中旋转中心 O 在给定直线 l 上.

解　观察变换合成的图示(如图 1-28 所示)可知等式成立.

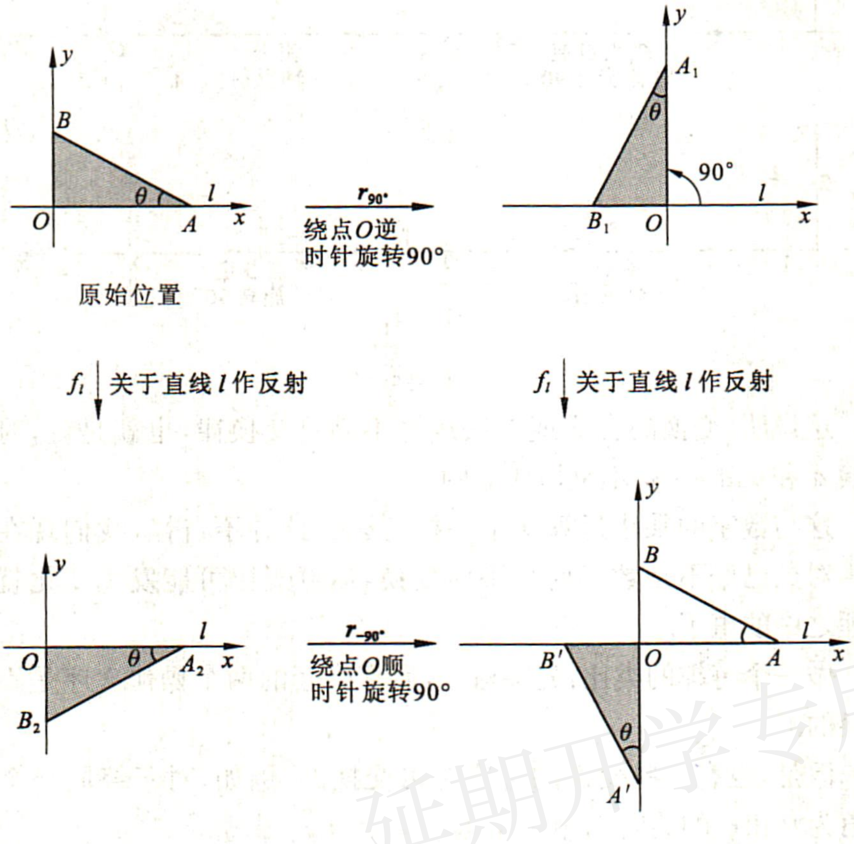


图 1-28

练　习

证明:平面的等距变换的乘积仍是等距变换.

3.2　变换乘法的运算律

数字的乘法有交换律、结合律,变换的乘法有这些运算律吗?

(1) 关于交换律

先看一个例子,如图 1-29. 设 r 是坐标平面绕原点 O 逆时针旋转 90°的变换,f 是平面对 x 轴的反射对称,对点 $A(1,2)$,显然有

$$(1,2)\xrightarrow{r}(-2,1)\xrightarrow{f}(-2,-1),$$

而

$$(1,2)\xrightarrow{f}(1,-2)\xrightarrow{r}(2,1).$$

故 $(fr)(A)\neq(rf)(A)$,即点 A 在 fr 和 rf 下的像不一样. 只要

有一个点的像不同，两个变换就不同，因此 $fr \neq rf$.

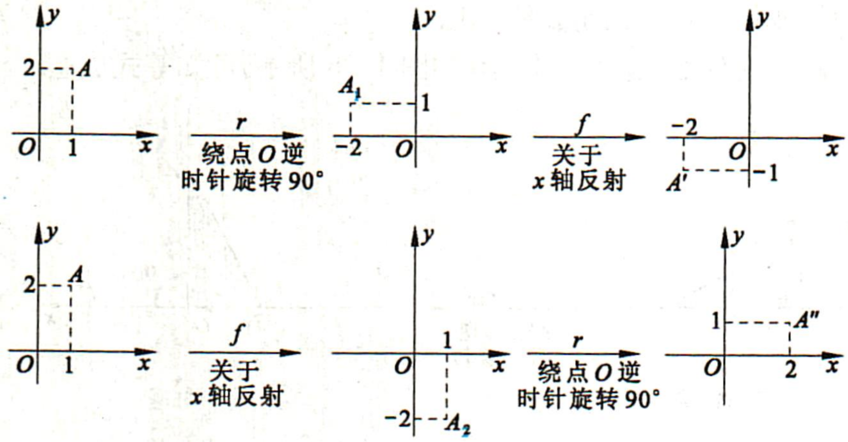


图 1-29

这说明，变换的合成或乘法运算不满足交换律，也就是说，对于变换 a 和 b，$ab=ba$ 不是恒成立的.

这与数字的乘法运算律不一样. 其实，这并不奇怪，我们现在的运算对象已经不是数字而是平面变换，运算规律可能发生变化就是情理之中的事了.

做一个有趣的类比：先穿衬衣，后穿外套的两个操作次序是不能交换的.

但是，也有一些变换的合成是可交换的. 例如，对于绕同一个点的角为 θ 和 φ 的旋转 r_θ 和 r_φ，就有 $r_\theta r_\varphi = r_\varphi r_\theta$ 成立.

既然变换的合成或乘法不满足交换律，我们就要提醒同学，对于变换的乘法，读乘积 ba 时，为了习惯，我们从左到右读作"b 乘 a"，但是运算时，务必注意对 ba 要从右到左，先操作 a 后操作 b.

(2) 关于结合律

现在来考察结合律.

我们考虑多个变换的结合律，例如，三个平面变换 a,b,c 的合成或乘积 abc.

因为变换的合成只能两个两个地来操作，所以乘积 abc 有两种操作方式，一种是先作出合成变换 bc，然后，再用它与 a 作合成；另一种是先作变换 ab，再用 c 与 ab 作合成. 我们知道，在运算次序中括号表示优先. 那么，前一种方式即为 $a(bc)$；后一种方式即为 $(ab)c$.

根据数字乘法满足结合律的经验，你可能认为 $a(bc)=(ab)c$ 成立是理所当然的. 然而，基于变换的乘法不一定满足交换律的经验，运算对象变了，运算规律可能发生变化. 因此，验证 $a(bc)=(ab)c$ 是否成立是必须的.

如图 1-30，设 a,b,c 是平面的任意变换，P 是平面的任一点，c 把

点 P 映到点 P_1，b 把点 P_1 映到点 P_2，a 把点 P_2 映到点 P_3.

那么，按第一种方式，先作乘法 bc，得 bc：$P \to P_2$，然后用 a 乘 bc，得

$$a(bc):P \xrightarrow{bc} P_2 \xrightarrow{a} P_3.$$

故 $(a(bc))(P)=P_3$.

按第二种方式，先作变换 c，得 c：$P \to P_1$，然后用 ab 乘 c，得

$$(ab)c:P \xrightarrow{c} P_1 \xrightarrow{ab} P_3.$$

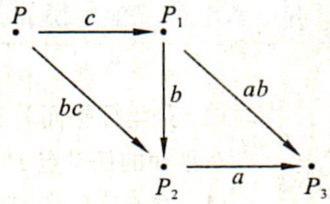


图 1-30

故 $((ab)c)(P)=P_3$. 平面的任意点在变换 $a(bc)$ 和 $(ab)c$ 下的像都一样，故 $a(bc)$ 和 $(ab)c$ 变换平面的效果一样. 因此，$a(bc)=(ab)c$ 成立. 这样，我们就证明了：

变换的合成运算或说乘法运算满足结合律，即对于平面的任意变换 a,b,c，有下式成立：

$$a(bc)=(ab)c.$$

由此，我们可以记 $abc=a(bc)=(ab)c$. 换言之，对于乘积 abc 可以以任意的方式添加括号. 变换乘法的结合律可以推广到任意多个变换的序列. 例如，对四个变换 a,b,c,d 乘积 $a(b(cd))$，$(ab)(cd)$，$a((bc)d)$，$((ab)c)d$ 都是一样的，我们可用 $abcd$ 表示这个相同的结果.

3.3　变换的乘方

我们还规定变换 a 的**乘方**

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n},$$

$$a^0=e.$$

这里，n 是正整数，e 是恒等变换.

例如，设 a 是平面绕点 O 旋转 $30°$ 的变换，那么，$a^4=aaaa$ 就是对平面接连实施 4 次变换 a，即平面绕点 O 旋转 $30°\times 4=120°$ 的变换.

练　习

设 a 是绕定点逆时针旋转 $60°$ 的变换，回答下列问题：

(1) 在集合 $C=\{a^n \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 中，有多少种不同的旋转变换？

(2) 令 $b=a^4$，在集合中 $S=\{b^n \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 中，有多少种不同的旋转变换？

(3) 令 $c=a^5$，在集合中 $S=\{c^n \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 中，有多少种不同的旋转变换？

习 题 1—3

1. 设 t 是坐标平面关于 x 轴的一个按非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0)$ 的平移，f 是关于 x 轴的一个反射变换. 对平面的任意点 $P(x,y)$，

   (1) 求点 $(tf)(P)$ 和点 $(ft)(P)$ 的坐标；

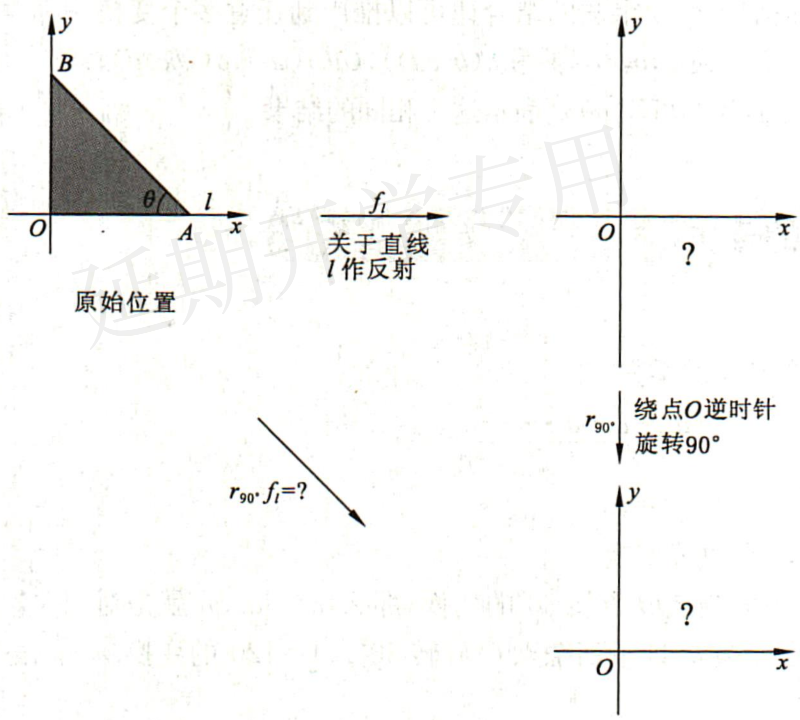
   (2) 证明滑动反射变换的定义与其中的平移和反射的次序无关.

2. 设 s 为平面按向量 $\boldsymbol{\alpha}=(h,k)$ 的平移，t 为平面按向量 $\boldsymbol{\beta}=(m,n)$ 的平移，证明：st 是平面按向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 的平移.

3. 设三角形 ABC 的顶点的坐标分别为 $(2,2)$，$(2,5)$，$(5,5)$，r 为绕原点 O 逆时针旋转 $90°$ 的变换，f 为关于直线 $y=x$ 的反射，利用三角形 ABC 作出 r 与 f 合成过程的图示，指出 fr 是何种变换，求像 $(fr)(A)$，$(fr)(B)$，$(fr)(C)$ 的坐标.

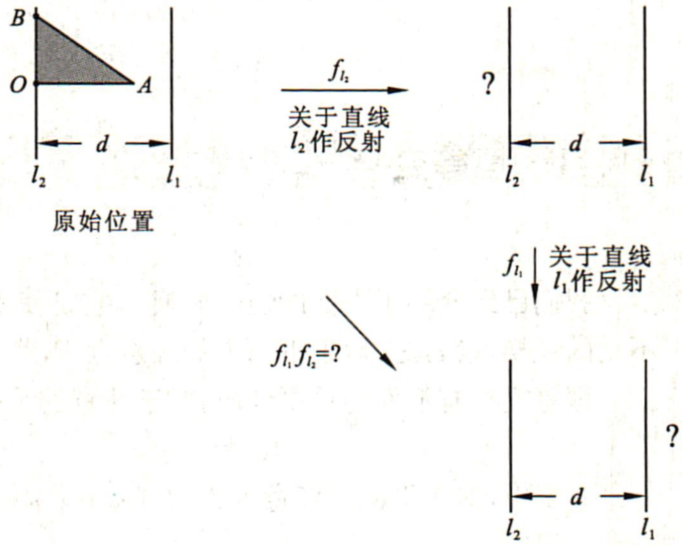
4. 通过作变换合成的图示，求下列变换的乘积.

   (1) $r_{90°}f_l$，其中旋转中心点 O 在给定直线 l 上；



(第 4 题(1))

(2) $f_{l_1}f_{l_2}$，其中直线 l_1 与直线 l_2 平行相距为 d.



(第 4 题(2))

5. 设平面直角坐标系中，点 O,A,B 分别为 $(0,0),(1,0),(0,1)$，设 a 为绕点 O 逆时针旋转 $90°$ 的等距变换.

(1) 如果 b 为绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 的变换，画出 ab 和 ba 的合成的图示，并说出它们是何种等距变换；

(2) 如果 t 为平面按向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1)$ 的平移，画出 at 和 ta 的合成的图示，并说出它们是何种等距变换；

(3) 如果 f 为平面关于直线 $y=x-1$ 的反射，画出 af 和 fa 的合成的图示，并说出它们是何种等距变换.

6. 设 l 是过点 O 的直线，r 是平面绕点 O 逆时针旋转 $90°$ 的变换，s 是平面绕点 O 顺时针旋转 $90°$ 的变换，f 是平面关于直线 l 的反射，求下列变换的乘积是何种变换：

(1) fr；　(2) fs；　(3) $frfs$；

(4) $sfrfsr$；　(5) $sfrfrfrfrfrf$.

§4　恒等变换、可逆变换

4.1　恒等变换

我们已经介绍了平面的恒等变换 e，它是使平面的每个点都保持不动的变换，换言之，对于平面上的任意点 P，都有 $e(P)=P$ 成立.

恒等变换有下面的重要性质：对于任意的平面变换 a，有

$$ea=ae=a.$$

事实上，对于平面的任意点 P，有 $(ea)(P)=e(a(P))=a(P)$，故 $ea=a$. 同理，$ae=a$.

也就是说，恒等变换 e 在变换乘法中的作用类似于数字 1 在数字乘法中的作用.

4.2　可逆变换

设 r 表示平面绕定点 O 旋转 θ，s 是平面绕点 O 旋转 $-\theta$，显然，对于平面任意点 P，如果 r 把点 P 映到点 Q，则 s 把点 Q 映回到点 P，反之亦然. 这样，rs 和 sr 使平面的每个点不动，即 $rs=sr=e$ 是平面的恒等变换. 我们就称 s 是 r 的**逆变换**，记作 $s=r^{-1}$.

一般地，对于平面变换 a，如果有平面变换 b，使得

$$ab=ba=e$$

成立，就称 a 是可逆的平面变换，b 是 a 的**逆变换**，记为 $b=a^{-1}$. 同样，a 也是 b 的逆变换，即 $a=b^{-1}$.

如果 a 是可逆的，就有

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e.$$

对于可逆变换 a，因为 a 和 a^{-1} 互为逆变换，故

$$(a^{-1})^{-1}=a.$$

可逆变换在变换乘法中的作用，类似于非零数字 a 的倒数 $\frac{1}{a}$ 在数字乘法中的作用.

对于任何一个平面等距变换 m，若把 m 直观地想象成作为平面刚体的一个运动，显然，这个运动相反过程的操作也是一个等距变换，并且，这两个相反运动的合成是平面的一个恒等运动.

因此，平面等距变换是可逆变换，并且它的逆变换也是等距变换.

下面的事实是显然的：

(1) 平面绕定点旋转 α 的逆变换是绕该点旋转 $-\alpha$ 的旋转变换；

(2) 平面关于定直线的反射的逆变换是这个反射本身；

(3) 平面按向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平移的逆变换是按向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ 的平移变换；

(4) 平面沿直线的滑动反射的逆变换是沿该直线的滑动反射变换，其中平移部分是实施相反的向量的平移变换.

并非所有变换都是可逆的，例如，把平面上的所有点都变为一个固定点，这个变换不是可逆变换.

若 a 是可逆变换，我们把连续实施 n 次逆变换 a^{-1} 的变换 $(a^{-1})^n$，记作 a^{-n}，即 $a^{-n}=(a^{-1})^n$.

例如，若 a 是绕定点逆时针 30°的旋转，则 a^4 就是逆时针 120°的旋转，a^{-4} 是顺时针 120°的旋转.

不难证明，对于任意的整数 m,n，有

$$a^m a^n=a^{m+n},(a^m)^n=a^{nm}.$$

例如，设 a 是绕定点逆时针旋转 30°的变换，则 a^7 和 a^{-3} 分别是绕定点逆时针旋转 210°和顺时针旋转 90°的变换，那么，合成 $a^7\cdot a^{-3}$ 是绕定点先顺时针旋转 90°，再逆时针旋转 210°，合成的综合效果是绕定点逆时针旋转 $210°+(-90°)=120°$，即作变换 a^4，这正好是关系式 $a^7a^{-3}=a^{7+(-3)}=a^4$.

问题提出

对于两个可逆变换 a 和 b，乘积 ab 是否是可逆的？如果可逆，它与各自的逆变换 a^{-1} 和 b^{-1} 是什么关系？

分析理解

比如，穿衣服时，先穿衬衣后穿外套，它的逆过程是先脱外套后脱衬衣.

从合成的图示 1-31，不难看出，以下关系成立：

$$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}.$$

定理　设 a 和 b 都是可逆变换，则 ab 是可逆的，且 ab 的逆变换可以表示为

$$\boxed{(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}.}$$

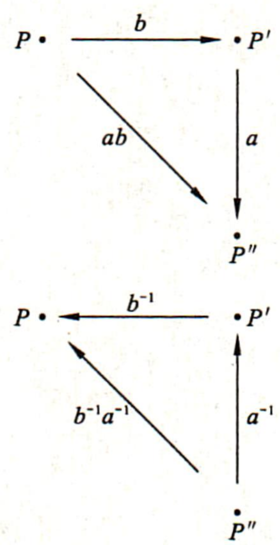


图 1-31

证明 根据变换的结合律以及可逆变换、恒等变换的性质，有：

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=aea^{-1}=aa^{-1}=e,$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}(a^{-1}a)b=b^{-1}eb=b^{-1}b=e.$$

根据可逆变换的定义，知$(ab)^{-1}$是可逆的，并且$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

练 习

证明：$(abc)^{-1}=c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.

习 题 1—4

1. 已知 a，b 都是可逆变换，求 ab^{-1}的逆变换.
2. 讨论恒等变换 e 的可逆性.
3. 设 l 是过点 O 的直线，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 l 平行，f 是平面关于直线 l 的反射变换，r 是平面绕点 O 转 θ 的旋转变换，t 是平面移动 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平移变换，s 是平面沿直线 l 移动 $\boldsymbol{\alpha}$ 的滑动反射变换，问：fr，rf，ft，sf，st 的逆变换各是什么变换？
4. 设 $a=f_lt$ 是滑动反射，其中，f_l 是关于直线 l 的反射，t 是沿直线 l(非恒等)的平移，证明：

   (1) 滑动反射 a 的逆变换是 f_lt^{-1}；

   (2) $a^2=t^2$，即 a^2 是沿直线 l 的一个平移.
5. 设 s，t 分别是平面沿 x 轴平移$+3$ 和-3 的平移变换，p 是平面向 y 轴的投影变换，仿照图 1-29 的合成图示，验证 $ps=pt$ 成立，但是 $s=t$ 不成立.

复 习 题 一

1. 讨论 $y=\pm\cos x$ 的图像(指 $y=\cos x$ 和 $y=-\cos x$ 两个图像合并而成)有哪些对称性变换.
2. 指出正三角形、正五边形、正六边形有哪些对称性变换.
3. 设 f 是沿直线 $y=0$ 的一个滑动反射,若 f 把点 $A(-1,2)$ 变到 $B(1,-2)$,试问:f 把点 $C(0,1)$ 和点 $D(x,y)$ 各变到何点?
4. 设正方形 $ABCD$ 的顶点的坐标分别为 $(1,-1)$,$(3,-1)$,$(3,-3)$,$(1,-3)$,t 是关于直线 $y=0$ 的反射,r 为绕原点逆时针旋转 $90°$ 的变换,f 为关于直线 $y=x$ 的反射. 利用正方形 $ABCD$ 作出 t 与 r 再与 f 合成过程的图示,求像 $(frt)(A)$,$(frt)(B)$,$(frt)(C)$,$(frt)(D)$ 的坐标.
5. 已知 a,b,c 都是可逆变换,求 $a^{-1}bc^{-1}$,$ab^{-1}c^{-1}$,$a^{-1}bc$ 的逆变换.
6. 设 r 是绕原点逆时针旋转 $180°$ 的变换,p 是平面向 x 轴的投影变换. 仿照图 1-31作出合成图示,验证 $pr=p$.

第二章 平面图形的对称群

本章我们将提出平面图形的对称群的概念，并用它来研究有向正多边形以及一般正多边形的对称性.

§1 平面图形的对称群

我们已经给出了平面图形的对称性的定义，并且认识到变换的合成可以反映图形的对称性之间的关系. 因此，一个平面图形的全体对称性变换应当作为一个整体来进行研究. 它有下面的性质：

设 Γ 是一个平面图形，记 G 为由 Γ 的全体对称变换组成的集合，如果 G 中的元素对于变换的乘法运算满足下面的四条定律：

(1) **封闭律**：Γ 的任意两个对称性变换的乘积仍是 Γ 的对称性变换；

(2) **结合律**：对于 G 中的任意三个对称性变换 a,b,c，有 $(ab)c=a(bc)$ 成立；

(3) **有恒等元**：恒等变换 e 是 Γ 的对称性变换；

(4) **有逆元**：Γ 的每个对称性变换的逆变换也是 Γ 的对称性变换.

这时，我们说，Γ 的全体对称性变换组成的集合 G，对于变换的乘法运算构成了一个**群**，称为 Γ 的**对称群**.

图形 Γ 的对称群刻画了这个图形的所有对称性.

在第一章 §3 中，我们已经证明了任何变换的乘法总有结合律，§4 中提到了恒等变换是任何图形的对称性变换，因此只要再验证 (1) 和 (4).

(1) 设 a 和 b 是平面图形 Γ 的两个对称性变换，则 $a(\Gamma)=\Gamma$，$b(\Gamma)=\Gamma$，于是 $(ab)(\Gamma)=a(b(\Gamma))=a(\Gamma)=\Gamma$，故 ab 是 Γ 的对称性变换.

(4) 设 g 是 Γ 的任意一个对称性变换，则 $g(\Gamma)=\Gamma$. 如第一章 §4 所

述，g 有逆变换，它也是等距变换且 $g^{-1}g=gg^{-1}=e$ 成立. 一方面，由(3)知，$(g^{-1}g)(\Gamma)=e(\Gamma)=\Gamma$ 成立，另一方面，$(g^{-1}g)(\Gamma)=(g^{-1})(g(\Gamma))=(g^{-1})(\Gamma)$，因此，$(g^{-1})(\Gamma)=\Gamma$，故 g^{-1} 是 Γ 的对称性变换.

对称群 G 中所有对称性变换的个数称为对称群 G 的**阶**，记作 $|G|$.

实例分析

例如，腰与底不等的等腰三角形的对称群是 $G=\{e,f\}$，其中，f 是关于底边的垂直平分线的反射变换.

又如，三条边都不等的三角形的对称群是 $G=\{e\}$.

恒等变换是任何一个平面图形的对称性变换，因此，我们可以对于任何一个平面图形谈论它的对称群，这个群至少包含一个元素，即恒等变换 e.

如果一个图形的对称群是 $\{e\}$，即只包含恒等变换 e，我们就说这个图形的对称群是**平凡群**，实际上，按照通常的说法，这个图形没有任何的对称性.

例 1　求邻边不等且非矩形的平行四边形的对称群.

解　考虑邻边不等且非矩形的平行四边形 Γ，将它的顶点依逆时针方向记为 A,B,C,D，中心记为 O，如图 2-1 所示.

显然，Γ 有如下的两个对称性变换，即平面的恒等变换 e（如图 2-1(1)）和平面的绕平行四边形中心 O 角度为 180° 的旋转变换 r（如图 2-1(2)）.

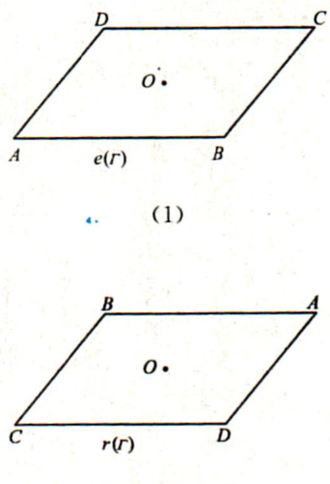


图 2-1

现在，我们来说明 Γ 不再有其他对称性变换，为此只要证明 Γ 至多有 2 个对称性变换.

设 t 是 Γ 的任意一个对称性变换，显然，它使平行四边形中心 O 保持不变，于是，$t(A)$ 和 $t(B)$ 就能完全确定 t. 因为 $t(\Gamma)$ 与 Γ 重合，故 t 把 Γ 的顶点变成 Γ 的顶点. 然而，因为 $\angle A\neq\angle B$，故只可能 $t(A)=A$ 或 $t(A)=C$. 对 $t(A)$ 的每一种可能，再根据 $|t(A)t(B)|=|AB|\neq|BC|$ 知，只能 $t(A)=A$ 时，$t(B)=B$，或 $t(A)=C$ 时，$t(B)=D$. 综上所述，对 $t(A)$ 的每种可能，$t(B)$ 也只有 1 种可能，故 $t(A)$ 和 $t(B)$ 的组合共有 $2\times1=2$ 种可能. 故 Γ 最多有 2 个对称.

于是，邻边不等且非矩形的平行四边形 Γ 有且只有 2 个对称性变换，故它的对称群是 $G=\{e,r\}$.

例 2　求正三角形的对称群，然后指出每个元素的逆元.

解　考虑正三角形 Γ，将它的顶点依逆时针方向记为 1，2，3，

边 1－2的中点记为 $1'$，中心记为 O，如图 2-2 所示.

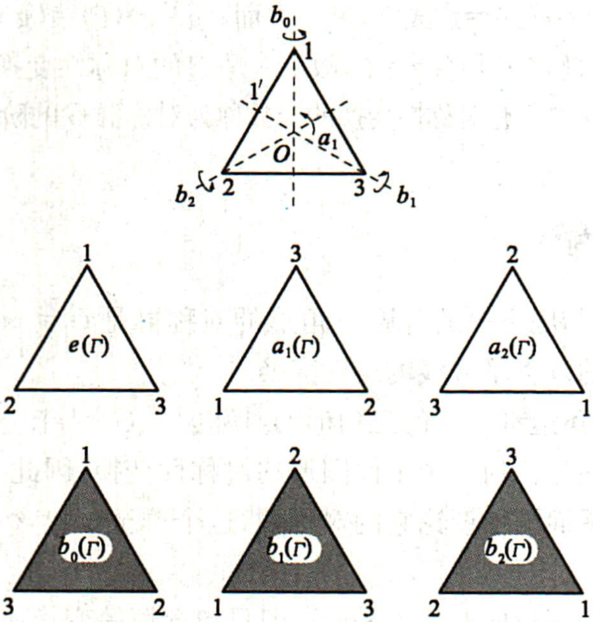


图 2-2

显然，上面的六个等距变换都是 Γ 的对称性变换，即平面绕点 O 的 $0°$，$120°$，$240°$的旋转变换（记它们分别为 e，a_1，a_2）以及平面关于直线$O－1$，$O－1'$，$O－2$ 的反射变换（记它们分别为 b_0，b_1，b_2，注意它们分别是对三角形原始位置下的 $O－1$，$O－1'$，$O－2$ 轴的反射变换）.

现在，我们来说明 Γ 不再有其他对称，为此只要证明 Γ 至多有 6 个对称.

设 t 是正三角形 Γ 的任意一个对称性变换，显然，它使中心 O 不变，于是，像 $t(1)$和 $t(2)$就能完全确定 t. 因为 $t(\Gamma)=\Gamma$，即 $t(\Gamma)$与 Γ 重合，从而 t 把 Γ 的顶点变成了 Γ 的顶点，即 $t(1)=1,2$ 或 3，故 $t(1)$ 有 3 种可能. 对 $t(1)$的每一种可能，$t(2)$有 2 种可能，即与 $t(1)$相邻的两个顶点，故 $t(1)$和 $t(2)$的组合共有 $3\times2=6$ 种可能. 因此，t 有 6 种可能，故正三角形最多有 6 个对称.

于是，Γ 有且只有 6 个对称，记它的对称群为 D_3，正三角形的对称群是：

$$D_3=\{e,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2\}.$$

每个元素的逆元如下：

$$e^{-1}=e,a_1^{-1}=a_2,a_2^{-1}=a_1;b_0^{-1}=b_0,b_1^{-1}=b_1,b_2^{-1}=b_2.$$

用完全相同的方法可知：

正 n 边形有 n 个旋转对称变换和 n 个反射对称变换，它的对称群记为 D_n.

习题 2—1

1. 仿照例 2，求正方形的对称群 D_4，并指出它的每个元素的逆元(请将正方形的顶点依逆时针方向记为 1,2,3,4，边 1—2 和边 2—3 的中点分别记为 $1'$ 和 $2'$，中心记为 O).
2. 仿照例 2，求正五边形的对称群 D_5，并指出每个元素的逆元.
3. 求邻边不等的矩形的对称群，并指出每个元素的逆元.
4. 阅读以下材料，体会对称群在自然界中的作用.

阅读材料 1

带饰的对称群称为“带群”．不同的带饰图案可以有本质上相同的对称性，也就是有相同的带群. 带饰图案的个数是无限的，但是，带群的个数是有严格限制的. 事实上，可以证明只有 7 种带群，也就是说，无数个带饰图案可以变化万千，但是，它们只有 7 种本质上不同的对称性，图 2-3 代表了这 7 种带饰.

你能发现它们的对称性有何不同吗?

面饰的对称群称为“面饰群”或“平面晶体群”.

面饰图案花样繁多有无数个，但是，面饰群的个数是有严格限制的. 面饰的旋转对称是不能随意的.

面饰可能的旋转对称只有 5 种，即 0°,60°,90°,120°,180°的旋转，这就是所谓的“晶体对称性定律”. 事实上，可以证明只有 17 种面饰群.

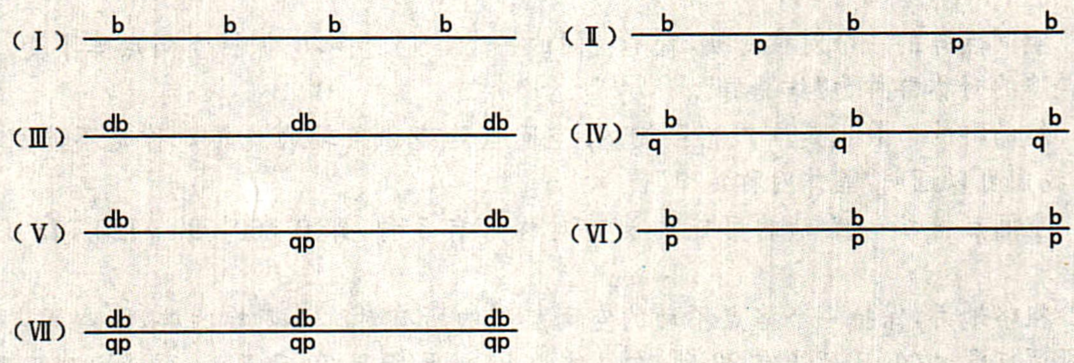


图 2-3

这就是说，面饰图案可以变化万千，但是，它们只有 17 种本质上不同的对称性.

阅读材料2

群论在晶体物质对称性结构的研究中起了非常重要的作用.

晶体材料是由原子、离子、离子团、分子或分子团等微粒按一定的方式排成的空间点阵,在这个点阵中可以找到晶体的最基本的单位,称为晶格.整个空间点阵相当于晶格在空间的三个不共面的方向上无限多次地重复排列而成.

例如,食盐晶体的晶格就是正六面体(如图 2-4).

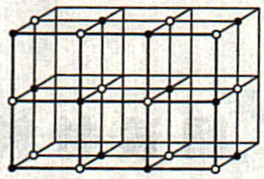
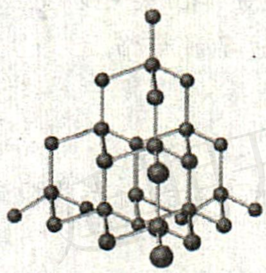
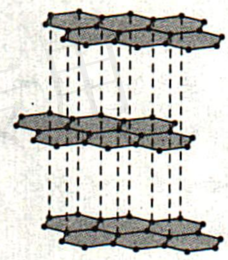


图 2-4

又如,金刚石与石墨都是由碳原子构成的,但是,它们有不同的晶体结构,如图 2-5(1)和(2)所示,这就决定了这两种物质的某些物理性质的差异,例如,金刚石有极强的硬度,而石墨的可裂性和可压缩性就大得多.



(1)
金刚石



(2)
石墨

图 2-5

空间点阵的一个对称变换,就是空间的一个等距变换,它保持空间点阵不变.空间点阵的对称群称为“结晶群”.

结晶群的个数也是有严格限制的.空间点阵绕一条轴的旋转对称是不能随意的,我们可以证明“晶体对称定律”:

空间点阵绕一条轴的可能的旋转对称只有 5 种,即 0°,60°,90°,120°,180°的旋转.

粗略地讲,保持一个格点不动的空间点阵的所有对称性变换的群,即空间点阵的所谓点群,它们只可能有 32 种,在晶体学上,就是所谓 32 种晶类;再考虑到平移,整个空间点阵只可能有 230 种结晶群.

这个结果是在 19 世纪末,由费多洛夫、舍福里斯和巴罗各自独立得出的.用 X 射线束照射晶体,X 射线被由原子或离子组成的单位晶格衍射,在胶片上形成衍射点,用这些衍射点的图像和结晶群的知识就可以计算出原子或离子的排列形状.

结晶群的理论是群论在其他自然科学的首次重大应用,它也推动了群论本身的发展.

§2　有向正多边形的对称群

问题提出

观察图 2-6，它有 5 个旋转对称.

图 2-6

作为这类图形的数学模型，我们来考虑“有向正多边形”，也就是，按照逆时针对正多边形的所有边都赋予了方向(或按照顺时针对正多边形的所有边都赋予了方向).

不难看出，有向正 n 边形有 n 个旋转对称. 对此，我们提出两个问题：

(1) 有向正 n 边形是否只有这 n 个旋转对称?

(2) 这 n 个对称之间有什么联系?

实例分析

例 1　设 Γ 是有向正五边形，如图 2-7 所示，求 Γ 的对称群以及每个元素的逆元.

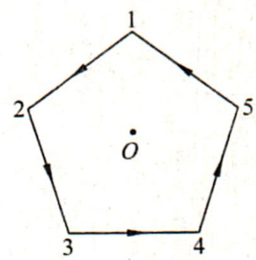


图 2-7

解　依逆时针方向记 Γ 的顶点为 1，2，3，4，5，中心为点 O.

首先，令 a 为绕中心点 O 逆时针旋转 $\frac{1}{5}\times360^\circ=72^\circ$ 的对称变换，则 $a^0=e$，$a^1=a$，a^2，a^3，a^4 分别为绕中心 O 逆时针旋转 0°，72°，$72^\circ\times2$，$72^\circ\times3$，$72^\circ\times4$ 的对称变换，它们是 Γ 的 5 个旋转对称.

其次，设 t 是 Γ 的任意一个对称，则 t 由 $t(1)$ 和 $t(2)$ 完全确定. 因为 $t(\Gamma)$ 与 Γ 重合，故 t 把 Γ 的顶点变成 Γ 的顶点，即 $t(1)=1,2,3,4$ 或 5，即 $t(1)$ 只有 5 种可能. 对 $t(1)$ 的每一种可能，$t(2)$ 只有 1 种可能，即沿逆时针方向 $t(1)$ 的下一个点. 于是，$t(1)$ 和 $t(2)$ 的组合共有 $5\times1=5$ 种可能. 因此，t 有 5 种可能，故图案 Γ 最多有 5 个对称.

综合起来，Γ 有且只有 5 个对称，记它的对称群为 C_5，那么

$$C_5=\{e,a,a^2,a^3,a^4\}.$$

在有向正五边形的对称群 C_5 中，对称变换 a 是最基本的，对称群 C_5 的所有元素都是 a 的方幂.

显然，还有关系：$a^5=e$. 对于 C_5 的元素之间的关系，$a^5=e$ 又是最基本的. 事实上，有了它我们可以很方便地计算任何两个元素 a^m

和 a^n 的乘积以及求每个元素的逆元.

例如:$(a^2)^{-1}=a^{-2}=a^{5-2}=a^3$;$a^4a^3=a^{4+3}=a^7=a^{5+2}=a^2$.

一般地,有 $(a^n)^{-1}=a^{5-n}$,而计算 $a^ma^n=a^{m+n}$ 时,只要用 5 去除 $m+n$ 取余数作为 a 的指数就可以了,其中 $m,n\in\{0,1,2,3,4\}$.

C_5 中各个元素的逆元为:

$e^{-1}=e$, $a^{-1}=a^{5-1}=a^4$, $(a^2)^{-1}=a^{5-2}=a^3$,

$(a^3)^{-1}=a^{5-3}=a^2$, $(a^4)^{-1}=a^{5-4}=a$.

图形的对称之间的合成可以用“群的乘法表”列出.

表 2-1　C_5 的乘法表

$\cdot$	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a	a^2	a^3

例 2　写出有向正方形的对称群 C_4 的所有元素,求各元素的逆元,作出 C_4 的乘法表.

解　设 b 是绕正方形中心 90° 的旋转变换,就有 $C_4=\{e,b,b^2,b^3\}$. 注意 $b^4=e$,得 $e^{-1}=e$,$b^{-1}=b^{4-1}=b^3$,$(b^2)^{-1}=b^{4-2}=b^2$,$(b^3)^{-1}=b^{4-3}=b$,C_4 的乘法如表 2-2.

表 2-2　C_4 的乘法表

$\cdot$	e	b	b^2	b^3
e	e	b	b^2	b^3
b	b	b^2	b^3	e
b^2	b^2	b^3	e	b
b^3	b^3	e	b	b^2

思考交流

在图 2-8 的图案中,选择一种,写出它对应的群的所有元素及乘法表.

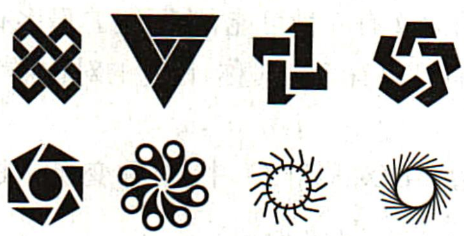


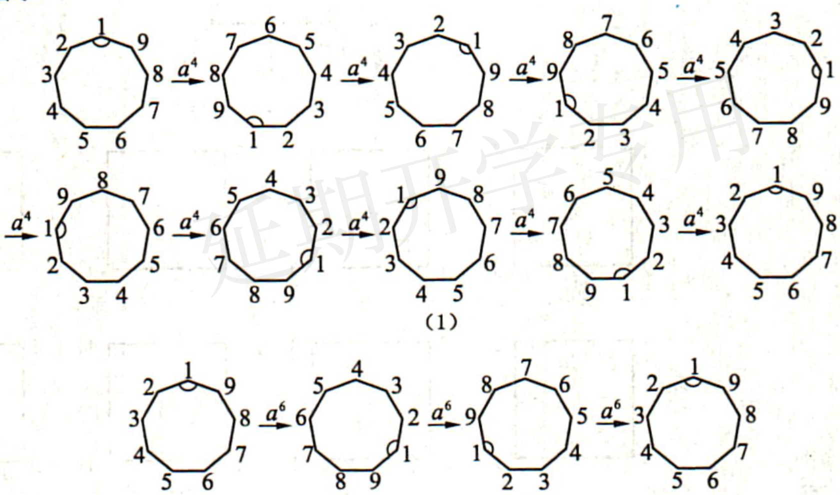
图 2-8

练　习

1. 60°的旋转变换生成的群都可以由哪些元素生成？求各元素的逆元.
2. 作出 6 阶旋转变换 a 生成的 6 阶群的乘法表，并指出每个元素的逆元.

习题 2—2

1. 设 C_{10} 是由 36°的旋转变换生成的，写出 C_{10} 的所有元素以及群的乘法表，并指出每个元素的逆元.
2. 设 C_8 是由 45°的旋转变换生成的，试问，除了 a 可以生成 C_8，C_8 中还有哪些元素可以生成 C_8，即由这个元素的方幂可以得到 C_8 的所有元素？
3. 在图 2-8 中，选择两个图案，写出对应群的所有元素和乘法表.
4. 有向边构成的正五边形 Γ 的对称群是由 72°的旋转变换生成的群 C_5，仿照下图，画出 a^2 的方幂变换 Γ 的图示.



（1）

（2）

（第 4 题）

§3　正多边形的对称群

问题提出

在本章第一节的习题里，我们已得到了正方形的对称群 D_4.

例如，记正方形 Γ 的顶点按逆时针方向分别为 1，2，3，4，记边 1－2和边 2－3 的中点为 $1'$和 $2'$，中心为 O，如图 2-9 所示.

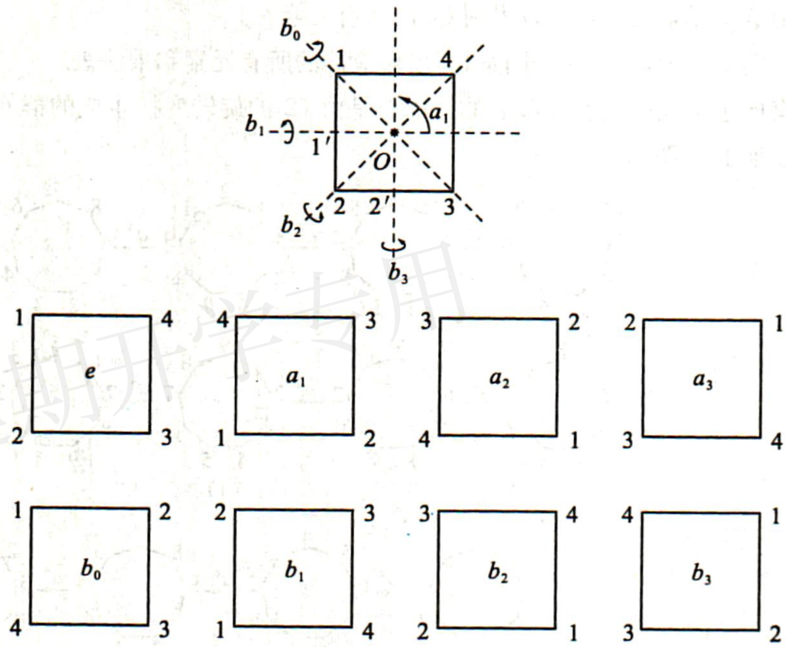


图 2-9

$D_4=\{e,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3\}$，其中，$e,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2$ 和 b_3 分别是正方形绕中心 0°，90°，180°和 270°的旋转对称以及关于直线 $O-1$，$O-1'$，$O-2$ 和 $O-2'$的反射对称(注意，它们分别是对正方形原始位置下关于直线 $O-1$，$O-1'$，$O-2$ 和 $O-2'$的反射).

那么，这 8 个对称变换有什么关系呢？

实例分析

首先，考察 D_4 中哪些元素是最基本的，即找出可以合成出 D_4 的所有元素.

为方便起见，记绕中心 90° 的旋转对称 $a_1=a$，关于直线 $O-1$ 的反射对称 $b_0=b$. 那么，$e=a^0$，$a_1=a$，$a_2=a^2$，$a_3=a^3$.

我们先看下面的变换合成的图示 2-10.

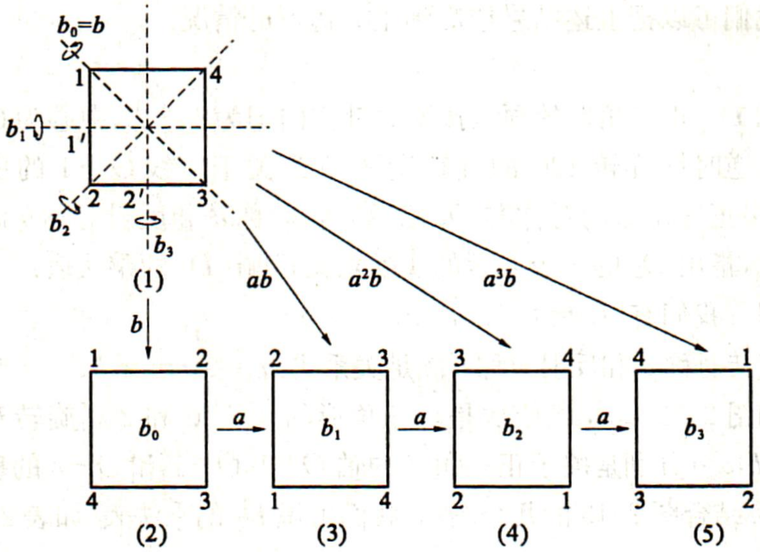


图 2-10

比较图 2-10 中的(1)和(3)知：$b_1=ab$；

比较图 2-10 中的(1)和(4)知：$b_2=a^2b$；

比较图 2-10 中的(1)和(5)知：$b_3=a^3b$.

这就得到：$D_4=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$.

可见，旋转变换 a 和反射变换 b 是最基本的，它们生成了 D_4.

其次，看下面的变换合成的图示 2-11.

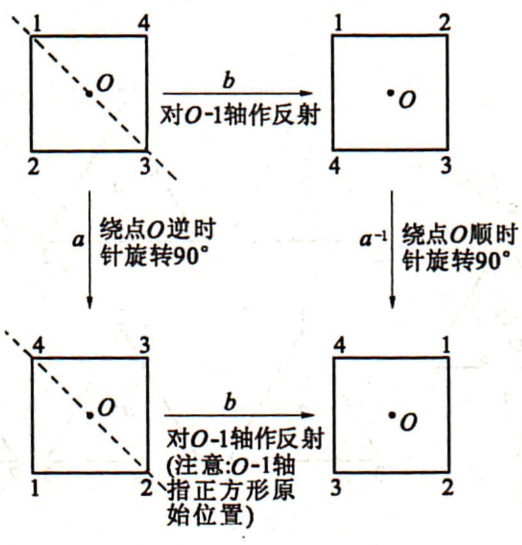


图 2-11

可知有关系式：$ba=a^{-1}b$ 成立.

由此就有 $ba^2=(ba)a=a^{-1}ba=a^{-1}(ba)=a^{-1}(a^{-1}b)=a^{-2}b$，

同理有　　　　　　　　$ba^3=a^{-3}b.$

综上所述，旋转变换 a 和反射变换 b 满足关系式：

$$a^4=e,b^2=e,ba^i=a^{-i}b\quad(i=0,1,2,3).$$

我们可以把上述结果推广到正 n 边形的情况.

例 1　正三角形的顶点按逆时针方向记为 1，2，3，中心为 O，a 为绕中心逆时针旋转 120°的旋转变换，b 为关于直线 $O-1$ 的反射变换，写出正三角形的对称群 D_3 以及旋转对称 a 和反射对称 b 满足的关系式，指出 D_3 的每个元素的实际意义，列出 D_3 的乘法表.

解　我们有：$D_3=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$.

旋转对称 a 和反射对称 b 满足关系式：$a^3=e,b^2=e,ba^i=a^{-i}b$.

如图 2-12，e,a,a^2 依次是正三角形的 0°，120°和 240°旋转对称变换；b,ab,a^2b 分别是关于正三角形的轴 $O-1$，$O-1'$和 $O-2$ 的反射对称变换. 结合图 2-13 的几个图示，我们可得 D_3 的乘法表(如表 2-3).

说　明

今后乘法表总是表示最左边一列的元素乘最上面一行元素的结果，例如

$a^2b\cdot a^2=b.$

表 2-3　正三角形的对称群 D_3 的乘法表

$\cdot$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

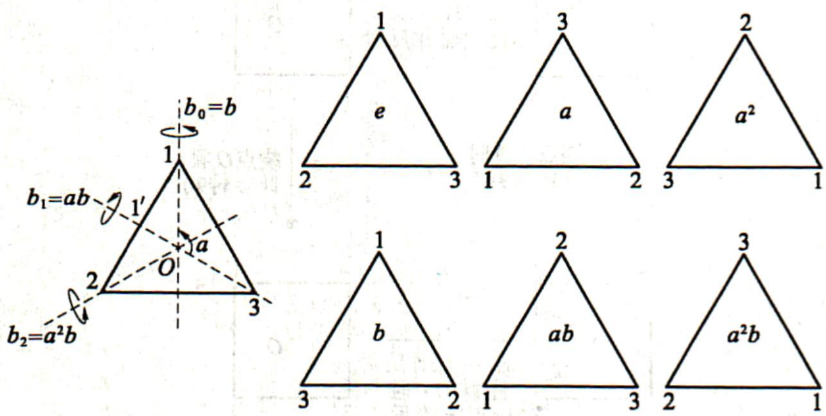


图 2-12

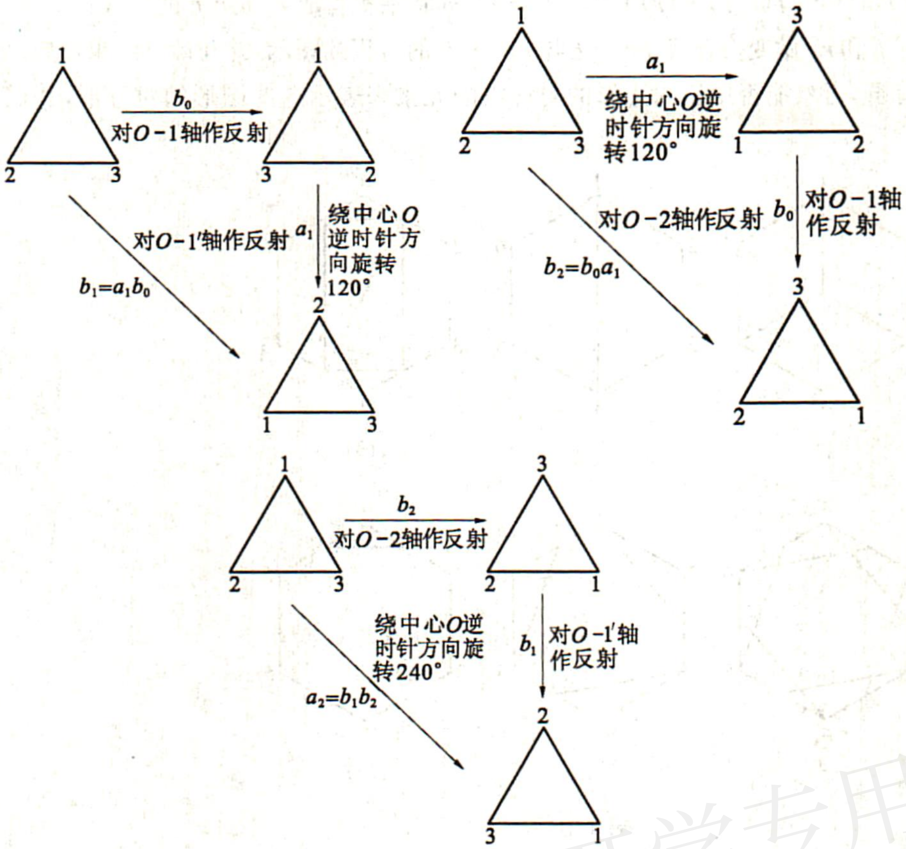


图 2-13

练　习

1. 找出正五边形的对称群 D_5 的一个旋转变换，一个反射变换，并用它们写出 D_5 中的所有元素.
2. 对于 $D_4=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$（其中，$a$ 和 b 如本节正文中所述），计算乘积：$b\cdot ab$，$ab\cdot a^2b$，$a^3b\cdot ab\cdot ba$ 和 $(a^3b)^{-1}\cdot a$.

习 题 2—3

1. 按照 $D_4=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$（其中 a 和 b 如前所述），写出 D_4 的乘法表.
2. 找出正七边形的对称群 D_7 的一个旋转，一个反射，并用它们写出 D_7 中的所有元素，并说出每个元素的实际意义，指出每个元素的逆元.
3. 正八边形的顶点按逆时针方向记为 1，2，3，4，5，6，7，8，中心记为 O，r 是正八边形的 45°旋转对称变换，f 是正八边形的一个关于 $O-1$ 的反射对称变换.

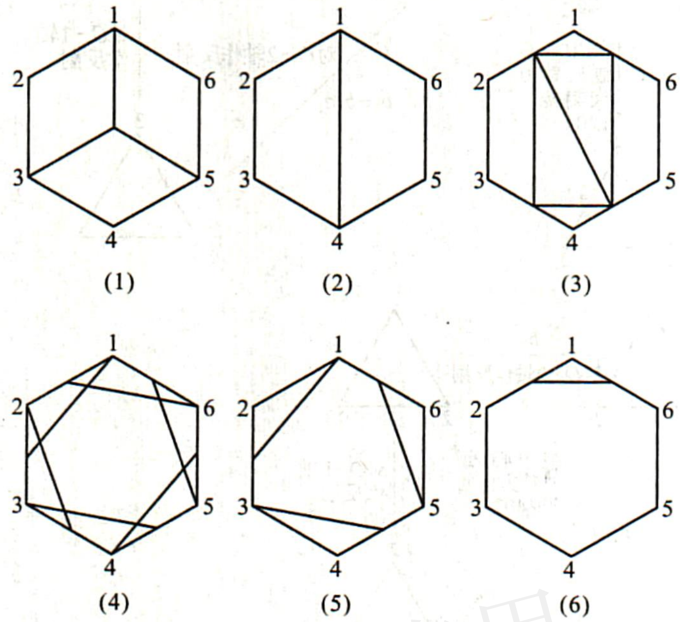
   (1) 写出正八边形的对称群 D_8 的所有元素，指出每个元素的逆元；

   (2) 说出 r^3，r^6，rf，r^2f，r^3f 和 r^4f 是正八边形的何种旋转或反射对称变换；

(3) 求乘积 $f\cdot(r^2f)$，$f\cdot r^3$，$f(r^4f)\cdot(rf)$和$(r^3f)\cdot r^6$，即将乘积写成 r^i 或 r^if 的形式；

(4) 画出 f 与 r^2f，r^3f 和 r^6 做变换合成 $f\cdot r^2f$ 与 $r^3f\cdot r^6$ 的过程的图示，并与计算结果比较.

4. 求下列各图形的对称群，考察能否用正六边形的对称群的元素来表示这些图形的对称群，并表示各图形的对称群.



(第 4 题)

复习题二

1. 求内角无直角的菱形的对称群，并指出每个元素的逆元.
2. 找出正六边形的对称群 D_6 的一个旋转，一个反射，并用它们写出 D_6 中的所有元素，并说出每个元素的实际意义，指出每个元素的逆元.
3. 正八边形的顶点按逆时针方向记为 1，2，3，4，5，6，7，8，中心记为 O，r 是正八边形的绕中心 O 的$45°$旋转对称，f 是正八边形的关于$O-1$ 轴的反射对称.

   (1) 用 r 和 f 表示出正八边形的对称群 D_8 的所有元素，并说出每个元素是正八边形的哪个旋转或反射变换.

   (2) 记 $g=r^3$，$h=r^2$，g 和 f，h 和 f 这两对元素，哪对元素能产生 D_8？如能生成，就用那对元素表示出 D_8 的所有元素.

第三章　置　　换

本章我们将提出置换的概念，并利用置换群这一工具来研究正多边形、多面体的对称性群以及多项式的对称性.

§1　置换与置换群

1.1　置　　换

问题提出

设正三角形的顶点按逆时针方向依次为 1，2，3，则正三角形绕中心逆时针 120°的旋转变换 a_1 把顶点 1，2，3，依次映到原三角形 2，3，1 位置上. a_1 确定了集合{1，2，3}到自身的一个一一对应关系，这个对应关系叫作集合{1，2，3}上的一个置换. 正三角形的对称性变换由它的三个顶点的置换唯一决定.

不难看出，置换可以表示正多边形的对称性. 如何用置换刻画平面图形的对称性呢？

分析理解

前面的置换可以写成：

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1(1) & a_1(2) & a_1(3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}.$$

这个置换完全确定了正三角形 120°的旋转变换 a_1，并可表示为

$$a_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

正三角形的每个对称性变换都可以用顶点集合{1，2，3}的置换来

表示.

例 1　用顶点置换来表示正三角形的所有对称性变换.

解　记正三角形的顶点如前，中心为点 O. 记平面绕点 O 逆时针 $0°$，$120°$，$240°$ 的旋转变换分别记为 a_0，a_1，a_2，平面关于直线 $O-1$，$O-1'$，$O-2$的反射变换分别记为 b_0，b_1，b_2. 仅以 a_2 和 b_0 为例计算如下，其他从略.

因为 $a_2(1)=3$，$a_2(2)=1$，$a_2(3)=2$，所以

$$a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a_2(1) & a_2(2) & a_2(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

因为 $b_0(1)=1$，$b_0(2)=3$，$b_0(3)=2$，所以

$$b_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ b_0(1) & b_0(2) & b_0(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

类似地，其他对称性变换也可以表示成顶点的置换，于是正三角形的所有对称性变换用顶点的置换来表示就是

$$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$b_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

例 2　用顶点的置换来表示正方形的所有对称性变换.

解　记正方形的顶点如前，正方形的对称共有 8 个：

绕点 O 逆时针 $0°$，$90°$，$180°$，$270°$的旋转变换分别记为 a_0，a_1，a_2，a_3；关于直线 $O-1$，$O-1'$，$O-2$，$O-2'$的反射变换分别记为 b_0，b_1，b_2，b_3.

以 a_2 为例，a_2 是绕点 O 逆时针旋转 $180°$的旋转变换，可以表示为：

$$a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

又如 b_0 是关于直线 $O-1$ 的反射变换，可以表示为：

$$b_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

其他对称变换也可以用同样方法表示.

因此，正方形的所有对称性变换用顶点的置换来表示就是

$$a_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

$$b_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

抽象概括

对于一个有 n 个元素的集合 S，例如，$S=\{1,2,\cdots,n\}$，把集合 S 到自身的一个一一对应关系，叫作集合 S 上的一个 **n 元置换**.

n 元置换可以表示正 n 边形的对称性.

例 3　写出所有的 4 元置换.

解　若 a 是一个 4 元置换，则像 $a(1),a(2),a(3),a(4)$ 是 1，2，3，4 的不同数字，故它们是 1，2，3，4 的一个全排列. 反过来，任给 1，2，3，4 的一个排列，例如 3，2，4，1，则令 1，2，3，4 分别映到 3，2，4，1，就得一个置换

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}.$$

因此，只要在 4 元置换表达式的上一行依次写下 1，2，3，4，下一行任意写下 1，2，3，4 的一个排列，就得到一个 4 元置换. 1，2，3，4 共有4！＝24个排列，故共有 24 个 4 元置换，它们是：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

对于一般情况，因为 $1,2,\cdots,n$ 共有 $n!$[1] 个排列，故共有 $n!$ 个 n 元置换.

在置换表达式中，只要上下两行保持置换所确定的对应关系，上一行的 $1,2,\cdots,n$ 次序可以改变. 例如：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3&1&2\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2&1&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

等，表示的是同一个置换.

[1] $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$.

练　习

用顶点的置换的形式写出下列图形的对称群的元素：

（非正方形的）菱形，正五边形，（逆时针）有向边构成的正五边形.

1.2　置换的乘法

与平面变换的乘法一样，置换也有乘法运算.

设 $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$和 $b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$是两个 4 元置换，置换 a 与 b 的乘积 ab 就是对集合$\{1,2,3,4\}$接连施行两个置换 b 和 a，得到的一个新的 4 元置换，也就是说，

$$ab:\begin{array}{l}1\to1\to2,\\2\to4\to1,\\3\to3\to4,\\4\to2\to3.\end{array}$$

用式子表示就是：

$$\begin{aligned}&(ab)(1)=a(b(1))=a(1)=2,\\&(ab)(2)=a(b(2))=a(4)=1,\\&(ab)(3)=a(b(3))=a(3)=4,\\&(ab)(4)=a(b(4))=a(2)=3.\end{aligned}$$

因此，

$$ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$$

置换的计算过程示意如下：

$$ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\downarrow&&&\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\downarrow&&&\\1&4&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\downarrow&&&\\2&&&\end{pmatrix}.$$

显然，每个置换$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\\downarrow&\downarrow&\cdots&\downarrow\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$都是可逆的，其逆置换为：

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\\downarrow&\downarrow&\cdots&\downarrow\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

例如，

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&3&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}.$$

例 4　设 $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$，求 ab，ba 和 a^{-1}.

解

$$ab=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix};$$

$$ba=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix};$$

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&3&2\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}.$$

1.3　置　换　群

正方形的对称群中的 8 个对称用其 4 个顶点的置换来表示后，就称这 8 个置换的集合是一个 4 元的置换群，仍用 D_4 表示. 既然置换不过是一种新的表示方法，而图形的对称群对于变换的乘法满足封闭律，结合律，有恒等元，有逆元，那么，表示正方形的 8 个置换的集合 D_4 对于置换的乘法也必满足这四条性质.

对于本节 1.1 的例 1 中表示正三角形的六个置换的集合也是如此.

一般地，如果一个由 n 元置换组成的非空集合 P 对于置换的乘法满足封闭律，结合律，有恒等元，有逆元，就称这个置换的集合 P 构成一个 **n 元置换群**.

置换群 P 中置换的个数为置换群 P 的**阶**.

全体 n 元置换的集合构成了一个 n 元置换群，称为 **n 元对称群**，记作 S_n，其阶为 $n!$，它是最大的 n 元置换群.

例如，3 元对称群为

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}.$$

现在我们就可以说，正三角形的对称群是 3 元对称群 S_3.

练　习

1. 设 $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$，求 ab^2，a^{-2}，ba^{-1}，$b^{-1}ab$.
2. 设 $a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}$，求 ab^2，a^{-1}，ba^{-1}，$a^{-1}b^{-1}$，$b^{-1}ab$.
3. 作出 3 元对称群 S_3 的乘法表.

习 题 3—1

1. 用顶点的置换来表示有向正七边形的对称群 C_7 的元素.
2. 找出正六边形的对称群 D_6 的一个旋转，一个反射，先用顶点的置换来表示它们，再写出 D_6 的所有元素.
3. 用顶点的置换来表示正六边形的所有对称性变换 .
4. 用顶点的置换来表示有向正五边形的所有对称性变换.
5. 用顶点的置换来表示邻边不等的矩形的所有对称性变换.

§2　多面体的对称性群

与平面的情况类似，保持三维空间的任意两点的距离不变的空间变换，称为（空间的）等距变换.

例如，空间的平移、绕定点或定直线的旋转以及关于一个平面的反射都是空间的等距变换.

与平面的情况类似，设 Γ 是空间的一个几何体，如果空间的等距变换 t 将 Γ 变成与自己重合，就称此变换 t 是 Γ 的一个对称性变换. 几何体 Γ 的全体对称性变换组成的集合对于变换的乘法构成了一个群，称为 Γ 的对称性群.

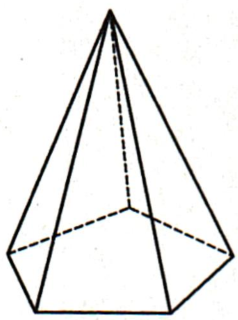


图 3-1

例如，从直观上不难看出，对于正五棱锥 Γ，空间绕 Γ 底面上高线的 $i\times72°(i=0,1,2,3,4)$ 旋转变换都是 Γ 的对称性变换（如图 3-1），关于过一条侧棱和高线所确定的平面的反射变换也是 Γ 的对称性变换. 这就得到正五棱锥的五个旋转对称性变换和五个反射对称性变换. 进一步容易知道，它们是正五棱锥的所有对称性变换，共计 10 个，构成了正五棱锥的对称性群.

现在，我们考察正四面体❶有哪些对称性变换.

❶根据欧拉定理，正多面体共有五个：正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体和正二十面体.

例如，空间绕正四面体底面上高线的 $i\times120°(i=0,1,2)$ 旋转变换都是正四面体的对称性变换，关于过一条棱和高线所确定平面的反射变换也是正四面体的对称性变换.

在下面，我们只考察正四面体的旋转对称性变换. 我们直观地不难观察到下面的空间变换都是正四面体的旋转对称性变换：

（Ⅰ）恒等变换 e；

（Ⅱ）以正四面体的一条高线为轴空间旋转 120°和 240°；

（Ⅲ）以相对两棱之中点连线为轴空间旋转 180°.

因为正四面体有 4 条高线，故共有 8 个第（Ⅱ）种旋转对称性变换，又因正四面体有 3 组相对棱，由此得到 3 条中点连线，故共有 3 个第（Ⅲ）种旋转对称性变换，至此，我们观察到了正四面体的 12 个旋转对称性变换. 至于正四面体只有这 12 个旋转对称性变换的道理，有兴趣的同学可以查阅相关资料. 这样，我们就得到了正四面体的所有旋转对称性变换，它们构成了正四面体的旋转对称性群或简称旋转群.

例 1 用正四面体的顶点的置换表示正四面体的旋转对称性变换.

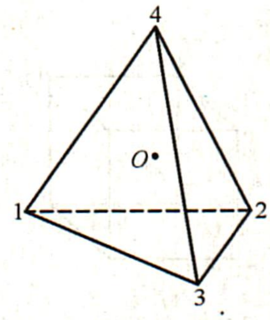


图 3-2

解 记正四面体的顶点为 1,2,3,4,中心为点 O,图 3-2 是正四面体的原始姿态.

例如,以过顶点 4 的高线为轴,将正四面体旋转 240°(这里,以正四面体的中心到顶点的方向为正方向,按右手系做旋转,以下同),把正四面体的顶点 1,2,3,4 分别变到了原始状态的 2,3,1,4 的位置(见图 3-3),用顶点的置换来表示即为 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.

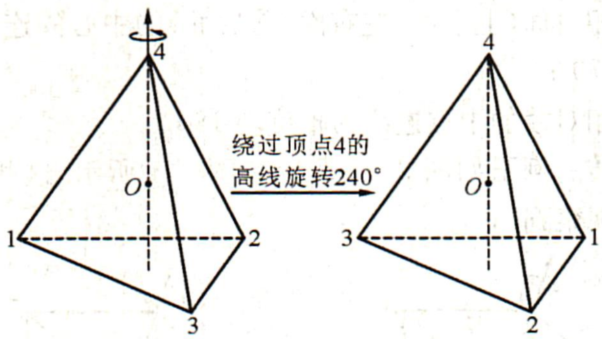


图 3-3

又如,以相对的棱 1—4 和棱 2—3 的中点连线为轴,将正四面体旋转 180°,它把正四面体的顶点 1,2,3,4 分别变到了原始姿态的 4,3,2,1 的位置(见图 3-4),用顶点的置换来表示即为 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.

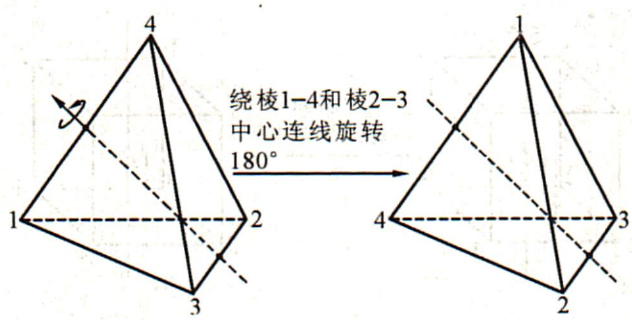


图 3-4

其他的情况由同学自己完成,我们只给出结果,即正四面体的旋转群的 12 个元素用四面体的顶点的 4 元置换表示如下:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

以上 12 个置换都是 4 元置换中的所谓的偶置换.

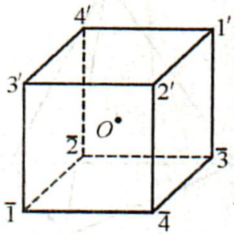


图 3-5

我们再来考察正六面体即正方体的对称性变换(如图 3-5).

例如,空间以正方体的对角线(即相对顶点的连线)为轴旋转 120°是正方体的一个旋转对称性变换. 又如,空间关于过一组相对棱的平面的反射是正方体的一个反射对称性变换.

在下面,我们只考察正方体的旋转对称性变换. 我们直观地不难观察到下面的空间变换都是正方体的旋转对称性变换:

(Ⅰ)恒等变换 e;

(Ⅱ)以对角线为轴旋转 120°和 240°;

(Ⅲ)以相对面(上下面,左右面,前后面)的中心的连线为轴旋转 90°,180°和 270°;

(Ⅳ)以相对棱的中点连线为轴旋转 180°.

这些旋转的例子如图 3-6、图 3-7、图 3-8 所示. 这些旋转中,只有第Ⅳ种难观察到.

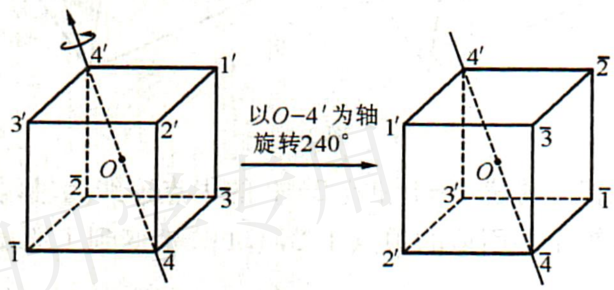


图 3-6

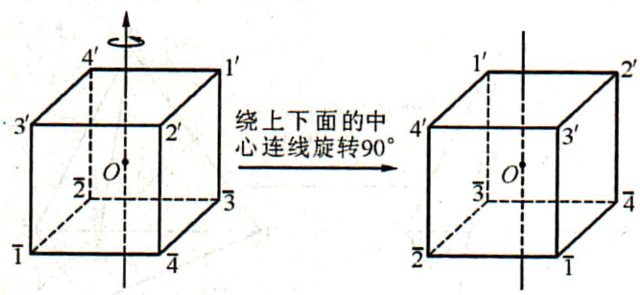


图 3-7

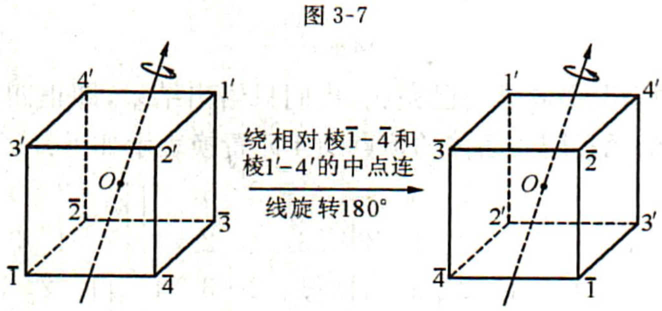


图 3-8

因为正方体有 4 条对角线,故共有 8 个第(Ⅱ)种旋转对称性变换,正方体有 3 组相对面,由此得到 3 条中心连线,故共有 9 个第(Ⅲ)

种旋转对称性变换，正方体有 6 组相对棱，由此得到 6 条中点连线，故共有 6 个第(Ⅳ)种旋转对称性变换，至此，我们观察到了正方体的 24 个旋转对称性变换. 至于正方体只有这 24 个旋转对称性变换的道理，有兴趣的同学可以查阅相关资料. 这样，我们就得到了正方体的所有旋转对称性变换，它们构成了正方体的旋转对称性群或简称旋转群.

现在，我们用置换来表示正方体的对称性变换，这既可以用正方体的 8 个顶点的 8 元置换，也可用 6 个面的 6 元置换，甚至，可以用 4 条对角线的 4 元置换来表示.

例 2　用正方体的四条对角线的置换表示正方体的旋转对称性变换.

解　记正方体的顶点为$\bar{1}$，$\bar{2}$，$\bar{3}$，$\bar{4}$，$1'$，$2'$，$3'$，$4'$，中心为点 O，为叙述方便，我们规定正方体的上、下、左、右、前(前面是朝向读者的)和后面均如图 3-5 所示，图 3-5 是正方体的原始姿态.

又记相对的顶点 $\bar{i}$ 和 i' 之间的“对角线”用 i 表示($i=1,2,3,4$)，那么，正方体的每个对称性变换都引起 4 条对角线的置换. 下面就用这四条对角线的置换表示正方体的旋转对称变换.

例如，以$O—4'$为轴正方体旋转 240°(按右手旋转)(如图 3-6)，它把正方体的对角线 1，2，3，4 分别变到了原始姿态下的对角线 3，1，2，4 的位置，用对角线的置换来表示即为$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$.

例如，以上下两面的中心连线为轴(指向上方)正方体旋转 90°(如图 3-7)，它把正方体的对角线 1，2，3，4 分别变到了原始姿态下的对角线 4，1，2，3 的位置，用对角线的置换来表示即为$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$.

又如，以相对的两个棱 $\bar{1}—\bar{4}$ 和 $1'—4'$的中点连线为轴将正方体旋转 180°(如图 3-8)，把正方体的对角线 1，2，3，4 分别变到了原始姿态下的对角线 4，2，3，1 的位置，用对角线的置换来表示即为$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$.

使用同样的方法，我们可以得到正方体的旋转群的 24 个元素用对角线的 4 元置换表示，具体如下：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

以上 24 个置换正好是全体 4 元置换，因此，我们说正方体的旋转群是 4 元对称群 S_4.

练　习

1. 正四面体的顶点的记法如例 1，设 t 是以过顶点 2 的高线为轴正四面体的 $120°$ 的旋转对称性变换，用正四面体的顶点的置换表示 t.
2. 正方体的顶点的记法如例 2，设 t 是以$O-1'$为轴正方体 $120°$(按右手旋转)的旋转对称性变换，用正方体的顶点的置换表示 t.
3. 正四面体的顶点的记法如例 1，顶点的置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$表示正四面体的哪个对称性变换?
4. 正方体的顶点的记法如例 2，对角线的置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$表示正方体的哪个对称性变换?

习 题 3—2

1. 用正四面体的 4 个面的 4 元置换表示正四面体的旋转对称性变换.
2. 用正方体的 8 个顶点的 8 元置换表示正方体的旋转对称性变换.
3. 用正方体的 6 个面的 6 元置换表示正方体的旋转对称性变换.

§3　多项式的对称性

3.1　多项式的对称性

在这一节里，我们考察多项式的对称性，它在用根式解方程的理论中有重要应用.

$3x^4+2x^3-\frac{2}{5}x^2+x-7$，$x^2+2xy+y^2$，$8xy+y^3$ 等都是多项式，其中字母 x，y，…称为元，称这些多项式分别为一元四次，二元二次，二元三次多项式等，它们统称多元多项式.

为了便于研究，我们用 x_1，x_2，…，x_n 表示 n 元多项式的元，用 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等表示 n 元多项式，例如 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$，$g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$ 等.

问题提出

我们来看两个多项式 $x_1+x_2+x_3$ 和 $x_1+x_2-x_3$，哪一个多项式的对称性好呢？

分析理解

多项式 $x_1+x_2+x_3$ 中的 x_1，x_2，x_3 任意交换后所得多项式保持恒等，或者说在 x_1，x_2，x_3 的任意置换下多项式保持“不变”.

多项式中 $x_1+x_2-x_3$，仅 x_1 和 x_2 交换后所得多项式保持恒等，或者说仅在 x_1，x_2 的置换下多项式保持“不变”.

从直观上，我们说 $x_1+x_2+x_3$ 比 $x_1+x_2-x_3$ 有更高的“对称性”.

由此看来，正如平面图形的对称性就是平面图形在某些平面等距变换的操作下保持不变的性质一样，多项式的对称性就是多项式在它的元的某些置换下保持不变的性质.

以多项式 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - x_3$

为例. 设

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

是集合 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 上的一个置换.

按照置换 a，把多项式 $2x_1 + x_2 - x_3$ 中的 x_1, x_2, x_3 分别换成 x_2, x_3, x_1 得到一个新的多项式 $2x_2 + x_3 - x_1$，我们就记作

$$a(f(x_1, x_2, x_3)) = a(2x_1 + x_2 - x_3) = 2x_2 + x_3 - x_1,$$

并称为“将多项式 $2x_1 + x_2 - x_3$ 的元作置换 a”，或“用置换 a 变换多项式 $2x_1 + x_2 - x_3$”.

为方便，记号可简化. 其实，上述元 x_1, x_2, x_3 分别换成 x_2, x_3, x_1 的过程，只要对元的下标进行交换即可. 例如，可把 $a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$，记作 $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

抽象概括

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元多项式，a 是 n 个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上的一个置换，将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的元作置换 a 后，所得多项式记为 $a(f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$. 如果

$$a(f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

也就是说，置换 a 不改变多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，就称置换 a 是多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个**对称性变换**或简称**对称**.

例如，$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $x_1 + x_2 + x_3$ 的对称性变换，但不是 $x_1 + x_2 - x_3$ 的对称性变换；$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 是 $x_1 + x_2 - x_3$ 的对称性变换.

3.2　多项式的对称群

与平面图形的对称群类似，多项式的对称性变换有下面的性质：

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个多项式，G 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体对称性变换组成的集合，那么，G 对于置换的乘法运算满足：

(1) **封闭律**：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的任意两个对称性变换的乘积仍是

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的对称性变换；

(2) **结合律**：对于 G 中的任意三个元素 a, b, c，有$(ab)c = a(bc)$成立；

(3) **有恒等元**：恒等置换 e 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的对称性变换；

(4) **有逆元**：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的每个对称性变换的逆置换也是$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的对称性变换.

这时，我们说：

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体对称性变换组成的集合 G 对于置换的乘法运算构成一个群，称为多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的**对称群**.

现在，就可以说多项式 $2x_1+x_2-x_3$，$x_1+x_2-x_3$ 和 $x_1+x_2+x_3$ 的对称群分别是$\{e\}$，$\left\{e, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\}$和 S_3.

3.3　对称多项式

对于三元多项式 $x_1+x_2+x_3$，不难看出，所有三元置换都是它的对称变换. 因此，在三元多项式中，它有最大的对称群 S_3，我们就称 $x_1+x_2+x_3$ 为三元对称多项式.

$2x_1+x_2-x_3$ 和 $x_1+x_2-x_3$ 都不是对称多项式.

抽象概括

一般地，设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个 n 元多项式，若任意 n 元置换都不改变 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，也就是说 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的对称群是 S_n，就称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 **n 元对称多项式**.

不难看出，$(x_1-x_2)^2$ 和 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ 是二元对称多项式，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ 是四元对称多项式.

例 1　验证 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 是三元对称多项式.

解　记 S_3 的元素为：

$$a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$a_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, a_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, a_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

把 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 简记为 f，那么就有

$a_1(f)=f$；$a_2(f)=x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=f$；

$a_3(f)=x_3x_1+x_1x_2+x_2x_3=f$；$a_4(f)=x_1x_3+x_3x_2+x_2x_1=f$；

$a_5(f)=x_2x_1+x_1x_3+x_3x_2=f$；$a_6(f)=x_3x_2+x_2x_1+x_1x_3=f$.

故 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 是三元对称多项式.

例 2 求下列三元多项式的对称群，并指出它是否是对称多项式：

(1)$C=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$；

(2)$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

解 我们可以用 S_3 的 6 个元素逐一地去变换多项式，从中挑出不变多项式的置换，即可得到的它的对称群(过程留作练习).

$C=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$的对称群是：

$$A_3=\left\{e,\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\};$$

$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ 的对称群是 S_3.

显然，C 不是三元对称多项式，D 是三元对称多项式.

练　习

1. 验证(1)x_1+x_2，x_1x_2；(2)$x_1+x_2+x_3$，$x_1x_2x_3$ 分别是两组二元和三元对称多项式.
2. 完成例 2 中的详细过程.

习 题 3—3

1. 用 S_3 中的所有置换去变换 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2$ 的方法，解决下列问题：
   (1) 求 f 的对称群.
   (2) 用 S_3 中的所有置换去变换 f，所得不同多项式的个数是多少？
   (3) 求出(2)中所有不同多项式的乘积，再回答它是否是对称多项式.
2. 用 S_3 中的所有置换去变换 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3$ 的方法，解决下列问题：
   (1) 求 f 的对称群.
   (2) 用 S_3 中的所有置换去变换 f，所得不同多项式的个数是多少？
   (3) 求出(2)中所得的多项式的对称群.
3. 用 S_4 中的所有置换去变换 $f(x_1,x_2,x_4,x_3)=x_1x_3+x_2x_4$ 的方法，解决下列问题：
   (1) 求 f 的对称群.
   (2) 用 S_4 中的所有置换去变换 f，所得不同多项式的个数是多少？
   (3) 求出(2)中所得的多项式的对称群.

4. 用 S_4 中的所有置换去变换 $C=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ 的方法，求不变多项式 $D=(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$ 的所有 4 元置换，即多项式 D 的对称群.

5. 四个实数 x_1,x_2,x_3,x_4 的有序交叉比 λ 定义为 $\lambda=\dfrac{(x_2-x_4)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_4)}$，在 S_4 中找出保持交叉比 λ 不变的所有置换，也就是求分式 $\dfrac{(x_2-x_4)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_4)}$ 的对称群.

阅读材料

伽罗瓦理论

早在古巴比伦时期，人们就已经掌握了二次方程的解法. 到了中世纪，阿拉伯数学家将二次方程理论系统化. 在中世纪阿拉伯数学家的眼中，代数学就是解代数方程的学问.

在文艺复兴时期，数学家解决了三次、四次方程的求解问题. 此后，数学家们的注意力集中在用根式求解五次和高于五次的代数方程的问题. 在解出三次、四次方程后，整整两个半世纪，很少有人怀疑五次代数方程解法的存在性. 但是，寻求解法的努力都以失败告终.

在 18 世纪后期，著名数学家拉格朗日曾宣称“不可能用根式解四次以上的方程”. 时隔半世纪，在 1824 年，挪威的年轻数学家阿贝尔证明了这一猜想，阿贝尔彻底地粉碎了人们用根式求解五次以上代数方程的奢望. 但是，他并没有忘记给出一些特殊的能用根式求解的方程，其中一类被称为“阿贝尔方程”. 在此过程中，阿贝尔引进了近世代数的一个重要概念——域. 例如：全体有理数，全体实数都是重要的域.

伽罗瓦

(1811—1832)

数学家们并不满足，他们又开始追问：究竟什么样的特殊方程能够用根式来求解？

在 1829～1831 年间，年轻的法国数学家伽罗瓦完成了几篇极为重要的论文，在他的论文中，不仅解决了上述问题，而且引进了方程根的“置换群”的概念，这是历史上最早的群的定义. 伽罗瓦特别研究了一类方程根的置换群中某些置换组成的“子群”，伽罗瓦称之为“方程的群”，也就是后来所谓的“伽罗瓦群”. 它刻画了方程根的对称性，这种对称性与“方程是否根式可解”存在着本质的联系. 伽罗瓦指出，当且仅当方程的群是“可解群”时，方程才是根式可解的.

伽罗瓦攻克的难题虽然是 300 多年前的老问题，但他的思想却远远超出了他的时代. 他的工作可以看成是近世代数的开端. “群”的引进导致了代数学在研究对象、内容和方法上发生了深刻的变革.

伽罗瓦之后，数学家们逐渐认识到“群”是一个普遍的概念，不必局限于置换群．到19世纪80年代，在对各种不同类型群研究的基础上，数学家建立了“抽象群”的概念和理论——群论．它成为了描述各种数学和物理对称性质的普遍工具．在19世纪末，群论已被应用于晶体结构的研究．在现代物理中，群论更成为研究基本粒子、量子力学的有力武器．

在伽罗瓦稍纵即逝的数学生涯中，他为人类留下了重要的、永恒的遗产．伽罗瓦出生在巴黎附近的一个小城，他的父亲是这个城市的市长，家境本很优裕．但是，18岁以后，各种不幸接踵而至．父亲因与天主教保守势力发生冲突而自杀，接着，伽罗瓦在报考向往已久的巴黎综合工科学校时，又遭失败．后来，他考进了巴黎高等师范学校．次年，因参加反对波旁王朝的“七月革命”，被学校开除，并两次被捕．出狱不久，他的政敌利用爱情纠葛挑起了一场决斗，他在决斗中不幸被杀身亡．时年尚不到21岁．在这种激烈动荡和遭受种种打击的情况下，伽罗瓦利用极为有限的时间，开展他的数学研究．在决斗前夜，伽罗瓦通宵达旦，整理手稿，完成他的几篇重要的论文，并在遗书中嘱咐他的朋友，“请求雅可比或高斯关于它们的重要性公开发表他们的意见”．在数学史上，伽罗瓦的工作是最伟大的数学成就之一．

§4　群的定义

现在给出群的定义.

设 G 是一个非空集合，在 G 上有一个二元运算，不妨叫作乘法，对 G 的任意两个元素 a 和 b，运算的结果记作 $a\otimes b$，或省略“$\otimes$”记为 ab，称为 a 与 b 的积，如果还满足下列公理，那么，就称 G 对于运算“$\otimes$”构成一个群：

(1) **封闭律**：对 G 的任意两元素 a 和 b，$a\otimes b$ 仍属于 G；

(2) **结合律**：对 G 的任意三个元素 a，b 和 c 都有：

$$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c);$$

(3) **有单位元**：G 中存在一个元素 e，使得对 G 的任意元素 a，都有

$$e\otimes a=a\otimes e=a,$$

e 称为群 G 的单位元；

(4) **有逆元**：对于 G 的每个元素 a，都存在 G 的元素 a^{-1}，使得

$$a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a=e,$$

a^{-1} 称为 a 的逆元.

由前面的分析，我们知道：

(1) 平面的所有等距变换的集合对于变换的乘法构成群，称为平面的等距变换群.

(2) 平面图形的所有对称性变换的集合对于变换的乘法构成群，称为这个图形的对称群.

(3) 一个 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的所有对称性变换的集合对于元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的置换乘法构成群，称为这个多项式的对称性群.

上面这些群的元素都是集合上的一些变换，因此，都叫作变换群.

(4) 全体非零有理数集合对于乘法构成(乘法)群.

练　习　1

证明：全体有理数集合 Q 对于加法构成(加法)群.

下面是群的一些例子.

例 1　证明集合$\{1,-1\}$对于通常乘法构成群.

证明　记$S=\{1,-1\}$，S中的任意元素的乘积无非是 1 或-1，仍属于S，故乘法是集合S上的二元运算或说集合S在乘法下是封闭的；

数字乘法有结合律；

1 是S的单位元；

1 和-1在S中分别有逆元 1 和-1.

因此，$\{1,-1\}$对于乘法构成群.

例 2　证明集合$S=\{2^n \mid n\in \mathbf{Z}\}$对于通常乘法构成群.

证明　对于任意的$2^m, 2^n\in S(m, n\in \mathbf{Z})$，由于$m+n\in \mathbf{Z}$，故$2^m\cdot 2^n=2^{m+n}\in S$；乘法是集合$S$上的二元运算或说集合$S$在乘法下是封闭的；

数字乘法有结合律；

$1=2^0\in S$，1 是S的单位元；

对任意的$2^n\in S$，有$-n\in \mathbf{Z}$，则$2^{-n}\in S$且$2^{-n}2^n=1$，故2^n在S中有逆元2^{-n}；因此，S对于乘法构成群.

例 3　设$G=\{e,a\}$，这里的e和a仅仅是两个文字或符号，对G规定乘法如表 4-1 所示：

表 4-1　乘法表

$\otimes$	e	a
e	e	a
a	a	e

求证：G对于这个乘法构成一个交换群.

证明　由表 4-1 可知：集合G在乘法下有封闭律，e为单位元，有逆元$e^{-1}=e, a^{-1}=a$，还有交换律成立.

至于结合律，对于G中的任意元素x, y和z，要证明$(xy)z=x(yz)$成立，只需直接验证$(xy)z$和$x(yz)$的所有可能情况成立. 共有 8 种情况，例如，当$x=a, y=e, z=a$时，有$(xy)z=(ae)a=aa=e$，$x(yz)=a(ea)=aa=e$，故$(xy)z=x(yz)$. 其他情况同理可证.

综合上述，G对于所规定的乘法构成交换群.

例 4　集合$S=\{e\}$对于下面规定的乘法运算构成群：$e\otimes e=e$（或写成$e^2=e$），这是最小的群，称为“平凡群”.

证明留作练习.

非零有理数乘法群除满足群定义中的四条公理外，它们还满足交换律，即对于群的任意元素a和b，$ab=ba$都成立，我们把这样的群叫作**交换群**.

例 1 到例 4 中的群都是交换群，我们前面学过的变换群一般都不是交换群.

在抽象群的定义中，群的运算符号“$\otimes$”采用了“乘法”的叫法，群称作“乘法群”. 但是，一些具体群的运算是加法，为符合习惯，要对群定义中的叫法做些改变，例如，运算符号用“$+$”或“$\oplus$”等，单位元符号及逆元符号用 0 及 $-a$，改称为“零元”和“负元”，群也改称为“加法群”.

练 习 2

1. 完成例 4 的证明.
2. 证明全体实数集合 $\mathbf{R}$ 对于加法构成(加法)群.
3. 证明：集合 $S=\{2^m3^n \mid m,n\in\mathbf{Z}\}$ 对于乘法构成群.
4. 证明：集合 $5\mathbf{Z}=\{5m \mid m\in\mathbf{Z}\}$ 对于加法构成群.

习 题 3—4

1. 证明：全体非零实数集合对于乘法构成(乘法)群.
2. 证明：整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于加法构成群.
3. 证明：所有偶数集合对于加法构成群，但是，所有偶数集合对于乘法不构成群.
4. 证明：所有平面向量组成的集合对于向量的加法构成一个加法群，零向量 $\mathbf{0}$ 是群的零元，$-\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在群中的负元.

复习题三

1. 奇数集合在通常数字加法下是否构成群，为什么？
2. 设 $G=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，其中，$\mathbf{Q}$ 是有理数域，试问，G 关于通常数字加法是否构成群，为什么？
3. 设 $G^*=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}$，且 a,b 不同时为 $0\}$，试问，G^* 关于通常数字乘法是否构成群，为什么？
4. 通常数字的减法是否是整数集合上的二元运算，如果回答是肯定的，它是否满足结合律，为什么？
5. 设群 G 是交换群，a 和 b 是 G 的任意两个元素，证明：

   (1) $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ 成立；

   (2) $(ab)^n=a^nb^n$ 成立.

   试问，对任意群，这个关系是否成立？
6. 设

$$a=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&1&6&5\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&4&5&6&2\end{pmatrix}.$$

   求 a^{-1}，ab，ba，$b^{-1}ab$，a^{102} 和 b^{-14}.
7. 正九边形的顶点依逆时针方向记为 $1,2,3,\cdots,9$，中心记为 O，$\alpha=40°$，用顶点的置换表示正九边形的绕中心 O 的 2α，5α，8α 的旋转对称，以及关于对称轴 $O-1'$，$O-3$ 的反射对称，其中，$1'$ 是边 $1-2$ 的中点.
8. 求四元多项式 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_4+x_2x_3$ 的对称群，然后，用 S_4 的所有元素变换多项式 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$，能得到多少不同的多项式？最后，判断所求得的多项式的和是否是对称多项式.
9. 证明：在一个群的运算表中，群的每个元素在每行和每列中出现一次且只出现一次.
10. 下面是一个群的乘法表，请填写出空中的元素：

⊗	e	a	b	c	d
e	____	____	____	____	____
a	____	b	____	____	____
b	____	c	d	e	____
c	____	d	____	a	b
d	____	____	____	____	____