经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修2-2）

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修2-2）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　王尚志　顿继安

编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）

王尚志　刘加霞　范永利

姚　芳　顿继安

北京师范大学出版社

·北 京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮购科电话　010-58808083
传　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：8
字　　数：200 千字
版　　次：2008 年 5 月第 3 版
印　　次：2019 年 7 月第 23 次印刷
定　　价：7.05 元
ISBN　978-7-303-08183-7

责任编辑：焦继红　邢自兴　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，"有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

目　录

第一章　推理与证明

在日常生活和学习中，我们常常需要进行推理. 例如：

一个人看见一群乌鸦都是黑的，于是断言“天下乌鸦都是黑的”.

“每一个司机都应该遵守交通规则，小李是司机，所以，小李应该遵守交通规则.”

“如果 a,b,c 都是实数，且 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.”

这些都是推理. 推理一般包括合情推理和演绎推理，它们都是日常生活、学习、工作和科学研究中常见的思维过程.

合情推理和演绎推理有什么特征？有什么区别？在学习中，特别是在数学学习中，合情推理和演绎推理有什么作用？同学们可以通过本章的学习，认识和体会这些问题.

§1 归纳与类比

1.1 归纳推理

在历史上，人们曾经有过制造永动机的美好愿望，希望制造出一种不消耗能量的机器，永无休止地为人类服务. 人们提出过许多永动机的设计方案. 最早的永动机设计方案是 13 世纪的法国人亨内考提出的，后来，人们又提出了各种永动机的设计方案，有人采用“螺旋汲水器”的原理，有人利用轮子的惯性原理，有人利用水的浮力或毛细作用的原理. 但是，这些设计方案都以失败而告终.

从大量的失败案例中，科学界归纳出了一个结论：不可能制造出永动机. 1775 年，法国科学院郑重宣布不再审查任何有关永动机的设计方案.

后来，俄国著名科学家罗蒙诺索夫提出了能量守恒定律，从理论上说明了制造永动机是不可能的.

著名的哥德巴赫猜想也是归纳得出的结论. 观察 $6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7$，$16=5+11$，$18=7+11$，$20=3+17$，……，$30=13+17$，……

哥德巴赫归纳出以下结论：一个偶数(大于 4)可以写成两个素数的和.

这个结论是否正确呢？人们验证了许多偶数，都满足这个规律，但至今还没有得到证明，这个结论仍然是猜想.

例 1 在一个凸多面体中，试通过归纳猜想其顶点数、棱数、面数满足的关系.

解 考察一些多面体，如图 1-1 所示. 将这些多面体的面数(F)、棱数(E)、顶点数(V)列出，得到表 1-1：

表 1-1

多面体	面数(F)	棱数(E)	顶点数(V)
三棱锥	4	6	4
四棱锥	5	8	5
五棱锥	6	10	6
三棱柱	5	9	6
五棱柱	7	15	10
立方体	6	12	8
八面体	8	12	6
十二面体	12	30	20

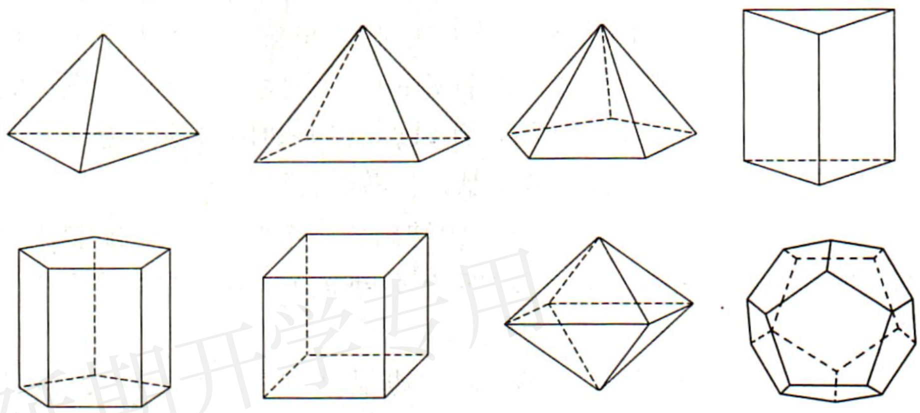


图 1-1

从这些事实中，可以归纳出：

$$V-E+F=2.$$

这就是著名的欧拉公式. 它的证明方法很多，有兴趣的同学可以参考选修系列 3 课程，例如“球面上的几何”等，在这些课程中，给出了一些不同的证明.

例 2　如果面积是一定的，什么样的平面图形周长最小，试猜测结论.

解　考虑单位面积的正三角形、正四边形、正六边形、正八边形，它们的周长分别记作 p_3，p_4，p_6，p_8，可得表 1-2.

表 1-2

p_3	p_4	p_6	p_8
4.56	4	3.72	3.64

归纳上述结果，可以发现：面积一定的正多边形中，边数越多，周长越小. 于是得到猜测：图形面积一定，圆的周长最小.

在以上各例的推理过程中，都有共同之处：根据一类事物中部分事物具有某种属性，推断该类事物中每一个事物都有这种属性. 我们将这种推理方式称为**归纳推理**.

归纳推理是由部分到整体，由个别到一般的推理.

但是，利用归纳推理得出的结论不一定是正确的.

例如，人们在数论研究中，希望得到生成素数的公式. 1640 年，著名数学家费马对形如 $2^{2^n}+1$ 的数进行计算时，发现当 $n=1,2,3$ 时对应的 $2^{2^n}+1$ 都是素数，$2^{2^4}+1=65\ 537$ 也是素数. 于是，他归纳出一个猜想："所有形如 $2^{2^n}+1(n=1,2,3,\cdots)$ 的数都是素数."

对于大一点的 n，验证这个猜想是很难的事情. 直至近百年后的 1732 年，瑞士数学家欧拉发现 $2^{2^5}+1=641\times 6\ 700\ 417$ 不是素数，从而否定了这个猜想.

1.2　类比推理

在立体几何的学习中，我们可以通过与平面几何的相关内容进行类比，得到一些立体几何的概念和性质. 例如，在平面几何中，三角形是边数最少的封闭多边形，在空间中，四面体是面数最少的封闭多面体，在学习四面体时，就可以通过类比三角形的性质得到四面体的一些性质；还可以用平面中的圆类比空间中的球，在平面中，学习了直线与圆的位置关系，通过类比，可以得到空间中平面与球的位置关系，等等.

例 3　已知"正三角形内一点到三边距离之和是一个定值"，将空间与平面进行类比，空间中什么样的图形可以对应正三角形？在对应图形中有与上述定理相应的结论吗？

解　将空间与平面类比，正三角形对应正四面体，三角形的边对应四面体的面. 得到猜测：正四面体内一点到四个面距离之和是一个定值.

为了证明这个猜测，可以分析原结果的证明方法，例如面积法，那么猜想的证明可以考虑用体积法.

例 4　根据平面几何的勾股定理，试类比地猜测出空间中相应的结论.

解　平面中的直角三角形类比到空间就是直四面体. 如图 1-2，

在四面体 P-ABC 中，平面 PAB、平面 PBC、平面 PCA 两两垂直.

勾股定理：斜边长的平方等于两个直角边长的平方和.

类比到空间就是：$\triangle ABC$ 面积的平方等于三个直角三角形面积的平方和. 即

$$S^2_{\triangle ABC}=S^2_{\triangle PAB}+S^2_{\triangle PBC}+S^2_{\triangle PCA}.$$

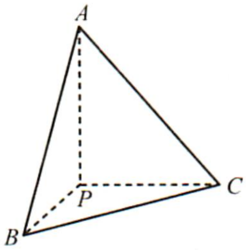


图 1-2

在以上各例的推理过程中，都有共同之处：由于两类不同对象具有某些类似的特征，在此基础上，根据一类对象的其他特征，推断另一类对象也具有类似的其他特征，我们把这种推理过程称为**类比推理**.

类比推理是两类事物特征之间的推理.

但是，利用类比推理得出的结论不一定是正确的.

例如，在平面几何中，对于任意的 $n(n\geqslant 3)$，都存在正 n 边形. 若把这个结论类比到空间：对于任意的 $n(n\geqslant 4)$，都有正 n 面体. 这个结论是错误的. 事实上，在空间只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 除此之外，其他的正 n 面体是不存在的.

根据解决问题的需要，我们有时对概念、结论进行类比（如例 4），有时对方法进行类比（如对例 3 的证明）.

归纳推理和类比推理是最常见的**合情推理**. 合情推理是根据实验和实践的结果、个人的经验和直觉、已有的事实和正确的结论（定义、公理、定理等），推测出某些结果的推理方式.

尽管合情推理的结果不一定正确，但是，在数学、科学、经济和社会的历史发展中，合情推理有非常重要的价值，它是科学发现和创造的基础.

在科学研究和日常生活中，常常通过合情推理探索方法、寻求思路、发现规律、得到猜想. 但是，合情推理的结论有时是不正确的. 对于数学命题，需要通过演绎推理严格证明. 演绎推理是根据已知的事实和正确的结论，按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程.

在数学学习中，不仅要学会运用合情推理提出猜想，还要善于运用演绎推理证明命题.

练　习

1. 杨辉三角的前 5 行是

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1
\end{array}
$$

请试写出第 8 行，并归纳、猜想出一般规律. 从上面的等式中，你能猜想出什么结论？

2. 用面积法证明例 3 中已知的结论，并类比地用体积法证明猜想．

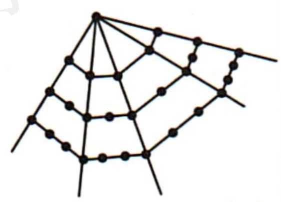
习 题 1—1

1. 从下面的等式中，你能猜想出什么结论？

$37\times3=111$，$37\times6=222$，$37\times9=333$，$37\times12=444$.

2. 已知 $1^3+2^3=3^2=(1+2)^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2=(1+2+3)^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2=(1+2+3+4)^2$，试写出 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的表达式.

3. 右图中给出了 3 层的六边形，图中所有点的个数 S_3 为 28. 按其规律再画下去，可以得到 n 层六边形，试写出 S_n 的表达式.



（第 3 题）

4. 阅读以下求 $1+2+3+\cdots+n$ 的值的过程，

因为　$(n+1)^2-n^2=2n+1$，

$n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$，

……

$2^2-1^2=2\times1+1$，

以上各式相加得　$(n+1)^2-1=2(1+2+\cdots+n)+n$，

所以　$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2+2n-n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

类比以上过程，求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的值．

5. 利用类比推理，根据学过的平面向量的坐标表示，建立空间向量的坐标表示．

§2 综合法与分析法

2.1 综合法

在证明数学命题时，我们可以从已知条件入手，依据学过的定义、公理、定理等，通过严格的推理，证明命题的结论.

例 1 求证：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

证明 我们从条件入手，因为

$$f(x+\pi)=\sin\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x),$$

所以，由函数周期的定义可知：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

例 2 （韦达定理）已知 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0, b^2-4ac\geqslant0)$ 的两个根. 求证：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

证明 由于 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根，根据求根公式，有

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

这样，我们从命题的条件出发，通过计算，证明了命题的结论.

例 3 已知：x,y,z 为互不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$.

求证：$x^2y^2z^2=1$.

证明 根据命题的条件 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$，可得

$$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}.$$

又由命题的条件，x,y,z 为互不相等的实数，

所以上式可变形为 $\quad yz=\frac{y-z}{x-y}.$

同理可得 $\quad xy=\frac{x-y}{z-x}, zx=\frac{z-x}{y-z},$

所以 $\quad x^2y^2z^2=\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{x-y}{z-x}\cdot\frac{z-x}{y-z}=1.$

这样，我们就根据命题的条件，通过计算，证明了命题的结论.

抽象概括

从上面的几个例子，我们可以看出它们证明的特点是：从命题的条件出发，利用定义、公理、定理及运算法则，通过演绎推理，一步一步地接近要证明的结论，直到完成命题的证明. 我们把这样的思维方法称为**综合法**.

练 习

设 a,b 是实数，求证：$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

2.2 分 析 法

在证明数学命题时，我们也可以从命题的结论入手，不断地寻求保证结论成立的条件，直到归结为命题给定的条件，或归结为定义、公理、定理.

例 4 已知：a,b 是不相等的正数. 求证：$a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证明 要证明 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$,

只需证明 $\quad (a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$,

只需证明 $\quad (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)>0$,

只需证明　$(a+b)(a^2-2ab+b^2)>0$，

只需证明　$(a+b)(a-b)^2>0$，

只需证明　$a+b>0$ 且 $(a-b)^2>0$.

由于，命题的条件“a,b 是不相等的正数”，它保证上式成立.

这样，就证明了命题的结论.

例 5　求证：$\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

证明　要证明 $\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$，

只需证明　$(\sqrt{8}+\sqrt{7})^2>(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$，

即　$8+7+2\sqrt{56}>5+10+2\sqrt{50}$，

只需证明　$2\sqrt{56}>2\sqrt{50}$，

即 $56>50$，这显然成立.

这样，就证明了 $\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

例 6　求证：函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的.

证明　要证明函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的，

只需证明　对于任意 $x_1,x_2\in(3,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

只需证明　对任意的 $x_1>x_2>3$，有

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= (2x_1^2-12x_1+16)-(2x_2^2-12x_2+16) \\ &= 2x_1^2-2x_2^2-(12x_1-12x_2) \\ &= 2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-12(x_1-x_2) \\ &= 2(x_1-x_2)(x_1+x_2-6)>0. \end{aligned}$$

根据命题的条件，“$x_1>x_2$，且 $x_1>3$，$x_2>3$”，有 $x_1-x_2>0$，且 $x_1+x_2>6$，它保证上式成立.

这样，就证明了：函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的.

抽象概括

通过前面的例子，可以发现它们的证明有共同的特点：都是从求证的结论出发，一步一步地探索保证前一个结论成立的充分条件，直到归结为这个命题的条件，或者归结为定义、公理、定理等. 我们把这样的思维方法称为**分析法**.

练习 1

1. 求证：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$（其中 $a\geqslant 3$）.
2. 证明：表面积相等的球和正方体，球的体积大于正方体的体积.

从前面的讨论中，不难看出，综合法是"由因导果"，分析法是"执果索因". 事实上，在很多数学命题的证明中，往往需要综合地运用这两种思维方法.

例 7　如图 1-3，已知 BE，CF 分别为$\triangle ABC$ 的边 AC，AB 上的高，G 为 EF 的中点，H 为 BC 的中点. 求证：$HG\perp EF$.

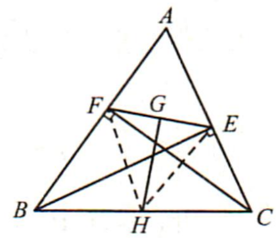


图 1-3

证明　考虑待证的结论"$HG\perp EF$".

根据命题的条件：G 是 EF 的中点，连接 EH，HF，

只要证明$\triangle EHF$ 为等腰三角形，即 $EH=HF$.

根据条件 $CF\perp AB$，且 H 是 BC 的中点，可知 FH 是 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 斜边上的中线.

所以　$FH=\frac{1}{2}BC$.

同理　$HE=\frac{1}{2}BC$.

这样，就证明了$\triangle EHF$ 为等腰三角形.

所以　$HG\perp EF$.

例 8　已知：a，b，c 都是正实数，且 $ab+bc+ca=1$. 求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

证明　考虑待证的结论"$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$"，因为 $a+b+c>0$，

只需证明 $(a+b+c)^2\geqslant 3$，

即　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3$.

又 $ab+bc+ca=1$，

所以，只需证明　$a^2+b^2+c^2\geqslant 1$，

即　$a^2+b^2+c^2-1\geqslant 0$.

因为 $ab+bc+ca=1$，

所以，只需证明　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqslant 0$，

只需证明　$2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\geqslant 0$，

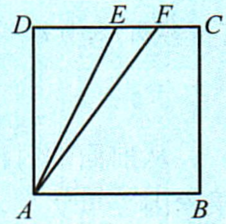
即　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.

由于任意实数的平方都非负，故上式成立.

所以　$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

练习 2

如图所示，已知四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 是 CD 边上的点，$CE=\frac{1}{2}CD$，$CF=\frac{1}{4}CD$. 求证：$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$.



习 题 1—2

1. 已知 $a>0$，$b>0$，求证：$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
2. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.
3. 证明：$f(x)=2^{x^2-4x+3}$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增加的.
4. 已知 a,b,c,d 都是实数，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$|ac+bd|\leqslant1$.
5. 已知 $|x|\leqslant1$，$|y|\leqslant1$，求证：$\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\leqslant1$.
6. 证明：当 $x>0$ 时，$\sin x<x$.
7. 已知 $a+b+c$，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ 组成公比为 q 的等比数列. 求证：$q^3+q^2+q=1$.
8. 已知△ABC 三内角 A，B，C 成等差数列，求证：对应三边 a,b,c 满足
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$
9. 已知四边形 $ABCD$ 不是矩形，$\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$，$M$，$N$ 分别为 AC，BD 的中点. 求证：$MN\perp BD$.

§3 反 证 法

在数学证明中，有直接证明和间接证明. 在上一节，我们学习的综合法和分析法都是直接证明的方法. 这一节，我们将学习一种间接证明的方法——反证法.

例 1 已知 a 是整数，2 能整除 a^2. 求证：2 能整除 a.

证明 假设命题的结论不成立，即“2 不能整除 a”.

因为 a 是整数，故 a 是奇数，a 可表示为 $2m+1$（m 为整数），则

$$a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1,$$

即 a^2 是奇数.

所以，2 不能整除 a^2. 这与已知“2 能整除 a^2”相矛盾.

于是，“2 不能整除 a”这个假设错误，故 2 能整除 a.

在本例中，我们要讨论的是 2 和整数 a 的整除关系. 2 能整除 a，2 不能整除 a，二者必居其一.

由于不易直接证明“2 能整除 a”，不妨先假设“2 不能整除 a”. 在这个前提下，我们得到了与已知条件矛盾的结论. 由此可以说明开始的假设是不成立的，从而证明“2 能整除 a”.

例 2 在同一平面内，两条直线 a，b 都和直线 c 垂直. 求证：a 与 b 平行.

证明 假设命题的结论不正确，即“直线 a 与 b 相交”.

不妨设直线 a，b 的交点为 M，a，c 的交点为 P，b，c 的交点为 Q，如图 1-4 所示，则 $\angle PMQ>0°$.

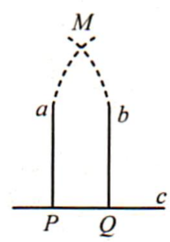


图 1-4

这样，$\triangle MPQ$ 的内角和 $=\angle PMQ+\angle MPQ+\angle PQM$

$$=\angle PMQ+90°+90°>180°.$$

这与定理“三角形的内角和等于 180°”相矛盾.

这说明假设是错误的.

所以，直线 a 与 b 不相交，即 a 与 b 平行.

在本例中，两条直线 a，b 要么相交，要么不相交，二者必居其一.

由于不易直接证明“两条直线 a，b 平行”，不妨先假设“两条直线 a，b 相交”. 在这个前提下，我们得到了与已知定理矛盾的结论. 这说

明假设“两条直线 a,b 相交”不正确，那么假设的反面就是正确的，即“两条直线 a,b 平行”.

抽象概括

在证明数学命题时，要证明的结论要么正确，要么错误，二者必居其一. 我们可以先假定命题结论的反面成立，在这个前提下，若推出的结果与定义、公理、定理相矛盾，或与命题中的已知条件相矛盾，或与假定相矛盾，从而说明命题结论的反面不可能成立，由此断定命题的结论成立. 这种证明方法叫作**反证法**.

反证法的证题步骤是：

(1) 作出否定结论的假设；

(2) 进行推理，导出矛盾；

(3) 否定假设，肯定结论.

例 3 求证：$\sqrt{2}$是无理数.

证明 假设$\sqrt{2}$不是无理数，即$\sqrt{2}$是有理数，那么它就可以表示成两个整数之比，设$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$，$p\neq 0$，且 p,q 互素，则 $p\sqrt{2}=q$.

所以，$$2p^2=q^2. \quad ①$$

故 q^2 是偶数，q 也必然为偶数.

不妨设 $q=2k$，代入①式，则有 $2p^2=4k^2$，

即 $p^2=2k^2$，

所以，p 也为偶数.

p 和 q 都是偶数，它们有公约数 2，这与 p,q 互素相矛盾.

这样，$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数.

练 习 1

求证：$\sqrt{3}$是无理数.

例 4 已知 $a_1+a_2+a_3+a_4>100$，求证：a_1,a_2,a_3,a_4 中，至少有一个数大于 25.

证明 假设结论不对，即 a_1,a_2,a_3,a_4 均不大于 25，那么.

$$a_1+a_2+a_3+a_4\leqslant 25+25+25+25=100,$$

这与已知条件矛盾.

所以，a_1, a_2, a_3, a_4 中，至少有一个数大于 25.

例 5 求证：$1, 2, \sqrt{5}$ 不可能是一个等差数列中的三项.

证明 假设 $1, 2, \sqrt{5}$ 是公差为 d 的等差数列的第 p, q, r 项，则 $2-1=(q-p)d$，$\sqrt{5}-1=(r-p)d$，于是

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{q-p}{r-p}.$$

因为 p, q, r 均为整数，所以等式右边是有理数，而等式左边是无理数，二者不可能相等，推出矛盾，所以 $1, 2, \sqrt{5}$ 不可能是一个等差数列中的三项.

例 6 如图 1-5 所示，直线 a 平行于平面 α，β 是过直线 a 的平面，平面 α 与 β 相交于直线 b. 求证：直线 a 平行于直线 b.

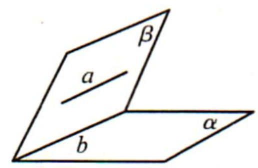


图 1-5

证明 假设命题的结论不成立，即“直线 a 不平行于直线 b”.

由于直线 a, b 在同一平面 β 中，且直线 a, b 不平行. 故直线 a, b 相交，设交点为 A，A 在直线 b 上，故 A 在平面 α 上.

所以，直线 a 与平面 α 相交于 A.

这与条件“直线 a 平行于平面 α”矛盾.

因此，假设不成立，即“直线 a 平行于直线 b”.

练 习 2

用反证法证明：13 个人中至少有两个人的生日在同一个月.

习 题 1—3

利用反证法证明下列各题：

(1) 证明：400 个人中至少有两个人生日相同；

(2) 证明：100 个球放在 90 个盒子里，至少有一个盒子里不少于两个球；

(3) 求证：$\sqrt{5}$ 是无理数；

(4) 证明：如果在一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

(5) 求证：垂直于同一条直线的两个平面互相平行.

§4 数学归纳法

问题提出

在数列的学习过程中,我们学习过一些公式:

等差数列通项公式　$a_n=a_1+(n-1)d$;

等差数列求和公式　$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$;

等比数列通项公式　$a_n=a_1q^{n-1}$;

等比数列求和公式　$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

这些公式都是与正整数 n 有关的命题.

对于与正整数 n 有关的命题,怎样证明它们对每一个正整数 n 都正确呢?

对这类问题的证明方法不止一种,其中数学归纳法是证明这类问题的一种方法.

数学归纳法是用来证明某些与正整数 n 有关的数学命题的一种方法. 它的基本步骤是:

(1)验证:当 n 取第一个值 n_0(如 $n_0=1$ 或 2 等)时,命题成立;

(2)在假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+,k\geqslant n_0)$时命题成立的前提下,推出当 $n=k+1$时,命题成立.

根据(1)(2)可以断定命题对一切从 n_0 开始的正整数 n 都成立.

数学归纳法为什么能保证命题对所有的正整数都成立?

根据(1),验证了当 $n=1$ 时命题成立;根据(2)可知,当 $n=1+1=2$ 时命题成立. 由于 $n=2$ 时命题成立,再根据(2)可知,当 $n=2+1=3$ 时命题也成立,这样递推下去,就可以知道当 $n=4,5,\cdots$时命题成立. 即命题对任意正整数 n 都成立.

实例分析

例 1 证明:首项为 a_1,公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}.$$

证明 (1)当 $n=1$ 时,左边 $=S_1=a_1$,右边 $=1\cdot a_1+\frac{1\cdot(1-1)d}{2}=a_1$,等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant1)$时,等式成立,即 $S_k=ka_1+\frac{k(k-1)d}{2}$成立.

那么,当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+a_{k+1}\\&=\left[ka_1+\frac{k(k-1)d}{2}\right]+\{a_1+[(k+1)-1]d\}\\&=(k+1)a_1+\frac{k(k-1)d+2kd}{2}\\&=(k+1)a_1+\frac{k(k+1)d}{2}\\&=(k+1)a_1+\frac{(k+1)[(k+1)-1]d}{2}.\end{aligned}$$

这就是说,当 $n=k+1$ 时等式成立.

根据(1)和(2),可知等式对任意正整数 n 都成立.

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$,$a_1=0$,试猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并用数学归纳法证明.

解 由 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$和 $a_1=0$,得

$$a_2=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

$$a_4=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4},\quad a_5=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5},$$

……

归纳上述结果,可得猜想 $a_n=\frac{n-1}{n}(n=1,2,\cdots)$.

下面用数学归纳法证明这个猜想.

(1)当 $n=1$ 时,左边 $=a_1=0$,右边 $=\frac{1-1}{1}=0$,等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，命题成立，即 $a_k=\dfrac{k-1}{k}$ 成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{k-1}{k}}=\frac{k}{k+1}=\frac{(k+1)-1}{k+1}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式成立.

根据(1)和(2)，可知猜想 $a_n=\dfrac{n-1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

我们可以通过这个例题体会归纳和数学归纳法的区别. 数学上，在归纳出结论后，还需给出严格证明. 在学习和使用数学归纳法时，需要特别注意：

(1)用数学归纳法证明的对象是与正整数 n 有关的命题；

(2)在用数学归纳法证明中，两个基本步骤缺一不可.

例 3 用数学归纳法证明：$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$(其中 $\alpha>-1$，n 是正整数).

证明 (1)当 $n=1$ 时，左边 $=1+\alpha$，右边 $=1+\alpha$.

所以，当 $n=1$ 时，命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，命题成立，即 $(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha$.

那么，当 $n=k+1$ 时，因为 $\alpha>-1$，所以 $1+\alpha>0$.

根据假设知，$(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha$，所以

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{k+1}&=(1+\alpha)^k(1+\alpha)\\&\geqslant(1+k\alpha)(1+\alpha)\\&=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.\end{aligned}$$

由于 $k\alpha^2\geqslant 0$，所以

$$1+(k+1)\alpha+k\alpha^2\geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

从而

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时命题成立.

根据(1)和(2)，该命题成立.

练　习

用数学归纳法证明：$x^{2n}-y^{2n}$能被$x+y$整除（n是正整数）.

习　题　1—4

1. 求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$（$n$是正整数）.
2. 平面内有$n(n\geqslant 2)$条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点的个数$f(n)$等于$\frac{n(n-1)}{2}$.
3. 用数学归纳法证明：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$（$n$是正整数）.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 合情推理的意义与应用

(1) 会利用归纳进行简单的推理与猜想.

(2) 会利用类比进行简单的推理与猜想.

2. 演绎推理的意义与应用

(1) 体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本模式，并能进行简单的推理.

(2) 了解数学证明的几种基本方法：综合法、分析法、反证法和数学归纳法，并能运用这些方法进行一些简单的数学证明.

(3) 了解合情推理和演绎推理之间的联系、差异和各自所起的作用.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次的呈现.

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结.

3. 本章复习时，可供参考的复习题：

(1) 日常和数学学习中有哪些合情推理的方式？举例说明.

(2) 如何运用合情推理进行数学和其他学科的学习？如何避免合情推理的局限性？

(3) 分析法与综合法各自有何特点？在解决问题时各自有何作用？

(4) 归纳推理与数学归纳法有何关系？

(5) 与其他证明方法相比，反证法的思考过程有何特点？

4. 请同学们相互交流学习本章的感受，特别是本章所学的常用的思维方式在日常学习和生活中的应用.

复习题一

A　组

1. 运用类比的思想，讨论椭圆、双曲线、抛物线的性质.
2. 运用类比的思想，讨论指数函数和等比数列，线性函数和等差数列.
3. 将下面平面几何中的概念类比到立体几何中的相应结果是什么？请将下表填充完整.

平面几何	立体几何
① 等腰三角形	
② 等腰三角形的底	
③ 等腰三角形的腰	
④ 点到直线的距离	

4. 用综合法证明：若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
5. 用分析法证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A$ 的外角平分线与三角形的外接圆相交于点 D，那么 $BD=CD$.
6. 用分析法证明：$(\sqrt{2}+1)^2<\frac{17}{5}\sqrt{3}$.
7. 用分析法证明：若 a，b，c 表示 $\triangle ABC$ 的三条边长，$m>0$，则

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}.$$

8. 分别用分析法和综合法证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$，BE，CF 分别是三角形的高线，BE 与 CF 相交于点 M，那么，$MB=MC$.
9. 求证：在三角形中，大边对大角.
10. 用反证法证明：在一个三角形中，至少有一个内角大于或等于 $60°$.
11. 根据生物科学的研究结果，人的头发不超过 20 万根.
    (1) 试证明：在人口为 50 万的城市中，至少有两个人头发根数相同.
    (2) 是否有三个人头发根数相同？说明理由.
12. 在空间中，有三条不共面的直线，它们交于一点，试用反证法证明：这三条直线没有公共垂线.
13. 用反证法证明：a，b，c，d 都是实数，且满足 $a+b=1$，$c+d=1$，$ac+bd>1$，则 a，b，c，d 四个数中至少有一个是负数.
14. 用数学归纳法证明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2$（$n$ 是正整数）.
15. 用数学归纳法证明：$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$（$n$ 是正整数）.
16. 证明：凸 n 边形的对角线的条数 $f(n)=\frac{n(n-3)}{2}$　$(n\geqslant4)$.
17. 证明：凸 n 边形 $(n\geqslant3)$ 的内角和等于 $(n-2)\pi$.

B 组

已知 a, b 为正实数，且 $a+b=1$，求证：$3^a+3^b<4$.

第二章 变化率与导数

在报纸或电视节目中，我们有时会得到这样的信息：

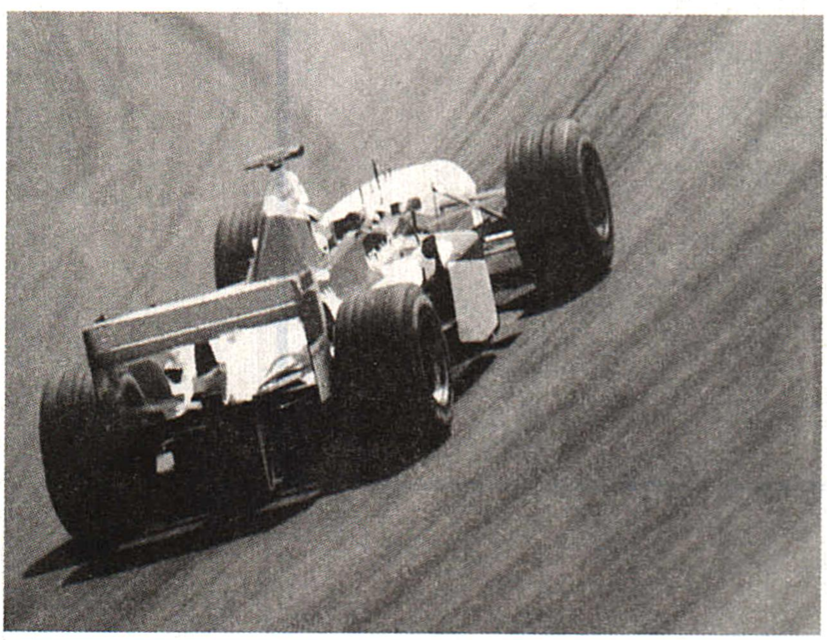
……这种战斗机最大飞行高度 18 000 米，最大冲刺速度 1 480 千米/时.

据某气象台报道，某市在 20 日凌晨 1～2 时降雨强度达 72 毫米/时；有的地方瞬间降雨强度达 99 毫米/时，被称作"白雨"(眼睛已看不清景物).

……

"冲刺速度""降雨强度"刻画的是飞行的路程和降雨量瞬时变化的情况，都是数学中导数概念的原型. 导数是数学中最重要的概念之一，它在日常生活和科学研究中有广泛的应用.

本章我们将讨论导数概念的产生过程，学习导数在研究函数和解决实际问题中的意义和应用.



§1　变化的快慢与变化率

问题提出

世界上，变化无处不在，人们经常关心变化的快慢问题. 如何刻画事物变化的快慢呢？

实例分析

问题 1　物体从某一时刻开始运动，设 s 表示此物体经过时间 t 走过的路程，显然 s 是时间 t 的函数，表示为 $s=s(t)$.

在运动的过程中测得了一些数据，如表 2-1.

表 2-1

t/s	0	2	5	10	13	15	…
s/m	0	6	9	20	32	44	…

物体在 0～2 s 和 10～13 s 这两段时间内，哪一段时间运动得快？如何刻画物体运动的快慢？

分析　我们通常用平均速度来比较运动的快慢.

在 0～2 s 这段时间内，物体的平均速度为：$\dfrac{6-0}{2-0}=3(\text{m/s})$；

在 10～13 s 这段时间内，物体的平均速度为：$\dfrac{32-20}{13-10}=4(\text{m/s})$.

显然，物体在后一段时间比前一段时间运动得快.

问题 2　某病人吃完退烧药，他的体温变化如图 2-1 所示.

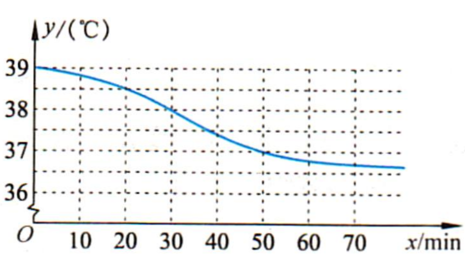


图 2-1

比较时间 x 从 0 min 到 20 min 和从 20 min 到 30 min 体温的变

化情况，哪段时间体温变化较快？如何刻画体温变化的快慢？

分析 根据图像可以看出：

当时间 x 从 0 min 到 20 min 时，体温 y 从 39 ℃变为38.5 ℃，下降了 0.5 ℃；

当时间 x 从 20 min 到 30 min 时，体温 y 从 38.5 ℃变为38 ℃，下降了 0.5 ℃.

两段时间下降相同的温度，而后一段时间比前一段短，所以后一段时间的体温比前一段时间下降得快.

我们也可以比较在这两段时间中，单位时间内体温的平均变化量，于是当时间 x 从 0 min 变到 20 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38.5-39}{20-0}=\frac{-0.5}{20}=-0.025(℃/\mathrm{min});$$

当时间 x 从 20 min 变到 30 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38-38.5}{30-20}=\frac{-0.5}{10}=-0.05(℃/\mathrm{min}).$$

这里出现了负号，它表示体温下降了，显然，绝对值越大，下降得越快，这里，体温从 20 min 到 30 min 这段时间下降得比 0 min 到 20 min这段时间要快.

上面的第一个问题中，我们用一段时间内物体的平均速度刻画了物体运动的快慢，当时间从 t_0 变为 t_1 时，物体所走的路程从 $s(t_0)$ 变为 $s(t_1)$，这段时间内物体的平均速度是

$$\text{平均速度}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}.$$

第二个问题中，我们用一段时间内体温的平均变化率刻画了体温变化的快慢，当时间从 x_0 变为 x_1 时，体温从 $y(x_0)$变为 $y(x_1)$，

$$\text{体温的平均变化率}=\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0}.$$

抽象概括

对一般的函数 $y=f(x)$来说，当自变量 x 从 x_1 变为 x_2 时，函数值从$f(x_1)$变为$f(x_2)$，它的平均变化率为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

通常我们把自变量的变化 x_2-x_1 称作自变量的改变量，记作 Δx，函数值的变化 $f(x_2)-f(x_1)$称作函数值的改变量，记作 Δy. 这

样，函数的平均变化率就可以表示为函数值的改变量与自变量的改变量之比，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

我们用它来刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢.

练习 1

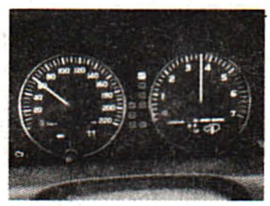
某人服药后，人吸收药物的情况可以用血液中药物的质量浓度 c(单位:mg/mL)来表示，它是时间 t(单位:min)的函数，表示为 $c=c(t)$. 下表给出了 $c(t)$的一些函数值:

t/min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$c(t)$/(mg/mL)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.41

(1) 求服药后 30 min 内，30～40 min，80～90 min 这 3 段时间内，药物质量浓度的平均变化率，并回答:哪段时间血液中药物的质量浓度变化最快?

(2) 如何刻画药物质量浓度变化的快慢?

问题提出



上面我们用平均速度刻画了物体在一段时间内运动的快慢.

在实际中，还常常要考虑物体在某一瞬间的速度. 比如我们看到汽车在行驶过程中不断变化的速度表，每个时刻指针指向的就是汽车在该时刻的瞬时速度.

如何理解瞬时速度? 它与平均速度有何关系呢?

实例分析

例 1 一个小球从高空自由下落，其走过的路程 s(单位:m)与时间t(单位:s)的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 为重力加速度($g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$). 试估计小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

分析 当时间 t 从 t_0变到 t_1时，根据平均速度公式

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0},$$

可以求出从 5 s 到 6 s 这段时间内小球的平均速度

$$\frac{s(6)-s(5)}{6-5}=\frac{176.4-122.5}{1}=53.9(\mathrm{m/s}).$$

我们有时用它来近似表示 $t=5$ s 时的瞬时速度. 为了提高精确度,可以缩短时间间隔,如求出 5～5.1 s 这段时间内的平均速度

$$\frac{s(5.1)-s(5)}{5.1-5}\approx\frac{127.45-122.5}{0.1}=49.5(\text{m/s}),$$

用它来近似表示 $t=5$ s 时的瞬时速度.

如果时间间隔进一步缩短,那么可以想象,平均速度就更接近小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

解 我们将时间间隔每次缩短为前面的 $\frac{1}{10}$,计算出相应的平均速度得到表 2-2.

表 2-2

t_0/s	t_1/s	时间的改变量 (Δt)/s	路程的改变量 (Δs)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$/(m/s)
5	5.1	0.1	4.95	49.5
5	5.01	0.01	0.49	49.049
5	5.001	0.001	0.049	49.004 9
5	5.000 1	0.000 1	0.004 9	49.000 49
5	…	…	…	…

可以看出,当时间 t_1 趋于 $t_0=5$ s 时,平均速度趋于 49 m/s,因此,可以认为小球在 $t_0=5$ s 时的瞬时速度为 49 m/s. 从上面的分析和计算可以看出,瞬时速度为 49 m/s 的物理意义是,如果小球保持这一时刻的速度进行运动的话,每秒将要运动 49 m.

动手实践

根据 $s=\frac{1}{2}gt^2$,解决下面的问题:

填写表 2-3,估计 $t=5$ s 时小球的瞬时速度.

表 2-3

t_0/s	t_1/s	时间的改变量 (Δt)/s	路程的改变量 (Δs)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$/(m/s)
4.9	5			
4.99	5			
4.999	5			
4.999 9	5			

例 2　如图 2-2 所示，一根质量分布不均匀的合金棒，长为10 m. x(单位：m)表示 OX 这段棒的长，y(单位：kg)表示 OX 这段棒的质量，它们满足以下函数关系：

$$y=f(x)=2\sqrt{x}.$$

估计该合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

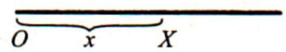


图 2-2

分析　我们还是从一段合金棒的平均线密度开始考虑，一段合金棒的质量除以这段合金棒的长度，就是这段合金棒的平均线密度.

我们用 $x_0=2$ m 到 $x_1=3$ m 的一段合金棒的平均线密度估计 $x=2$ m 处合金棒的线密度.

求出 $x_0=2$ m 到 $x_1=3$ m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}\approx\frac{3.464-2.828}{3-2}=0.636(\text{kg/m}),$$

它可以近似表示 $x_0=2$ m 处合金棒的线密度.

像例 1 那样，为了提高精确度，可以取原长度的$\frac{1}{10}$，即求出 2～2.1 m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}\approx\frac{2.898-2.828}{0.1}=0.70(\text{kg/m}),$$

用它来近似表示合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

如果合金棒的长度进一步缩小，那么可以想象，平均线密度就会更接近合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

解　由 $y=f(x)=2\sqrt{x}$，我们可以按下表计算出相应的平均线密度得到表 2-4.

表 2-4

x_0/m	x_1/m	长度 x 的改变量 (Δx)/m	质量 y 的改变量 (Δy)/kg	平均线密度 $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$/(kg/m)
2	2.1	0.1	0.070	0.70
2	2.01	0.01	0.007 1	0.71
2	2.001	0.001	0.000 71	0.71
2	2.000 1	0.000 1	0.000 071	0.71
2	…	…	…	…

可以看出，当 x_1 趋于 $x_0=2$ m 时，平均线密度趋于 0.71 kg/m，因此，可以认为合金棒在 $x_0=2$ m 处的线密度为 0.71 kg/m. 从上面的分析和计算可以看出，线密度为 0.71 kg/m 的物理意义是，如果有 1 m 长的这种线密度的合金棒，其质量将为 0.71 kg.

抽象概括

在前面的两个问题中，我们通过减小自变量的改变量，用平均变化率“逼近”瞬时变化率.

由前可知，对于一般的函数 $y=f(x)$，在自变量 x 从 x_0 变到 x_1 的过程中，若设 $\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$，则函数的平均变化率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

而当 Δx 趋于 0 时，平均变化率就趋于函数在 x_0 点的瞬时变化率，瞬时变化率刻画的是函数在一点处变化的快慢.

练习 2

1. 在自由落体运动中，根据 $s=\frac{1}{2}gt^2$，仿照例 1，估计 $t=2$ s 时的瞬时速度.

2. 已知函数 $y=\frac{1}{x}$，求自变量 x 在以下的变化过程中，函数值的平均变化率：

自变量 x 从 1 变到 1.1；

自变量 x 从 1 变到 1.01；

自变量 x 从 1 变到 1.001.

估计当 $x=1$ 时，函数的瞬时变化率是多少？

习题 2—1

A 组

1. 下表为 3 名运动员 1 500 m 跑的分段成绩：

运动员	0～800 m	0～1 000 m	0～1 200 m	最后 300 m
1	1′57.92″❶	2′28.32″	2′57.96″	39.83″
2	1′58.24″	2′28.56″	2′58.12″	39.69″
3	1′58.76″	2′29.08″	2′58.12″	39.74″

❶表示 1 分 57.92 秒.

(1) 这 3 名运动员谁全程跑得最快？

(2) 这 3 名运动员谁在最后 300 m 的冲刺阶段跑得最快？

2. 已知函数 $y=f(x)=-2x+1$.

(1) 当 x 从 1 变为 2 时，函数值 y 改变了多少？此时函数值 y 关于 x 的平均变化率是多少？

(2) 当 x 从 -1 变为 1 时，函数值改变了多少？此时函数值 y 关于 x 的平均变化率是多少？

(3) 这个函数变化的快慢有何特点？求这个函数在 $x=1$，$x=3$ 处的瞬时变化率.

3. 某个物体走过的路程 s(单位：m)是时间 t(单位：s)的函数：$s=t^2-1$，通过平均速度估计物体在下列各时刻的瞬时速度：

(1) $t=0$；　　(2) $t=2$；　　(3) $t=4$.

4. 通过平均变化率估计函数 $y=2x^2$ 在下列各点的瞬时变化率：

(1) $x=1$；　　(2) $x=-1$；　　(3) $x=0$.

5. 通过平均变化率估计函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 在下列各点的瞬时变化率：

(1) $x=-1$；　　(2) $x=1$；　　(3) $x=2$.

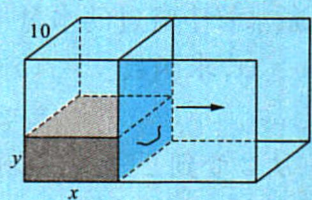
B　组

1. 有一个长方体的容器，如图所示，它的宽为 10 cm，高为 100 cm. 右侧面为一活塞，容器中装有 1 000 mL 的水. 活塞的初始位置(距左侧面)为 $x_0=1$ cm，水面高度为 100 cm. 当活塞位于距左侧面 x cm 的位置时，水面高度为 y cm.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 活塞的位置 x 从 1 cm 变为 2 cm，水面高度改变了多少？活塞位置 x 从 8 cm 变为 10 cm，水面高度改变了多少？以上哪个过程水面高度的变化较快？

(3) 试估计当 $x=10$ cm 时，水面高度 y 关于活塞位置 x 的瞬时变化率.



(第 1 题)

2. 圆的面积 S 随着半径 r 的变化而变化. 试分析圆的面积随半径 r 增大而增大的快慢情况.

§2 导数的概念及其几何意义

2.1 导数的概念

前面我们讨论了平均变化率与瞬时变化率的关系，下面我们进一步讨论函数的瞬时变化率问题.

设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_1)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 x_1 趋于 x_0，即 Δx 趋于 0 时，如果平均变化率趋于一个固定的值❶，那么这个值就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的瞬时变化率. 在数学中，称瞬时变化率为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的**导数**，通常用符号 $f'(x_0)$ 表示，记作

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

❶这个值称为：当 x_1 趋于 x_0 时，平均变化率的极限.

例 1 一条水管中流过的水量 y(单位：m^3)是时间 x(单位：s)的函数 $y=f(x)=3x$. 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数 $f'(2)$，并解释它的实际意义.

解 当 x 从 2 变到 $2+\Delta x$ 时，函数值从 3×2 变到 $3(2+\Delta x)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{3(2+\Delta x)-3\times 2}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}).$$

当 x 趋于 2，即 Δx 趋于 0 时，平均变化率趋于 3，所以

$$f'(2)=3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

导数 $f'(2)$ 表示当 $x=2$ s 时水量的瞬时变化率，即水流的瞬时速度. 也就是如果水管中的水以 $x=2$ s 时的瞬时速度流动的话，每经过 1 s，水管中流过的水量为 3 m^3.

例 2 一名食品加工厂的工人上班后开始连续工作，生产的食品量 y(单位：kg)是其工作时间 x(单位：h)的函数 $y=f(x)$. 假设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的导数分别为 $f'(1)=4$ 和 $f'(3)=3.5$，试解释它们的实际意义.

解　$f'(1)=4$ 表示该工人上班后工作 1 h 的时候，其生产速度(即工作效率)为 4 kg/h，也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每时可以生产 4 kg 的食品.

$f'(3)=3.5$ 表示该工人上班后工作 3 h 的时候，其生产速度为 3.5 kg/h. 也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每时可以生产 3.5 kg 的食品.

例 3　服药后，人体血液中药物的质量浓度 y(单位：μg/mL)是时间 t(单位：min)的函数 $y=f(t)$，假设函数 $y=f(t)$在 $t=10$ 和 $t=100$ 处的导数分别为 $f'(10)=1.5$ 和 $f'(100)=-0.6$，试解释它们的实际意义.

解　$f'(10)=1.5$ 表示服药后 10 min 时，血液中药物的质量浓度上升的速度为 1.5 μg/(mL · min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将上升 1.5 μg/mL.

$f'(100)=-0.6$ 表示服药后 100 min 时，血液中药物的质量浓度下降的速度为 0.6 μg/(mL · min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将下降 0.6 μg/mL.

思考交流

举出生活中 2 个函数的实例，结合具体问题讨论它们在某一点处导数的实际意义.

练　习

1. 根据例 1 中的函数 $y=f(x)=3x$，求 $f'(4)$，并解释它的实际意义.
2. 设 x(单位：km)表示从一条河流的某一处到其源头的距离，y(单位：km)表示这一点的海拔高度，y 是 x 的函数 $y=f(x)$. 若函数 $y=f(x)$在 $x=100$ 处的导数$f'(100)=-0.1$，试解释它的实际意义.

2.2 导数的几何意义

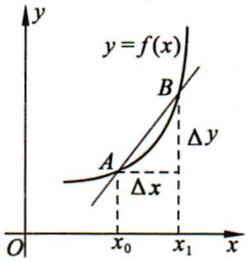


图 2-3

函数 $y=f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如图 2-3 所示，它是过 $A(x_0, f(x_0))$ 和 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 两点的直线的斜率. 这条直线称为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的一条割线.

如图 2-4 所示，设函数 $y=f(x)$ 的图像是一条光滑的曲线，从图像上可以看出：当 Δx 取不同的值时，可以得到不同的割线；当 Δx 趋于零时，点 B 将沿着曲线 $y=f(x)$ 趋于点 A，割线 AB 将绕点 A 转动最后趋于直线 l. 直线 l 和曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处"相切"，称直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线. 该切线的斜率就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

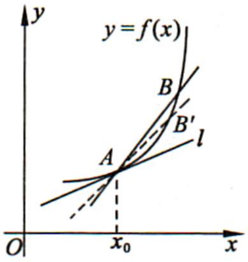


图 2-4

抽象概括

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率反映了导数的几何意义.

> **信息技术建议**
>
> 可以利用信息技术动态呈现由割线到切线的变化过程，具体操作见本节后的"信息技术应用"栏目.

例 4 已知函数 $y=f(x)=x^2$，$x_0=-2$.

(1) 分别对 $\Delta x=2, 1, 0.5$ 求 $y=x^2$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，并画出过点 $(x_0, f(x_0))$ 的相应割线；

(2) 求函数 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的导数，并画出曲线 $y=x^2$ 在点 $(-2, 4)$ 处的切线.

解 (1) $\Delta x=2, 1, 0.5$ 时，区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 相应为 $[-2, 0]$，$[-2, -1]$，$[-2, -1.5]$. $y=x^2$ 在这些区间上的平均变化率分别为

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2}=\frac{0^2-(-2)^2}{2}=-2,$$

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{1}=\frac{(-1)^2-(-2)^2}{1}=-3,$$

$$\frac{f(-1.5)-f(-2)}{0.5}=\frac{(-1.5)^2-(-2)^2}{0.5}=-3.5.$$

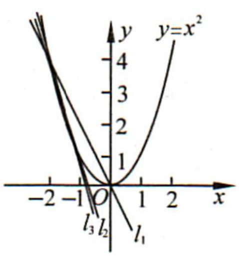


图 2-5

其相应割线，如图 2-5 所示，分别是过点 $(-2, 4)$ 和点 $(0, 0)$ 的直线 l_1，过点 $(-2, 4)$ 和点 $(-1, 1)$ 的直线 l_2，过点 $(-2, 4)$ 和点 $(-1.5, 2.25)$ 的直线 l_3.

(2) $y=x^2$ 在区间 $[-2, -2+\Delta x]$ 上的平均变化率为

$$\frac{(-2+\Delta x)^2-(-2)^2}{\Delta x}=\frac{-4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4+\Delta x.$$

令 Δx 趋于零，知函数 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的导数为 -4.

曲线 $y=x^2$ 在点 $(-2,4)$ 处的切线为 l，如图 2-6 所示.

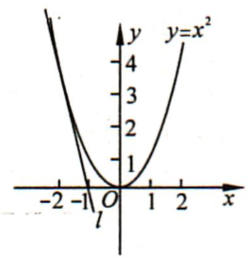


图 2-6

例 5　求函数 $y=f(x)=2x^3$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解　先求 $y=2x^3$ 在 $x=1$ 处的导数：

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^3-2\times 1^3}{\Delta x}$$

$$=\frac{2[1+3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]-2}{\Delta x}$$

$$=6+6\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

令 Δx 趋于零，可知 $y=2x^3$ 在 $x=1$ 处的导数为 $f'(1)=6$.

这样，函数 $y=2x^3$ 在点 $(1,f(1))=(1,2)$ 处的切线斜率为 6. 即该切线经过点 $(1,2)$，斜率为 6.

因此切线方程为

$$y-2=6(x-1).$$

即

$$y=6x-4.$$

切线如图 2-7 所示.

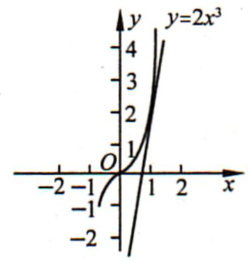


图 2-7

信息技术应用

用割线逼近切线

在函数 $y=0.3x^2-1.3x+3.4$ 的图像上任取两点 P,Q，则割线 PQ 的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$（如图 2-8 所示）. 利用几何画板可以动态地展现出用割线逼近切线的过程.

如图 2-8，拖动点 Q 沿着曲线逐渐靠近点 P，割线 PQ 将绕着点 P 逐渐转动. 当点 Q 沿着曲线趋于点 P，即 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 就趋于过点 P 的切线.

观察、比较割线 PQ 在点 Q 的变化下，斜率值的变化情况.（如图 2-9，图 2-10 所示）

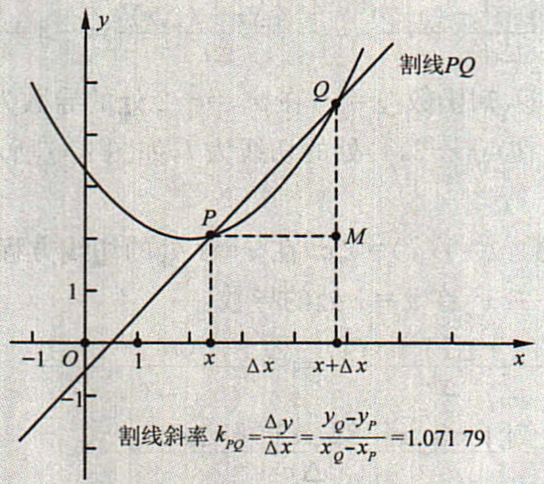

割线PQ
Q
P
M
y
x
1
-1
O
x
Δx
$x+\Delta x$
割线斜率 $k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=1.071\ 79$

图 2-8

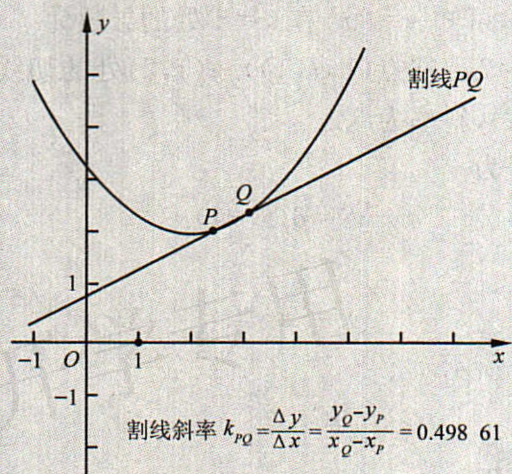

割线PQ
Q
P
y
x
1
-1
O
割线斜率 $k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=0.498\ 61$

图 2-9

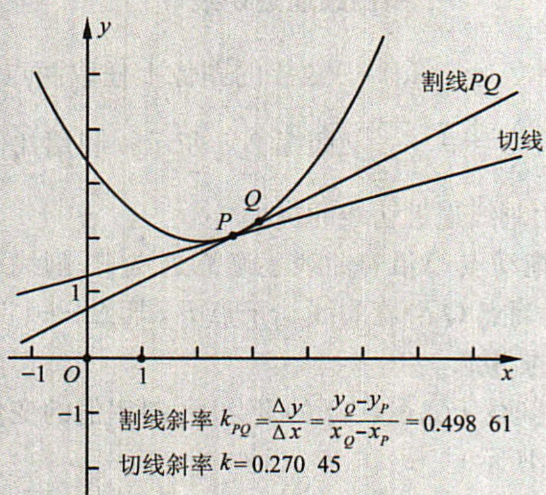

割线PQ
切线
Q
P
y
x
1
-1
O
割线斜率 $k_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=0.498\ 61$
切线斜率 $k=0.270\ 45$

图 2-10

练　习

1. 求 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 处的切线斜率，并求出过该点的切线方程.
2. 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

习　题　2—2

A　组

1. 物体走过的路程 s(单位：m)是时间 t(单位：s)的函数，可以表示为 $s=2t+1$. 求函数在下列各点的导数，并解释它们的实际意义：

   (1) $t=1$；　　(2) $t=2$；　　(3) $t=5$.
2. 已知圆的面积 S 是半径 r 的函数 $S=\pi r^2$，用定义求 S 在 $r=5$ 处的导数，并对 $S'(5)$ 的意义进行解释.
3. 求函数 $f(x)=-2x^2$ 在下列各点的导数，并说明它们的几何意义：

   (1) $x=-1$；　　(2) $x=0$；　　(3) $x=2$.
4. 求函数 $y=\frac{5}{x}$ 在下列各点的导数：

   (1) $x=-1$；　　(2) $x=1$；　　(3) $x=5$.
5. 求曲线 $y=\frac{1}{x}+2x$ 在 $x=1$ 处切线的斜率，并求该切线的切线方程.

B　组

1. 根据导数的几何意义，求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $x=1$ 处的导数.
2. 求函数 $y=\frac{1}{2-x}$ 在 $x=-1$ 处的导数，并求曲线在该处的切线方程.

§3 计算导数

例 1 一个运动物体走过的路程 s(单位:m)是时间 t(单位:s)的函数 $s=f(t)=2t^2$. 求 $f'(5)$,并解释它的实际意义.

解 首先,对 $t=5$ 给出自变量 t 的改变量 Δt,得到相应的函数值的改变量

$$\Delta s=f(5+\Delta t)-f(5)=2(5+\Delta t)^2-2\times 5^2=2[10\Delta t+(\Delta t)^2].$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2[10\Delta t+(\Delta t)^2]}{\Delta t}=2(10+\Delta t).$$

当 Δt 趋于 0 时,可以得到导数

$$f'(5)=\lim_{\Delta t\to 0}2(10+\Delta t)=20(\mathrm{m/s}).$$

导数 $f'(5)$ 表示的是物体在第 5 s 时的瞬时速度,也就是物体在第 5 s 时的瞬时速度为 20 m/s.

计算函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的步骤如下:

(1)通过自变量在 x_0 处的改变量 Δx,确定函数在 x_0 处的改变量:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

(2)确定函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的平均变化率:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3)当 Δx 趋于 0 时,得到导数:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例 2 求函数 $y=f(x)=\frac{2}{x}+x$ 在下列各点的导数:

(1) $x=1$; (2) $x=-2$; (3) $x=x_0$.

解 (1) 首先,对 $x=1$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(1+\Delta x)-f(1)\\&=\frac{2}{1+\Delta x}+(1+\Delta x)-\left(\frac{2}{1}+1\right)\\&=\frac{(\Delta x)^2-\Delta x}{1+\Delta x}.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{(\Delta x)^2-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x-1}{1+\Delta x}=\frac{1+\Delta x-2}{1+\Delta x}=1-\frac{2}{1+\Delta x}.$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得出导数

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1-\frac{2}{1+\Delta x}\right)=-1.$$

(2) 首先，对 $x=-2$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx，得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(-2+\Delta x)-f(-2)\\&=\frac{2}{-2+\Delta x}+(-2+\Delta x)-\left[\frac{2}{-2}+(-2)\right]\\&=\frac{\Delta x}{-2+\Delta x}+\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta x}{-2+\Delta x}+\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{-2+\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导数

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{-2+\Delta x}+1\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(3) 首先，对 $x=x_0$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx，得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=\frac{2}{x_0+\Delta x}+(x_0+\Delta x)-\left(\frac{2}{x_0}+x_0\right)\\&=-\frac{2\Delta x}{x_0^2+x_0\Delta x}+\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{2\Delta x}{x_0^2+x_0\Delta x}+\Delta x}{\Delta x}=-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得出导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1\right)=-\frac{2}{x_0^2}+1.$$

抽象概括

例 2 中的函数 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 对于定义域中的任一点 x_0，函数都有一个导数值 $f'(x_0)=-\frac{2}{x_0^2}+1$ 与之对应，所以，$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1$是

x 的函数.

一般地,如果一个函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的每一点 x 处都有导数,导数值记为 $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

则 $f'(x)$ 是关于 x 的函数,称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**导函数**,通常也简称为**导数**.

比如,函数 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 的导函数为

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1.$$

显然,前面求 $f(x)=\frac{2}{x}+x$ 在 $x=1$,-2 各点的导数就是导函数 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1$ 在各点的值.

例 3 求 $y=f(x)=3x^2-x$ 的导函数 $f'(x)$,并利用导函数 $f'(x)$ 求 $f'(1)$,$f'(-2)$,$f'(0)$.

解 首先给自变量 x 一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &=3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-(3x^2-x)\\ &=3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=3\Delta x+6x-1.$$

当 Δx 趋于 0 时,可以得出导函数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(3\Delta x+6x-1)=6x-1.$$

分别将 $x=1$,$x=-2$,$x=0$ 代入 $f'(x)$,可得

$$\begin{aligned}f'(1)&=6\times 1-1=5,\\ f'(-2)&=6\times(-2)-1=-13,\\ f'(0)&=6\times 0-1=-1.\end{aligned}$$

练 习

1. 已知自由下落的物体下落的距离 s(单位:m)是时间 t(单位:s)的函数 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$,取 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$. 求函数在 $t=2$ 处的导数 $f'(2)$,并解释它的实际意义.
2. 求函数 $y=\frac{100}{x}$ 的导函数 $f'(x)$,并利用 $f'(x)$ 求 $f'(1)$,$f'(2)$,$f'(3)$.

我们通过导数的定义求出了一些简单函数的导数. 如何系统地求函数的导数要用到更进一步的数学知识，中学阶段我们不作系统讨论. 对我们来说，重要的是理解导数概念及其实际意义，并利用它们去思考、分析和理解一些问题.

为了解决可能遇到的导数计算问题，在本节中，我们给出了一个简单的导数公式表，列出了学过的基本初等函数的导数. 以后，遇到求这些函数导数的问题时，可以直接查表.

表 2-5　导数公式表(其中三角函数的自变量单位是弧度)

函数	导函数	函数	导函数
$y=c$(c 是常数)	$y'=0$	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=x^{\alpha}$(α 是实数)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=a^{x}$($a>0, a\neq 1$)	$y'=a^{x}\ln a$ 特别地$(e^{x})'=e^{x}$	$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$
$y=\log_{a}x$($a>0, a\neq 1$)	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ 特别地$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

习　题　2—3

A　组

1. 求 $f(x)=3x^{2}+x$ 的导函数 $f'(x)$，并利用 $f'(x)$求 $f'(2)$，$f'(-2)$，$f'(3)$.
2. 求 $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$ 的导函数 $f'(x)$，并利用 $f'(x)$求 $f'(1)$，$f'(-1)$，$f'(5)$.
3. 求 $f(x)=2x-3$ 的导函数 $f'(x)$，并利用 $f'(x)$求 $f'(0)$，$f'(-1)$，$f'(3)$.
4. 求曲线 $f(x)=x^{2}$ 的一条与直线 $y=2x+1$ 平行的切线方程.
5. 分别求出函数 $f(x)=-2x$ 与 $g(x)=-2x+1$ 的导函数，并画出导函数的图像.

B　组

求函数 $y=x^{3}$ 的导函数.

§4 导数的四则运算法则

4.1 导数的加法与减法法则

问题提出

如果已知两个函数的导数，如何求这两个函数的和、差、积、商的导数呢?

我们先来通过一个具体的例子分析两函数和的情况.

实例分析

求函数 $y=f(x)=x+x^2$ 的导函数.

给定自变量 x 的一个改变量 Δx，则函数值 y 的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &=(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2-(x+x^2)\\ &=\Delta x+2x\Delta x+(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

相应的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+2x+\Delta x.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导函数

$$f'(x)=1+2x.$$

可以看出：

$$(x+x^2)'=x'+(x^2)'.$$

抽象概括

两个函数和(差)的导数等于这两个函数导数的和(差)，即

$$\boxed{\begin{aligned}&[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),\\ &[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x).\end{aligned}}$$

例 1　求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2^x$；　　(2) $y=\sqrt{x}-\ln x$.

解　(1) 函数 $y=x^2+2^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=2^x$ 的和，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=2^x\ln 2.$$

利用函数和的求导法则可得

$$\begin{aligned}(x^2+2^x)'&=f'(x)+g'(x)\\&=2x+2^x\ln 2.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}-\ln x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\ln x$ 的差，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

利用函数差的求导法则可得

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-\ln x)'&=f'(x)-g'(x)\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

例 2　求曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

解　首先求出函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 是函数 $f(x)=x^3$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的差，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=3x^2,\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

根据函数差的求导法则可得

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=f'(x)-g'(x)=3x^2-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2+\frac{1}{x^2}.$$

将 $x=1$ 代入导函数得

$$3\times1+\frac{1}{1}=4.$$

即曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 4，从而其切线方程为

$$y-0=4(x-1),$$

即

$$y=4(x-1).$$

练 习

1. 查导数公式表求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　(2) $y=3^x$；　(3) $y=\tan x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2x$；　(2) $y=3^x-x^3$；

(3) $y=x^{\frac{1}{3}}+\ln x$；　(4) $y=e^x-\dfrac{1}{x}+x^{\frac{1}{3}}$.

4.2 导数的乘法与除法法则

设函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)$，$g(x)=x^2$. 我们来求 $y=f(x)g(x)=x^2f(x)$在 x_0 处的导数.

给定自变量 x_0 的一个改变量 Δx，可以得到函数值的改变量

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2f(x_0+\Delta x)-x_0^2f(x_0).$$

相应的平均变化率可写成

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(x_0+\Delta x)^2f(x_0+\Delta x)-x_0^2f(x_0)}{\Delta x}\\&=\frac{(x_0+\Delta x)^2[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]+[(x_0+\Delta x)^2-x_0^2]f(x_0)}{\Delta x}\\&=(x_0+\Delta x)^2\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}f(x_0).\end{aligned}$$

令 $\Delta x\to 0$，由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)^2=x_0^2$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0,$$

知 $f(x)g(x)=x^2f(x)$在 x_0 处的导数值为 $x_0^2f'(x_0)+2x_0f(x_0)$.

因此，$x^2f(x)$的导数为 $x^2f'(x)+(x^2)'f(x)$.

一般地，若两个函数 $f(x)$和 $g(x)$的导数分别是 $f'(x)$和 $g'(x)$，我们有

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

特别地，当 $g(x)=k$ 时，有

$$[kf(x)]'=kf'(x).$$

思考交流

设 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$，试说明：

$$[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x),\quad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 3 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2\mathrm{e}^x$；　　(2) $y=\sqrt{x}\sin x$；　　(3) $y=x\ln x$.

解 (1) 函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 之积，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\mathrm{e}^x.$$

根据两函数之积的求导法则，可得

$$(x^2\mathrm{e}^x)'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x.$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}\sin x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\sin x$ 之积，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\cos x.$$

根据两个函数之积的求导法则，可得

$$(\sqrt{x}\sin x)'=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x.$$

(3) 函数 $y=x\ln x$ 是函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\ln x$ 之积，由导数公式表得出

$$f'(x)=1,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据函数乘法的求导法则，得出

$$(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

例 4 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

解 (1) 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)=\sin x$ 和函数 $g(x)=x$ 之商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=\cos x,\quad g'(x)=1.$$

由求导的除法法则得

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

(2) 函数 $y=\frac{x^2}{\ln x}$ 是函数 $f(x)=x^2$ 和函数 $g(x)=\ln x$ 之商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

由求导的除法法则得

$$\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)'=\frac{2x\cdot\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

练 习 1

求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\sin x$；　　(2) $y=\sqrt{x}\ln x$；

(3) $y=\frac{x+1}{x-1}$；　　(4) $y=\frac{x^2}{\cos x}$.

例 5 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2(\ln x+\sin x)$；　　(2) $y=\frac{\cos x-x}{x^2}$.

解 (1) 函数 $y=x^2(\ln x+\sin x)$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\ln x+\sin x$ 的积.

由导数公式表及和函数的求导法则分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}+\cos x.$$

由求导的乘法法则可得

$$\begin{aligned}&[x^2(\ln x+\sin x)]'\\&=2x(\ln x+\sin x)+x^2\left(\frac{1}{x}+\cos x\right)\\&=x+2x\ln x+2x\sin x+x^2\cos x.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=\frac{\cos x-x}{x^2}$ 可以看成是函数 $f(x)=\cos x-x$ 与 $g(x)=x^2$ 的商.

由导数公式表及差函数的求导法则分别得出

$$f'(x)=-\sin x-1,\quad g'(x)=2x.$$

由求导的除法法则可得

$$\left(\frac{\cos x-x}{x^2}\right)'$$
$$=\frac{(-\sin x-1)\cdot x^2-(\cos x-x)\cdot 2x}{(x^2)^2}$$
$$=-\frac{(1+\sin x)x+2\cos x-2x}{x^3}$$
$$=-\frac{x\sin x+2\cos x-x}{x^3}.$$

例 6　求曲线 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 上点(1,0)处的切线方程.

解　首先求出函数 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 的导函数.

根据导数公式表及导数的四则运算法则可得

$$f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}+(2^x)'\ln x+2^x(\ln x)'$$
$$=\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}+(2^x\ln 2)\ln x+\frac{2^x}{x}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}+2^x\ln 2\ln x+\frac{2^x}{x}.$$

将 $x=1$ 代入 $f'(x)$，得所求切线斜率

$$f'(1)=\frac{7}{4}.$$

曲线 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+2^x\ln x$ 上点(1,0)处的切线方程为

$$y=\frac{7}{4}(x-1).$$

练　习 2

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x\cos x-(\ln x)\sin x$；　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}+\dfrac{\cos x+x}{\ln x}$.

2. 求曲线 $y=\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$ 上点(1,1)处的切线方程.

习 题 2—4

A 组

1. 已知 $f(1)=1, f'(1)=2, g(1)=-2, g'(1)=1$，求下列函数在 $x=1$ 处的导数值：

   (1) $f(x)+g(x)$；　(2) $f(x)-g(x)$；

   (3) $-2f(x)$；　(4) $3g(x)$；

   (5) $f(x)g(x)$；　(6) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. 求下列函数的导函数：

   (1) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$；　(2) $y=\tan x+\ln x$；

   (3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$；　(4) $y=2^x-\cos x+4$.

3. 求曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 上点 $(1,0)$ 处的切线方程.

4. 求下列函数的导数：

   (1) $y=x^3\cos x$；　(2) $y=\sqrt{x}\sin x$；

   (3) $y=x\tan x-2\ln x$；　(4) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$；

   (5) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$；　(6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$；

   (7) $y=\dfrac{x\sin x}{\ln x}$；　(8) $y=\dfrac{e^x\cos x}{x}$.

5. 求下列各函数在给定点的导数值：

   (1) $y=\sin x\cos x$，$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；

   (2) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$，$x=2$，$x=4$；

   (3) $f(x)=x\ln x+3x^2-1$，$x=1$，$x=2$.

B 组

1. 以初速度 10 m/s 向上抛出一个物体，其上升的高度 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的关系为 $s=10t-5t^2$(取重力加速度 $g=10\ \text{m/s}^2$)，求：

   (1) 物体被抛出 t s 后的速度；

   (2) 物体在 $t=2$ s 时的速度.

2. 求曲线 $y=x^3+x-2$ 的一条与直线 $y=4x-1$ 平行的切线方程.

§5　简单复合函数的求导法则

实例分析

海上一艘油轮发生了泄漏事故．泄出的原油在海面上形成一个圆形油膜，油膜的面积 S(单位：m^2)是油膜半径 r(单位：m)的函数：

$$S=f(r)=\pi r^2.$$

油膜的半径 r 随着时间 t(单位：s)的增加而扩大，假设 r 关于 t 的函数为

$$r=\varphi(t)=2t+1.$$

油膜的面积 S 关于时间 t 的瞬时变化率是多少？

分析　这个问题中，时间 t 决定油膜半径 r，进而决定油膜面积 S，这样可以得 S 关于 t 的新的函数：

$$S=f(\varphi(t))=\pi(2t+1)^2.$$

油膜的面积 S 关于时间 t 的瞬时变化率就是函数 $S=f(\varphi(t))$的导函数.

因为 $f(\varphi(t))=\pi(2t+1)^2=\pi(4t^2+4t+1)$，根据导数公式表和导数的四则运算法则，可得

$$[f(\varphi(t))]'=\pi(8t+4)=4\pi(2t+1).$$

另外，　$f'(r)=2\pi r,\ \varphi'(t)=2,$

我们可以观察到　$4\pi(2t+1)=2\pi r\cdot 2,$

即　$[f(\varphi(t))]'=f'(r)\cdot\varphi'(t).$

抽象概括

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)=ax+b$，给定 x 的一个值，就得到了 u 的值，进而确定了 y 的值，这样 y 可以表示成 x 的函数，我们称这个函数为函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$. 其中 u 为中间变量.

复合函数 $y=f(\varphi(x))$的导数为

$$\boxed{y'_x=[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x).}$$

说　明

y'_x 表示 y 对 x 的导数.

例 1 求函数 $y=\sqrt{3x+1}$的导数．

解 引入中间变量 $u=\varphi(x)=3x+1$，则函数 $y=\sqrt{3x+1}$是由函数 $f(u)=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$与 $u=\varphi(x)=3x+1$ 复合而成的．

查导数公式表可得 $f'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$，$\varphi'(x)=3$.

根据复合函数求导法则可得

$$(\sqrt{3x+1})'=f'(u)\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

例 2 求函数 $y=(2x-1)^3$ 的导数．

解 引入中间变量 $u=\varphi(x)=2x-1$，则函数 $y=(2x-1)^3$ 是由函数 $f(u)=u^3$ 和 $u=\varphi(x)=2x-1$ 复合而成的．

由导数公式表可得 $f'(u)=3u^2$，$\varphi'(x)=2$.

再由复合函数求导法则可得

$$[(2x-1)^3]'=f'(u)\varphi'(x)=3u^2\cdot 2=6(2x-1)^2.$$

例 3 一个港口的某一观测点的水位在退潮的过程中，水面高度 y(单位：cm)关于时间 t(单位：s)的函数为$y=h(t)=\dfrac{100}{2t+1}$，求函数在 $t=3$ 时的导数，并解释它的实际意义．

解 函数 $y=\dfrac{100}{2t+1}$是由函数 $f(x)=\dfrac{100}{x}$和函数 $x=\varphi(t)=2t+1$ 复合而成的，其中 x 是中间变量．

由导数公式表可得

$$f'(x)=-\frac{100}{x^2},\ \varphi'(t)=2.$$

再由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} y'_t &= h'(t)=f'(x)\varphi'(t) \\ &= -\frac{100}{x^2}\cdot 2=-\frac{200}{(2t+1)^2}. \end{aligned}$$

将 $t=3$ 代入 $h'(t)$，得

$$h'(3)=-\frac{200}{49}(\mathrm{cm/s}).$$

它表示当 $t=3$ 时，水面高度下降的速度为$\dfrac{200}{49}$ cm/s.

练 习

写出下列各函数的中间变量，并利用复合函数的求导法则求出函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$；　　(2) $y=\sin(-x+1)$；

(3) $y=e^{-2x+1}$；　　(4) $y=\cos(x+3)$.

习 题 2—5

1. 写出下列各函数的中间变量，并利用复合函数的求导法则求出函数的导数：

   (1) $y=(x+1)^{10}$；　　(2) $y=e^{2x+1}$；

   (3) $y=\sin(-2x+5)$；　　(4) $y=\ln(3x-1)$；

   (5) $y=\sqrt[3]{2x-1}$；　　(6) $y=\tan(-x+1)$.

2. 求下列函数的导函数：

   (1) $y=e^{-x+2}(2x+1)^5$；

   (2) $y=\cos(3x-1)-\ln(-2x-1)$；

   (3) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

3. 求函数 $y=\ln(3x-2)$ 在点 $(1,0)$ 的切线方程.

4. 一做简谐振动的小球的运动方程为 $x=20\sin\left(3t-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 x（单位：cm）是小球相对于平衡点的距离，t（单位：s）为时间，求小球在 $t=0$ s，$t=\dfrac{\pi}{6}$ s，$t=\dfrac{\pi}{12}$ s时刻的速度.

5. 一听汽水放入冰箱后，其摄氏温度 x（单位：℃）由时间 t（单位：h）以公式决定：$x=4+16e^{-2t}$.

   (1) 求汽水温度 x 在 $t=1$ 处的导数；

   (2) 已知摄氏温度 x 与华氏温度 y 之间具有如下函数关系：$x=\dfrac{5}{9}y-32$. 写出 y 关于 t 的函数解析式，并求 y 关于 t 的函数的导数.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 导数概念

通过具体情境，感受在现实世界和实际生活中存在着大量的变化率问题，体会平均变化率、瞬时变化率和导数的实际意义，理解导数的几何意义.

2. 导数运算

(1)会用导数定义计算一些简单函数的导数.

(2)会利用导数公式表求出给定函数的导数.

(3)掌握求导的四则运算法则，并会利用导数的四则运算法则求出函数的导函数.

(4)了解简单复合函数的求导法则，并会利用导数公式表求出一些简单复合函数的导数.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想和方法，使知识有层次、有条理地呈现.

2. 按照学习要求的两个部分，以适当形式做出本章小结.

3. 本章复习时可供参考的思考题：

(1)实际生活中经常会涉及变化快慢的问题，你是否有体会?

(2)什么是导数？如何利用定义求函数的导数？怎样解释导数的实际意义？能否举例说明?

(3)是否会用导数的四则运算法则求函数的导数?

(4)复合函数的中间变量的意义是什么？如何寻找中间变量？怎样求复合函数的导数?

4. 请同学们相互交流学习本章的感受与体会.

复习题二

A 组

1. 下表为某水库存水量 y(单位:万 m^3)与水深 x(单位:m)的对照表:

水深 x/m	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量 y/万 m^3	0	20	40	90	160	275	437.5	650

(1) 当 x 从 5 变到 10 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少?解释它的实际意义;

(2) 当 x 从 25 变到 30 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少?解释它的实际意义;

(3) 比较(1)与(2)的数值的大小,并联系实际情况解释意义.

2. 长方形的周长为 10,一边长为 x,其面积为 S.

(1) 写出 S 与 x 之间的函数关系;

(2) 当 x 从 1 增加到 $1+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少?此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少?解释它的实际意义;

(3) 当长从 x 增加到 $x+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少?此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少?

(4) 在 $x=1$ 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少?解释它的实际意义;

(5) 在 x 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少?解释它的实际意义.

3. 利用导数定义求下列各函数的导数:

(1) $y=x+5$;　(2) $y=2x+3$;

(3) $y=x^2-1$;　(4) $y=x^2-3x$;

(5) $y=x^2-x+1$;　(6) $y=x^2+2x-1$;

(7) $y=2x^2+1$;　(8) $y=\dfrac{2}{x}+2$.

4. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^2+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$;　(2) $y=x\sin x-\sqrt{x}\ln x$;

(3) $y=\dfrac{\sin x\ln x}{x}$;　(4) $y=\sqrt{x}(x-1)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$;

(5) $y=e^x\tan x$;　(6) $y=\dfrac{x^2-1}{x+\ln x}$;

(7) $y=x\sin x+e^x\ln x-2$;　(8) $y=\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{x\ln x}$;

(9) $y=(3x+2)^3$;　(10) $y=\sin 2x$;

(11) $y=\sqrt{4x-6}$;　(12) $y=\ln(4x+5)^3$.

5. 求下列函数在给定位置的切线的斜率:

(1) $y=x^3+2x$, $x=0$;　(2) $y=\sqrt{x}+\ln x$, $x=1$;

(3) $y=x^2\ln x$, $x=1$;　(4) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x=1$.

B 组

1. 一个小球被以 10 m/s 的初速度向上抛出.($g=10\ \mathrm{m/s^2}$)

(1) 写出抛出 t s 后,小球距抛出点的高度 s 关于 t 的函数解析式;

(2) 求当 t 从 0 变到 1 时,s 关于 t 的平均变化率,解释它的实际意义;

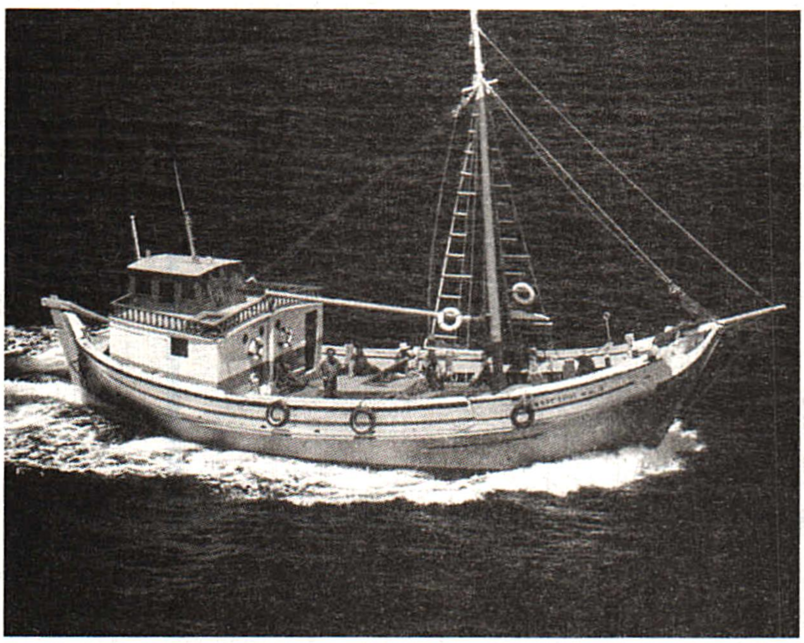
(3) 求当 t 从 1 变到 1.5 时,s 关于 t 的平均变化率,解释它的实际意义;

(4) 求 $s'(1.5)$,并解释它的实际意义.

2. 求曲线 $y=2x-\dfrac{1}{x}+1$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

第三章 导数应用

导数是数学中一个重要的概念，它在日常生活、工作和科学研究中有着广泛的应用. 在本章，我们将应用导数来研究函数，并用它来解决一些简单的实际问题.



§1 函数的单调性与极值

1.1 导数与函数的单调性

问题提出

我们知道，对于函数 $y=f(x)$ 来说，导数 $f'(x)$ 刻画的是 y 在 x 点的瞬时变化率，函数的单调性描述的是 y 随 x 的增加而增加，或 y 随 x 的增加而减少. 两者都是刻画函数的变化. 那么，导数与函数的单调性之间有何关系呢?

实例分析

先来看下面几个函数的导数及其单调性.

(1) $y=f(x)=x$，$f'(x)=1$；

(2) $y=f(x)=2x+5$，$f'(x)=2$；

(3) $y=f(x)=-3x+4$，$f'(x)=-3$.

函数的图像如图 3-1 所示.

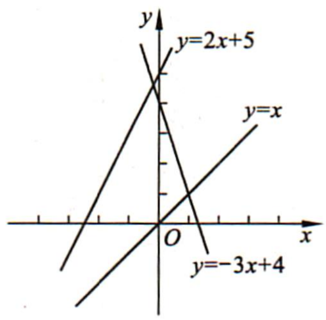


图 3-1

函数(1)(2)的导数都是正的，函数(1)(2)在定义域上都是增加的，函数(3)的导数是负的，这个函数在定义域上是减少的.

再来看指数函数、对数函数的导数及其单调性.

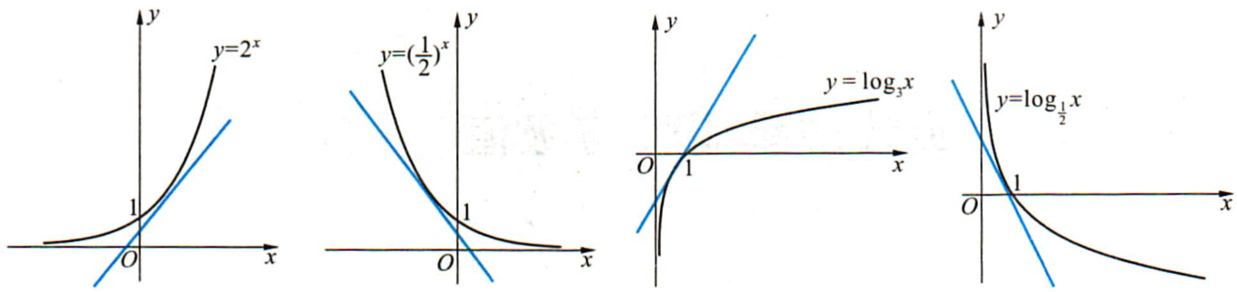
(1) $y=f(x)=2^x$，$f'(x)=2^x\ln 2$；

(2) $y=f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$；

(3) $y=f(x)=\log_3 x$，$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$；

(4) $y=f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$，$f'(x)=\frac{1}{x\ln\frac{1}{2}}$.

对函数(1)和(3)，无论 x 取定义域内的什么实数都有 $f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 在定义域上是增加的；对于函数(2)和(4)，无论 x 取定义域内的什么实数都有 $f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减少的，如图 3-2 所示.



(1) (2) (3) (4)

图 3-2

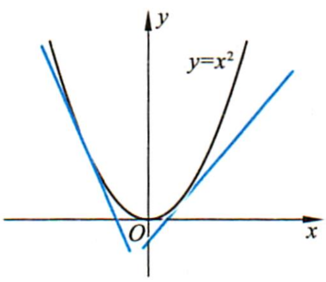


图 3-3

最后再看函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数及其单调性.

函数 $y=f(x)=x^2$ 的导函数是 $f'(x)=2x$，其图像如图 3-3 所示.

当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)=2x>0$，函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是增加的；

当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)=2x<0$，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是减少的.

抽象概括

通过以上的实例可以看出，导函数的符号与函数的单调性之间具有如下的关系：

如果在某个区间内，函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)>0$，则在这个区间上，函数 $y=f(x)$是增加的；

如果在某个区间内，函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)<0$，则在这个区间上，函数 $y=f(x)$是减少的.

例 1 求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的递增区间与递减区间.

分析 根据上面的结论，我们知道函数的单调性与函数导数的符号有关，因此，可以通过分析导数的符号求出函数的单调区间.

解 由导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

当 $x\in(-\infty,-2)$或 $x\in(3,+\infty)$时，$f'(x)>0$，因此，在这两个区间上，函数是增加的；当 $x\in(-2,3)$时，$f'(x)<0$，因此，在这个区间上，函数是减少的.

所以，函数 $y=2x^3-3x^2-36x+16$ 的递增区间为$(-\infty,-2)$和$(3,+\infty)$；递减区间为$(-2,3)$.

函数的单调性决定了函数图像的大致形状. 因此,当确定了函数的单调区间后,再通过描出一些特殊的点,就可以画出一个函数的大致图像. 图 3-4 即为 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的大致图像.

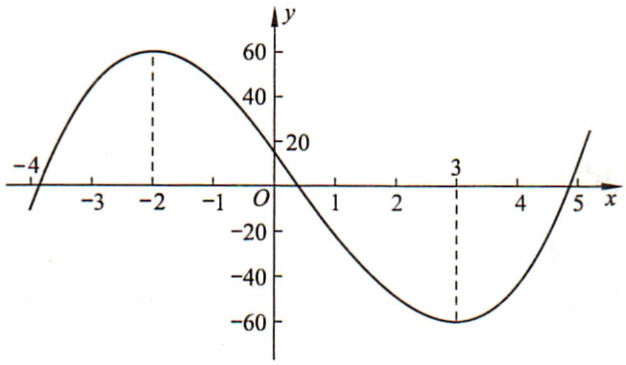


图 3-4

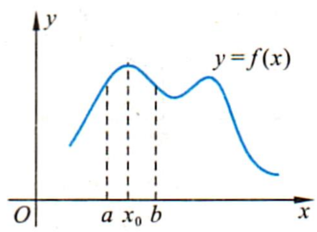
练　习

1. 求下列函数的单调区间:

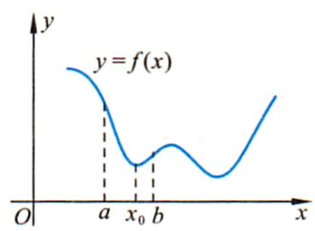
(1) $y=2x^2-5x+4$;　　　　(2) $y=3x-x^3$.

2. 讨论函数 $y=2x-\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 上的单调性.

1.2 函数的极值



(1)



(2)

图 3-5

如图 3-5(1),在包含 x_0 的一个区间 (a,b) 内,函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都小于或等于 x_0 点的函数值,称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的**极大值点**,其函数值 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**.

如图 3-5(2),在包含 x_0 的一个区间 (a,b) 内,函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都大于或等于 x_0 点的函数值,称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的**极小值点**,其函数值 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

极大值与极小值统称为**极值**,极大值点与极小值点统称为**极值点**.

极值是函数在一个适当区间内的局部性质,如图 3-6 中,x_1,x_3,x_5 都是函数 $y=f(x)$ 的极大值点,x_2,x_4 都是函数 $y=f(x)$ 的极小值点. 从图中可以看出,函数的某些极大值有时候比其他极大值小,如 $f(x_1)<f(x_3)$,甚至可能比一些极小值还小,如 $f(x_1)<f(x_4)$.

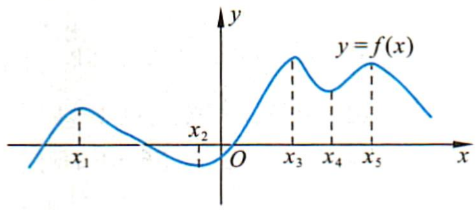


图 3-6

抽象概括

我们不难得出以下结论：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 上是增加的，在区间 (x_0,b) 上是减少的，则 x_0 是极大值点，$f(x_0)$ 是极大值.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 上是减少的，在区间 (x_0,b) 上是增加的，则 x_0 是极小值点，$f(x_0)$ 是极小值.

利用前面得出的导数与函数单调性的关系，我们可以把极大值的问题通过表 3-1 和图 3-7 表示出来，极小值的问题通过表 3-2 和图 3-8 表示出来.

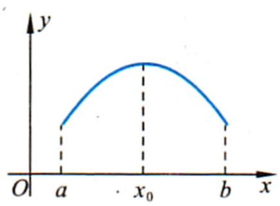


图 3-7

表 3-1

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	+	0	−
$y=f(x)$	增加 ↗	极大值	减少 ↘

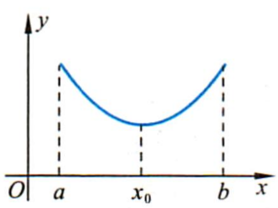


图 3-8

表 3-2

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	−	0	+
$y=f(x)$	减少 ↘	极小值	增加 ↗

例 2　求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+5$ 的极值点.

解　前面我们已经求出了这个函数的导函数

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

通过解方程 $f'(x)=0$ 得到了两个解 $x_1=-2$ 和 $x_2=3$.

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，函数在 $(-\infty,-2)$ 上是增加的；当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数在 $(-2,3)$ 上是减少的，因此，$x_1=-2$ 是函数的极大值点.

当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数在 $(-2,3)$ 上是减少的；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，函数在 $(3,+\infty)$ 上是增加的，所以 $x_2=3$ 是函数的极小值点.

这个判断过程可以通过表 3-3 直观地反映出来.

表 3-3

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

抽象概括

一般情况下，我们可以通过如下步骤求出函数 $y=f(x)$ 的极值点：

1. 求出导数 $f'(x)$.
2. 解方程 $f'(x)=0$.
3. 对于方程 $f'(x)=0$ 的每一个解 x_0，分析 $f'(x)$在 x_0 左、右两侧的符号(即 $f(x)$的单调性)，确定极值点：

(1) 若 $f'(x)$在 x_0 两侧的符号"左正右负"，则 x_0 为极大值点；

(2) 若 $f'(x)$在 x_0 两侧的符号"左负右正"，则 x_0 为极小值点；

(3) 若 $f'(x)$在 x_0 两侧的符号相同，则 x_0 不是极值点.

例 3　求函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极值.

解　首先求导函数，由导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=9x^2-3.$$

解方程

$$f'(x)=0,$$

得

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

根据 x_1，x_2 列出表 3-4，分析 $f'(x)$的符号、$f(x)$的单调性和极值点.

表 3-4

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大值	↘	极小值	↗

根据表 3-4 可知 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极大值点，函数在该点的极大值为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

$x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极小值点，函数在该点的极

小值为 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

函数的图像如图 3-9 所示.

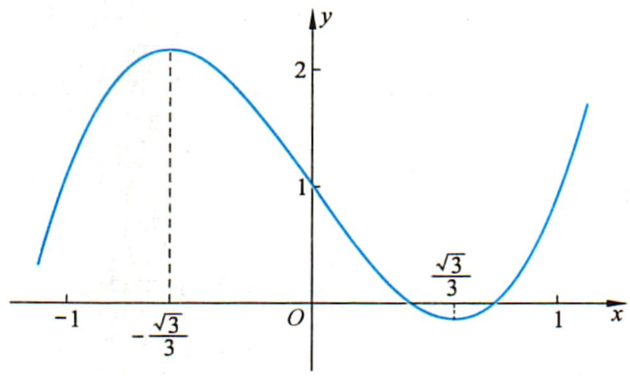


图 3-9

练 习

求下列函数的极值：

(1) $y=3x-x^3$；

(2) $y=x^4-8x^3+18x^2-1$.

习 题 3—1

A 组

1. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=-x^3-2x^2-4x+5$；

(2) $y=(x+1)(x^2-1)$；

(3) $y=4x^2+\frac{1}{x}$；

(4) $y=x\ln x$.

2. 讨论函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调性.

3. 讨论下列函数的单调性与极值：

(1) $y=6x^2-x-2$；

(2) $y=2-x-x^2$；

(3) $y=x^3-3x^2$；

(4) $y=2x^3+12x-5$.

4. 下列函数中，随着自变量的变化，函数值是怎样变化的？

(1) $s(t)=2t^3-5t^2$；

(2) $y=x+\sqrt{2+x}$.

B 组

已知数 a_1,a_2,a_3,a_4，求 x 的值，使得函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+(x-a_4)^2$ 的值最小.

§2　导数在实际问题中的应用

2.1　实际问题中导数的意义

例 1　功与功率　如图 3-10 所示，某人拉动一个物体前进，他所做的功 W（单位：J）是时间 t（单位：s）的函数，设这个函数可以表示为

$$W=W(t)=t^3-6t^2+16t.$$

(1) 求 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $W'(1)$，$W'(2)$，并解释它们的实际意义.

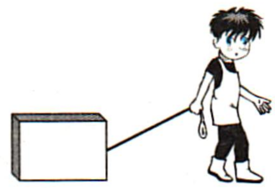


图 3-10

解　(1) 当 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 从 $W(1)=11$ J 变到 $W(3)=21$ J，此时功 W 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{W(3)-W(1)}{3-1}=\frac{21-11}{3-1}=5\ (\text{J/s}).$$

它表示从 $t=1$ s 到 $t=3$ s 这段时间，这个人平均每秒做功 5 J.

(2) 首先求 $W'(t)$. 根据导数公式和求导法则可得

$$W'(t)=3t^2-12t+16,$$

于是，$W'(1)=7$ J/s，$W'(2)=4$ J/s.

$W'(1)$ 和 $W'(2)$ 分别表示 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时，这个人每秒做的功为 7 J 和 4 J.

在物理学中，通常称力在单位时间内做的功为功率，它的单位是瓦特.

例 2　降雨强度　表 3-5 为一次降雨过程中一段时间内记录下的降雨量的数据：

表 3-5

时间 t/min	0	10	20	30	40	50	60
降雨量 y/mm	0	10	14	17	20	22	24

显然，降雨量 y 是时间 t 的函数，用 $y=f(t)$ 表示.

(1) 分别计算当 t 从 0 变到 10，从 50 变到 60 时，降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率，比较它们的大小，并解释它们的实际意义；

(2) 假设得到降雨量 y 关于时间 t 的函数的近似表达式为 $f(t)=\sqrt{10t}$,求 $f'(40)$并解释它的实际意义.

解 (1) 当 t 从 0 变到 10 时,降雨量 y 从 0 变到 10,此时,降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(10)-y(0)}{10-0}=\frac{10-0}{10-0}=1(\text{mm/min}).$$

它表示从 0 min 到 10 min 这段时间内,平均每分降雨量为1 mm.

当 t 从 50 变到 60 时,降雨量 y 从 22 变到 24,此时,降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(60)-y(50)}{60-50}=\frac{24-22}{60-50}=0.2(\text{mm/min}).$$

它表示从 50 min 到 60 min 这段时间内,平均每分降雨量为 0.2 mm.

$1>0.2$,说明这次降雨过程中,刚开始的 10 min 比后10 min的雨下得大.

在气象学中,通常把在单位时间(如 1 时、1 天等)内的降雨量称作降雨强度,它是反映一次降雨大小的一个重要指标. 因此用气象学的知识解释,0~10 min 这段时间的平均降雨强度是 1 mm/min,而 50~60 min这段时间的平均降雨强度为 0.2 mm/min.

(2) 首先求导函数,根据导数公式表可得

$$f'(t)=\frac{5}{\sqrt{10t}}.$$

将 $t=40$ 代入 $f'(t)$,得到

$$f'(40)=\frac{5}{20}=0.25(\text{mm/min}).$$

它表示的是 $t=40$ min 时降雨量 y 关于时间 t 的瞬时变化率,即降雨强度.

$f'(40)=0.25$ 就是说 $t=40$ min 这个时刻的降雨强度为 0.25 mm/min.

例 3 建造一幢面积为 x m² 的房屋需要成本 y 万元,y 是 x 的函数:$y=f(x)=\frac{x}{10}+\frac{\sqrt{x}}{10}+0.3$.

(1) 当 x 从 100 变到 120 时,建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率是多少? 它代表什么实际意义?

(2) 求 $f'(100)$并解释它的实际意义.

解 (1) 当 x 从 100 变到 120 时,建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率为

$$\frac{f(120)-f(100)}{120-100}$$

$$=\frac{\left(12+\frac{\sqrt{120}}{10}+0.3\right)-\left(10+\frac{\sqrt{100}}{10}+0.3\right)}{20}$$

$$\approx 0.105(万元/\mathrm{m}^2).$$

它表示在建筑面积从 100 m^2 增加到 120 m^2 的过程中，每增加 1 m^2的建筑面积，建筑成本平均约增加 1 050 元.

(2) 首先求 $f'(x)$，利用导数公式表和导数的运算法则可知

$$f'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{20\sqrt{x}},$$

于是 $$f'(100)=\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=0.105(万元/\mathrm{m}^2).$$

$f'(100)$ 表示当建筑面积为 100 m^2 时，成本增加的速度为 1 050 元/m^2，也就是说当建筑面积为 100 m^2 时，每增加 1 m^2 的建筑面积，成本就要增加 1 050 元.

说　明

在经济学中，通常把生产成本 y 关于产量 x 的函数 $y=f(x)$ 的导函数称为**边际成本**. 边际成本 $f'(x_0)$ 指的是当产量为 x_0 时，生产成本的增加速度，也就是当产量为 x_0 时，每增加一个单位的产量，需要增加 $f'(x_0)$ 个单位的成本.

思考交流

在日常生活和科学领域中，有许多需要用导数概念来理解的量. 以中学物理为例，速度是路程关于时间的导数，线密度是质量关于长度的导数，功率是功关于时间的导数等. 请再举出 3 个实例，体会导数的实际意义并与同学交流.

练　习

一辆正在加速的汽车在 5 s 内速度从 0 km/h 提高到了 90 km/h，下表给出了它在不同时刻的速度，为了方便起见，已将速度单位转化成了 m/s，时间单位为 s.

时间 t/s	0	1	2	3	4	5
速度 v/(m/s)	0	9	15	21	23	25

(1) 分别计算当 t 从 0 s 变到 1 s、从 3 s 变到 5 s 时，速度 v 关于时间 t 的平均变化率，并解释它们的实际意义；

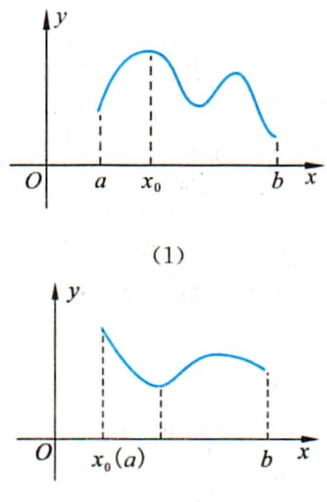
(2) 根据上面的数据，可以得到速度 v 关于时间 t 的函数近似表示式为 $v=f(t)=-t^2+10t$，求 $f'(1)$，并解释它的实际意义.

2.2 最大值、最小值问题

最大值与最小值问题

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值点 x_0 指的是：函数在这个区间上所有点的函数值都不超过 $f(x_0)$.（如图 3-11 所示）

可以看出，最大值或者在极大值点取得，或者在区间的端点取得. 因此，要想求函数的最大值，应首先求出函数的极大值点，然后将所有极大值点与区间端点的函数值进行比较，其中最大的值即为函数的最大值. 在实际问题中，一般可以通过函数的单调性和问题的实际意义确定最大值.



(1)　(2)

图 3-11

函数的最小值点也具有类似的意义和求法. 函数的最大值和最小值统称为**最值**.

例 4　求函数 $y=f(x)=x^3-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解　首先求导函数. 根据导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=3x^2-4x.$$

解方程　$f'(x)=0$,

得　$x_1=0,\quad x_2=\frac{4}{3}.$

根据 x_1, x_2 列表，分析 y' 的符号和函数的单调性.（如表 3-6）

表 3-6

x	-2	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2
$f'(x)$	20	+	0	−	0	+	4
$y=f(x)$	−11	↗	极大值	↘	极小值	↗	5

由上表得，$x_1=0$ 是函数的极大值点，$x_2=\frac{4}{3}$ 是函数的极小值点.

计算函数在极大值点 $x_1=0$、极小值点 $x_2=\frac{4}{3}$、区间端点 $x_3=-2$ 和 $x_4=2$ 处的值：

$$f(0)=5, f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{103}{27}, f(-2)=-11, f(2)=5.$$

比较这 4 个数的大小，可知：

函数 $y=x^3-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是 5，最小值是 -11.

函数 $y=x^3-2x^2+5\,(x\in[-2,2])$ 的图像如图 3-12 所示.

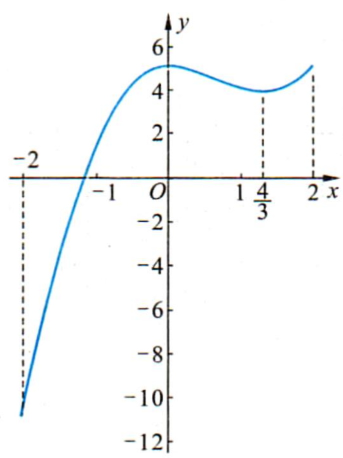


图 3-12

例 5　如图 3-13 所示，一边长为 48 cm 的正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后折起，可以做成一个无盖长方体容器. 所得容器的容积 V（单位：cm^3）是关于截去的小正方形的边长 x（单位：cm）的函数.

（1）随着 x 的变化，容积 V 是如何变化的？

（2）截去的小正方形的边长为多少时，容器的容积最大？最大容积是多少？

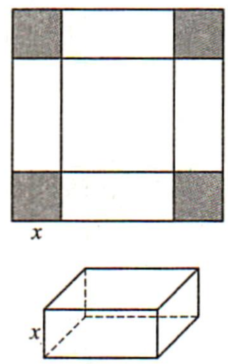


图 3-13

解　（1）首先写出 V 关于 x 的函数解析式. 根据题意可得

$$V=f(x)=(48-2x)^2x.$$

由实际情况可知函数的定义域为 $\{x\mid 0<x<24\}$.

根据导数公式表及求导法则，可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=-4x(48-2x)+(48-2x)^2\\&=(48-2x)(-6x+48)\\&=12(x-24)(x-8).\end{aligned}$$

解方程　　$V'(x)=0$，

得　　$x_1=8$，　$x_2=24$.

根据 $x_1=8$，$x_2=24$ 列出表 3-7，分析导函数的符号得到函数的单调性与极值点.

表 3-7

x	$(0,8)$	8	$(8,24)$
$f'(x)$	+	0	—
$V=f(x)$	↗	极大值	↘

$x=8$ 是函数的极大值点，相应极大值为

$$V=f(8)=(48-16)^2\times 8=8\ 192(\mathrm{cm}^3).$$

$V=(48-2x)^2x$ 的图像如图 3-14 所示.

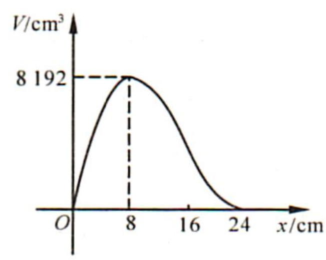


图 3-14

根据对函数变化规律的讨论可知：

当 $0<x\leqslant 8$ 时，函数 $V=f(x)$ 是增加的；当 $8\leqslant x<24$ 时，函数 $V=f(x)$ 是减少的.

（2）区间 $(0,24)$ 上任意点的函数值都不超过 $f(8)$，因此 $x=8$ 是函数的最大值点. 此时

$$V=f(8)=8\ 192(\mathrm{cm}^3).$$

即当截去的小正方形的边长为 8 cm 时，得到的容器容积最大，最大容积为 8 192 cm^3.

练　习 1

求函数 $y=x^3-12x^2+45x-10$ 在区间 $[0,10]$ 上的最大值和最小值.

例 6　产量与利润　对于企业来说，生产成本、销售收入和利润之间的关系是个重要的问题. 对一家药品生产企业的研究表明，该企业的生产成本 y(单位：万元)和生产收入 z(单位：万元)都是产量 x(单位：t)的函数，分别为

$$y=x^3-24x^2+225x+10,$$

$$z=180x.$$

(1) 试写出该企业获得的生产利润 w(单位：万元)与产量 x 之间的函数关系式；

(2) 当产量为多少时，该企业可获得最大利润？最大利润为多少？

解　(1) 因为总利润＝总收入－总成本，即 $w=z-y$，所以

$$w=w(x)=180x-(x^3-24x^2+225x+10),$$

即 $$w=-x^3+24x^2-45x-10\ (x\geqslant 0).$$

(2) 求 $w=w(x)$ 的导函数

$$w'(x)=-3x^2+48x-45.$$

解方程 $$w'(x)=0,$$

得 $$x_1=1,\quad x_2=15.$$

根据 x_1, x_2 列出表 3-8，分析导函数的符号得到函数的单调性与极值点.

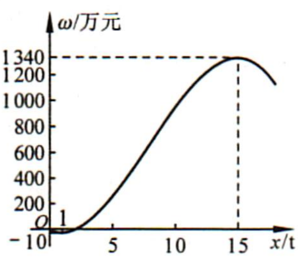


图 3-15

表 3-8

x	$(0,1)$	1	$(1,15)$	15	$(15,+\infty)$
$w'(x)$	－	0	＋	0	－
$w(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$x=15$ 是函数的极大值点，比较 $x=1$ 和 $x=15$ 的函数值

$$w(1)=-32,\quad w(15)=1\ 340,$$

可知，函数 $w=w(x)$ 在 $x=15$ 处取得最大值，最大值为 1 340，即该企业的产量为 15 t 时，可获得最大利润，最大利润为 1 340 万元.

在实际中，有许多以函数为数学模型的问题，在研究它们的变化规律时，导数是一个重要的工具.

练　习　2

要设计一种圆柱形、容积为 500 mL 的一体化易拉罐金属包装，如何设计才能使得总成本最低？

习 题 3—2

A　组

1. 实验表明，将 1 kg 铁从 0 ℃加热到 t ℃需要的热量为 Q（单位：J）：

$$Q(t)=0.000\,297t^2+0.440\,9t.$$

(1) 当 t 从 10 变到 20 时，函数值 Q 关于 t 的平均变化率是多少？它的实际意义是什么？

(2) 求 $Q'(10)$，$Q'(100)$，并解释它们的实际意义.

2. 求下列函数在给定范围内的最大值、最小值：

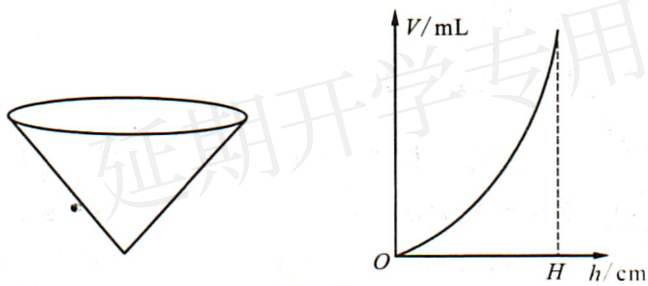
(1) $f(x)=x^2+(1-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 2$；

(2) $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$，$-2\leqslant x\leqslant 2$.

3. 如下左图为一个圆锥形酒杯，圆锥的顶角（即过圆锥轴的平面截圆锥所得等腰三角形的顶角）为 $60°$，向酒杯中注水.

(1) 写出注入杯中的水量 V（单位：mL）关于水面高度 h（单位：cm）的函数关系式 $V=f(h)$；

(2) 右图所示图像是否能反映这一函数关系？说明理由.



（第 3 题）

4. 工厂需要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁. 我们知道，砌起的新墙的总长度 y（单位：m）是利用原有墙壁长度 x（单位：m）的函数.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式，确定 x 的取值范围；

(2) 随着 x 的变化，y 的变化有何规律？

(3) 堆料场的长、宽比为多少时，需要砌起的新墙用的材料最省？

B　组

对一名工人的研究表明，工作 t h 后生产出的产品量 Q（单位：t）可以近似表示为 $Q=f(t)=-t^3+15t^2+12t$，该工人每天工作 8 h.

(1) 求当 t 从 2 h 变到 4 h，该工人生产的产品量 Q 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $f'(2)$，$f'(4)$，并解释它们的实际意义.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 导数对于研究函数的意义

(1) 认识导数对于研究函数的变化规律的作用.

(2) 会用导数的符号来判断函数的单调性.

(3) 会利用导数确定函数的极值点和最值点.

2. 导数在实际问题中的应用

(1) 进一步体会函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型.

(2) 联系实际生活和其他学科，进一步体会导数的意义.

(3) 从实际情境中抽象出一些基本的用导数刻画的问题，并加以解决.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次地呈现.

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结.

3. 用框图呈现用导数解决实际问题的基本思路、步骤与方法.

4. 复习本章，思考下列问题：

(1) 如何用导数的符号解决函数的单调性问题？

(2) 函数的极值点有何特点和意义？如何利用导数求函数的极值？

(3) 函数的极值和最值有何不同？如何利用导数求函数的最值？如何用框图形式画出确定最值的步骤？

(4) 如何从实际问题中抽象出数学问题用导数解决？

(5) 有哪些物理量或者其他学科的知识与导数有关？

5. 请同学们相互交流学习本章的感受与思考.

复习题三

A　组

1. 求下列函数的单调区间和极值点：

(1) $y=2x^3-3x^2$；　(2) $y=x+\sqrt{x}$；

(3) $y=x-\ln x$；　(4) $y=\frac{1}{x}+4x^2$；

(5) $y=\tan x-\sin x$；　(6) $y=x+\sin x$；

(7) $y=x^3-x+6$；　(8) $y=\sin x+\cos x$.

2. 求下列函数在给定范围内的最大值、最小值：

(1) $y=x^3-3x$, $0\leqslant x\leqslant 10$；　(2) $y=x^2+(2-x)^2$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

3. 某体育馆要建造一个长方形游泳池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果建造池底的单价是建造池壁单价的 1.5 倍，怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少？

4. 一辆家庭轿车在 x 年的使用过程中需要如下支出：购买时的费用 12 万元；保险费、养路费、燃油费等各种费用每年 1 万元；维修费用 $(0.1x^2+0.1x)$ 万元；使用 x 年后，汽车的价值为 $(10-0.8x)$ 万元. 显然，在这辆汽车上的年平均支出 y（单位：万元）是使用时间 x（单位：年）的函数.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 随着 x 的增加，函数值 y 的变化有何规律？

5. 某地区原来的电价为 0.8 元/(kW·h)，年用电量为 1 亿 kW·h. 今年，电力部门计划下调电价以提高用电量、增加收益. 根据调查，下调电价后新增的用电量与实际电价和原电价的差的平方成正比，比例系数为 50. 该地区电力的成本价为 0.5 元/(kW·h).

(1) 写出电力部门的收益 y 与实际电价 x 间的函数关系式；

(2) 随着 x 的变化，y 的变化有何规律？

(3) 电力部门将电价定为多少，能获得最大的收益？

6. 一种质量为 1 kg 的物质，在化学分解中，经过时间 t（单位：min）后，所剩的质量 m（单位：kg）与时间 t 的关系可以表示为 $m=e^{-2t}$.

(1) 求当 t 从 1 变到 2 时，质量 m 关于 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $m'(2)$ 并解释它的实际意义.

B　组

1. 一个电路中，流过的电荷量 Q（单位：C）关于时间 t（单位：s）的函数为

$$Q(t)=3t^2-\ln t.$$

(1) 求当 t 从 1 变到 2 时，电路中流过的电荷量 Q 关于 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $Q'(2)$，$Q'(3)$，并解释它们的实际意义；

(3) 求 $Q'(t)$，并讨论 $Q'(t)$ 的变化规律；

(4) 当 t 为何值时 $Q'(t)$ 取得最大值？何时取得最小值？

2. 为了安全起见，高速公路同一车道上行驶的前后两辆汽车之间的距离不得小于 kx^2（单位：m），其中 x（单位：km/h）是车速，k 为比例系数. 经测定，当车速为 60 km/h 时，安全车距为 40 m. 假设每辆车的平均车长为 5 m.

(1) 写出在安全许可的情况下，某路口同一车道的车流量 y（单位：辆/min）关于车速 x 的函数；

(2) 如果只考虑车流量，规定怎样的车速可以使得高速公路上的车流量最大？这种规定可行吗？

第四章 定积分

我们学过如何求正方形、长方形、三角形等图形的面积，这些图形都是由直线段围成的. 那么，如何求由曲线围成的平面图形的面积呢？这是定积分要解决的一个典型问题.

定积分在科学研究和实际生活中有非常广泛的应用. 本章我们将学习定积分的基本概念以及定积分的简单应用，初步体会定积分的思想及其应用价值.

§1　定积分的概念

1.1　定积分的背景——面积和路程问题

问题提出

我们学习过如何求正方形、长方形、三角形等直线图形的面积．通过公式 $S=\pi r^2$ 能求圆的面积．那么，这个公式是怎么来的呢？

如何求由曲线围成的平面图形的面积呢？例如，求图 4-1 中阴影的面积．通常称这样的平面图形为曲边梯形．

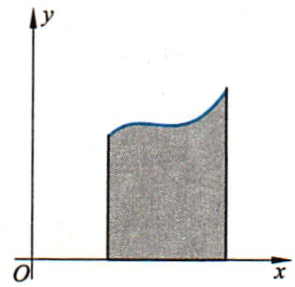


图 4-1

问题 1　图 4-2 中阴影部分是由抛物线 $f(x)=x^2$，直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的平面图形．试估计这个曲边梯形的面积 S．

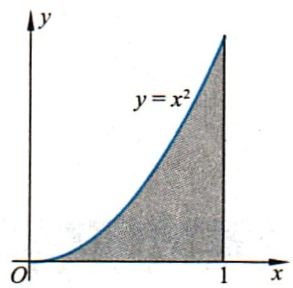
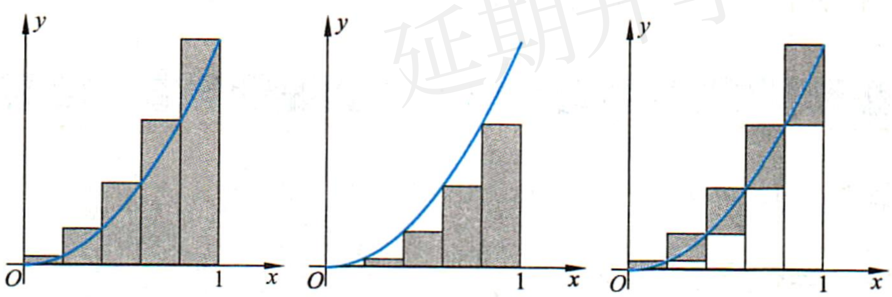


图 4-2

分析　首先，将区间[0，1]5 等分，如图 4-3 所示．



(1)　　(2)　　(3)

图 4-3

图 4-3(1)中，所有小矩形的面积之和（记为 S_1）显然大于所求的曲边梯形的面积，我们称 S_1 为 S 的过剩估计值，有

$$S_1=(0.2^2+0.4^2+0.6^2+0.8^2+1^2)\times 0.2=0.44.$$

图 4-3(2)中，所有阴影小矩形的面积之和（记为 s_1）显然小于所求曲边梯形的面积，我们称 s_1 为 S 的不足估计值，有

$$s_1=(0+0.2^2+0.4^2+0.6^2+0.8^2)\times 0.2=0.24.$$

我们可以用 S_1 或 s_1 近似表示 S，但是都存在误差，误差有多大呢？

我们知道，过剩估计值 S_1 与不足估计值 s_1 之差为

$$S_1-s_1=0.2,$$

如图 4-3(3)中阴影所示. 显然,无论用 S_1 还是用 s_1 来表示曲边梯形的面积,误差都不会超过 0.2.

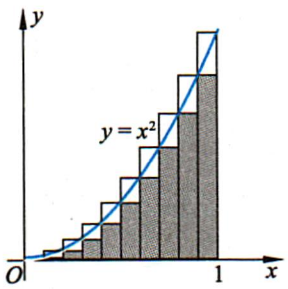


图 4-4

为了减小误差,我们可以将区间分得更细些.

例如,将区间[0,1]平均分成 10 份,如图 4-4 所示.

类似地,所求曲边梯形面积的过剩估计值为

$$S_2=(0.1^2+0.2^2+\cdots+1^2)\times 0.1=0.385.$$

不足估计值为

$$s_2=(0+0.1^2+0.2^2+\cdots+0.9^2)\times 0.1=0.285.$$

过剩估计值与不足估计值之差为

$$S_2-s_2=0.1.$$

无论用 S_2 还是用 s_2 来表示曲边梯形的面积 S,误差都不会超过 0.1.

按照这样的思路,如果将[0,1]分得更细,就会得到更精确的估计值,用这样的方法我们可以使得误差任意小,当被分割成的小区间的长度趋于 0 时,过剩估计值和不足估计值就都会趋于曲边梯形的面积.

思考交流

仿照上面的方法,如何使该误差小于 0.01?

练 习 1

设 S 表示由曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成平面图形的面积.

(1) 画出该平面图形;

(2) 试估计该平面图形的面积,并写出估计值的误差.

问题提出

已知匀速运动物体的速度 v 和运动的时间 t,我们可以求出它走过的路程 $s=vt$. 那么如何求非匀速运动物体走过的路程呢?

问题 2 想象这样一个场景:一辆汽车的司机猛踩刹车,汽车滑行 5 s 后停下,在这一过程中,汽车的速度 v(单位:m/s)是时间 t 的函数:

$$v(t)=t^2-10t+25\quad(0\leqslant t\leqslant 5).$$

请估计汽车在刹车过程中滑行的距离 s.

分析 由已知,汽车在刚开始刹车时的速度是 $v(0)=25$ m/s,我们可以用这个速度来近似替代汽车在这段时间内的平均速度,求出

汽车的滑行距离：

$$s=25\times5=125(\mathrm{m}).$$

但显然，这样的误差太大了.

为了提高精确度，我们可以采用分割滑行时间的方法来估计滑行距离.

首先，将滑行时间 5 s 平均分成 5 份.

我们分别用 $v(0)$，$v(1)$，$v(2)$，$v(3)$，$v(4)$ 近似替代汽车在 0～1 s，1～2 s，2～3 s，3～4 s，4～5 s 内的平均速度，求出滑行距离 s_1：

$$s_1=[v(0)+v(1)+v(2)+v(3)+v(4)]\times1=55(\mathrm{m}),$$

由于 v 是下降的，所以显然 s_1 大于 s，我们称它为汽车在 5 s 内滑行距离的过剩估计值.

如果用 $v(1)$，$v(2)$，$v(3)$，$v(4)$，$v(5)$ 分别近似替代汽车在 0～1 s，1～2 s，2～3 s，3～4 s，4～5 s 内的平均速度，求出汽车在5 s内滑行距离的不足估计值 s_1'：

$$s_1'=[v(1)+v(2)+v(3)+v(4)+v(5)]\times1=30(\mathrm{m}).$$

不论用过剩估计值 s_1 还是不足估计值 s_1' 表示 s，误差都不超过：

$$s_1-s_1'=55-30=25(\mathrm{m}).$$

为了得到更加精确的估计值，可以将滑行时间分得更细些，因为我们知道，滑行时间的间隔越小，用其中一点的速度代替这段时间内的平均值，其速度误差就越小.

比如，将滑行时间 5 s 平均分成 10 份.

用类似的方法得到汽车在 5 s 内滑行距离的过剩估计值 s_2：

$$\begin{aligned}s_2&=[v(0)+v(0.5)+v(1)+v(1.5)+v(2)+v(2.5)+\\&\quad v(3)+v(3.5)+v(4)+v(4.5)]\times0.5\\&=48.125(\mathrm{m}),\end{aligned}$$

汽车在 5 s 内滑行距离的不足估计值 s_2'：

$$\begin{aligned}s_2'&=[v(0.5)+v(1)+v(1.5)+v(2)+v(2.5)+v(3)+\\&\quad v(3.5)+v(4)+v(4.5)+v(5)]\times0.5\\&=35.625(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

无论用 s_2 还是 s_2' 表示汽车的滑行距离 s，误差都不超过：

$$s_2-s_2'=48.125-35.625=12.5(\mathrm{m}).$$

按照这样的思路，继续将滑行时间等分加细，我们会得到更加精确的估计值. 用这样的方法我们可以使得误差任意小. 当滑行时间被等分后的小时间间隔的长度趋于 0 时，过剩估计值和不足估计值就都趋于汽车滑行的路程.

动手实践

做功问题

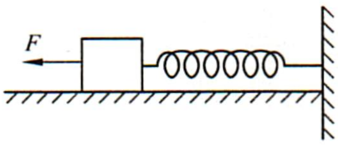


图 4-5

一根弹性系数为 0.4 N/cm 的弹簧，其拉力 F 随着弹簧拉伸的长度 x 的变化而不断变化，根据胡克定律可知：$F=F(x)=0.4x$. 如图 4-5所示，弹簧的一端固定在墙上，另一端固定在物体上，在不考虑摩擦的情况下物体在力 F 作用下匀速移动，从原来位置移动 10 cm.

估计这一过程中拉力所做的功 W.

抽象概括

在上面的讨论中，面积问题、路程问题以及做功问题是 3 个实际意义完全不同的问题，但是它们的解决过程是相似的，都是通过分割自变量的区间得到过剩估计值和不足估计值，分割得越细，估计值就越接近精确值；当分割成的小区间的长度趋于 0 时，过剩估计值和不足估计值都趋于要求的值.

练习 2

如果汽车在某一段时间内的速度函数为 $v(t)=20t, 0\leqslant t\leqslant 5$，试估计汽车在这段时间内走过的距离，并写出估计值的误差.

1.2 定积分

一般地，给定一个在区间$[a,b]$上的函数 $y=f(x)$，其图像如图 4-6所示.

将$[a,b]$区间分成 n 份，分点为：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

第 i 个小区间为$[x_{i-1},x_i]$，设其长度为 Δx_i，在这个小区间上取一点 ξ_i，使 $f(\xi_i)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的值最大，设

$$S=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

在这个小区间上取一点 ζ_i，使 $f(\zeta_i)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的值最小，设

$$s=f(\zeta_1)\Delta x_1+f(\zeta_2)\Delta x_2+\cdots+f(\zeta_i)\Delta x_i+\cdots+f(\zeta_n)\Delta x_n.$$

如果每次分割后，最大的小区间的长度趋于 0，S 与 s 的差也趋于

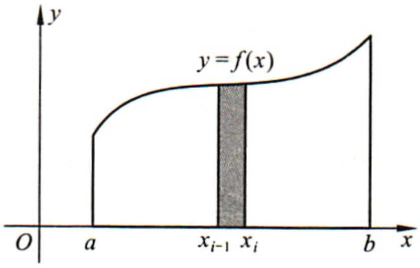


图 4-6

0,此时,S 与 s 同时趋于某一个固定的常数 A,容易验证,在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 δ_i,$S'=f(\delta_1)\Delta x_1+f(\delta_2)\Delta x_2+\cdots+f(\delta_i)\Delta x_i+\cdots+f(\delta_n)\Delta x_n$ 的值也趋于该常数 A,我们称 A 是函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$上的**定积分**,记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$.

其中$\int$叫作**积分号**,a 叫作**积分的下限**,b 叫作**积分的上限**,$f(x)$ 叫作**被积函数**.

> **说　明**
>
> $\int$为字母 S 的拉长,表示 Summa(总和).

根据本节 1.1 的分析,当 $f(x)\geqslant 0$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是 $y=f(x)$ 与 $x=a$,$x=b$ 和 x 轴所围曲边梯形的面积;当 $f(x)$ 表示速度关于时间 x 的函数时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是运动物体从 $x=a$ 到 $x=b$ 时所走过的路程.

例　说明下列定积分所表示的意义,并根据其意义求出定积分的值:

(1)$\int_0^1 2\mathrm{d}x$;　　(2)$\int_1^2 x\mathrm{d}x$;　　(3)$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1)$\int_0^1 2\mathrm{d}x$ 表示的是图 4-7(1) 中阴影所示长方形的面积,由于这个长方形的面积为 2,所以

$$\int_0^1 2\mathrm{d}x=2.$$

(2)$\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 表示的是图 4-7(2) 中阴影所示梯形的面积,其面积为 $\frac{3}{2}$,所以

$$\int_1^2 x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

(3)$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的是图 4-7(3) 中阴影所示半径为 1 的半圆的面积,其值为$\frac{\pi}{2}$,所以

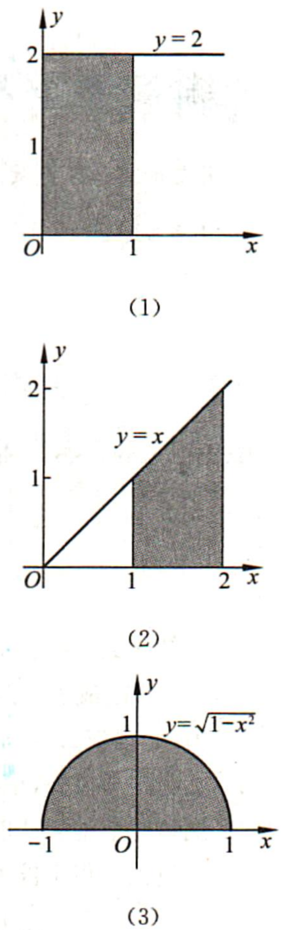


图 4-7

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

定积分有如下性质：

性质 1 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$；

性质 2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

性质 3 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

性质 4 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

思考交流

1. 利用图像解释定积分的性质 1 和性质 4.

2. 利用定积分的定义求 $\int_0^1(-2)\mathrm{d}x$，考虑它与 $x=0$，$x=1$ 以及 $y=-2$，x 轴所围成平面图形的面积的关系.

练 习

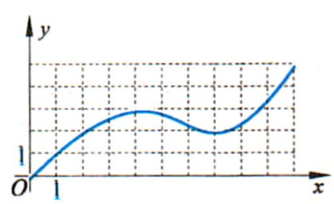
用图形表示下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

习 题 4—1

A 组

1. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形如右图所示，给出 $y=f(x)$ 与 $x=10$ 和 x 轴所围成图形的面积估计值；要想得到误差不超过 1 的面积估计值，可以怎么做？



（第 1 题）

2. 小明跑马拉松，小明的朋友小强骑自行车跟在他的后面每隔 15 min 测量一下他的速度. 小明开始时跑得很快，但 1.5 h 后，他因体力消耗过大不得不停下来．小强测量到的数据如下：

起跑后的时间 t/min	0	15	30	45	60	75	90
速度 v/(km/h)	19	17	16	16	13	10	0

(1) 估计小明在开始的 0.5 h 内所跑的路程，并写出估计值的误差；

(2) 估计小明在全程所跑过的路程并写出估计值的误差.

3. 设力 F(单位:N) 的方向与物体运动的方向一致，力的大小随着物体走过的路程 x(单位:m) 而变化，可以表示为：$F=F(x)=\dfrac{1}{1+x}$，估计力 F 在 $0\sim10$ m 这段路程内所做的功，要求误差不超过1 N·m.

4. 用图像表示下列定积分：

(1) $\int_1^3 e^x dx$；　　(2) $\int_0^1 (x^2+2x)dx$.

5. 利用定积分的几何意义求下列定积分：

(1) $\int_1^2 2x dx$；　　(2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

6. 已知 $\int_0^1 e^x dx = e-1$，$\int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$，求下列定积分：

(1) $\int_0^1 (e^x+x^2)dx$；　　(2) $\int_0^1 (2e^x-x^2)dx$.

B　组

1. 用图像表示定积分 $\int_{-1}^1 |x| dx$，并通过几何意义求定积分的值.

2. 设抛物线 $y=1-x^2$ 和 x 轴所围成平面图形的面积为 S_1，它与定积分 $\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$ 之间有何关系？设抛物线 $y=x^2-1$ 和 x 轴所围成平面图形的面积为 S_2，它与定积分 $\int_{-1}^1 (x^2-1)dx$ 之间有何关系？

§2 微积分基本定理

实例分析

如果物体走过的路程 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$，则从时刻 $t=a$ 到 $t=b$，物体走过的路程为 $s(b)-s(a)$.

另一方面，把 $t=a$ 到 $t=b$ 的这一时间段，平均分割成 n 个小时间段，即在区间 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个点，记

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b.$$

物体从 $t=a$ 到 $t=b$ 所走过的路程就是在每一个小时间段内所走过路程的累积.

在时间段 $[t_0,t_1]$ 内，物体所走过的路程是 $s(t_1)-s(t_0)$；

在时间段 $[t_1,t_2]$ 内，物体所走过的路程是 $s(t_2)-s(t_1)$；

……

在时间段 $[t_{n-1},t_n]$ 内，物体所走过的路程是 $s(t_n)-s(t_{n-1})$.

这样就有：

$$\begin{aligned}&s(b)-s(a)\\&=[s(t_1)-s(t_0)]+[s(t_2)-s(t_1)]+\cdots+[s(t_n)-s(t_{n-1})]\\&=s(t_n)-s(t_0).\end{aligned}$$

如图 4-8 所示.

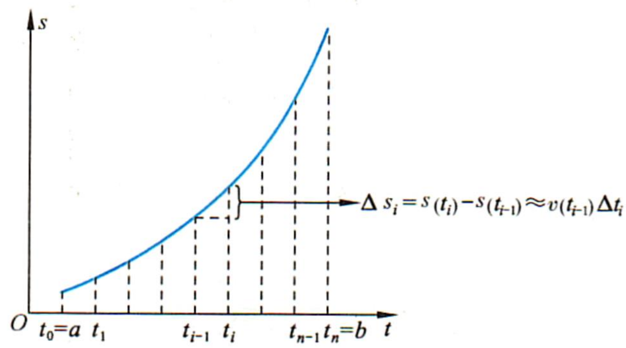


图 4-8

在 $[t_{i-1},t_i]$ 这一小时间段内，我们用这段时间内某一时刻的瞬时速度代替平均速度，例如用 t_{i-1} 时刻的瞬时速度 $v(t_{i-1})$ 表示，就有

$$\Delta s_i=s(t_i)-s(t_{i-1})\approx v(t_{i-1})\Delta t_i,$$

因此

$$s(b)-s(a)\approx v(t_0)\Delta t_1+v(t_1)\Delta t_2+\cdots+v(t_{n-1})\Delta t_n.$$

当每个时间间隔都趋于 0 时，$v(t_0)\Delta t_1+v(t_1)\Delta t_2+\cdots+v(t_{n-1})\Delta t_n$就趋于$s(b)-s(a)$.

用积分表示即为

$$s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t,$$

又因为速度是路程的导数，即 $v(t)=s'(t)$，从而可得

$$s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)\mathrm{d}t.$$

抽象概括

上面分析了路程与速度的关系，速度的积分等于路程. 一般来说，函数和它的导函数都具有这样的关系.

微积分基本定理：如果连续函数 $f(x)$是函数 $F(x)$的导函数，即 $f(x)=F'(x)$，则有

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).}$$

定理中的式子称为牛顿-莱布尼茨公式，通常称 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数.

在计算定积分时，常常用记号 $F(x)\Big|_a^b$ 来表示 $F(b)-F(a)$，于是牛顿-莱布尼茨公式也可写作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

连续函数

直观地说，连续函数的图像是一条不间断的曲线. 在中学阶段，大部分函数都是连续函数.

微积分基本定理建立了积分与导数间的密切联系. 它使求定积分的问题变得简捷 . 在求定积分时只需找到导函数的一个原函数，就可以利用牛顿-莱布尼茨公式求出这个函数的定积分，这是求定积分的一种非常重要的方法. 有了这个定理，过去一些著名数学家利用特殊方法取得的许多重要成果，成了积分方法的普通例题或习题(如圆面积公式、球体积公式).

例 1 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 2x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$； (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$； (4) $\int_1^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 (1)由于 x^2 的导函数是 $2x$，根据微积分基本定理可得

$$\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1^2-0^2=1.$$

(2)由于$\frac{1}{3}x^3$ 的导函数是 x^2，根据微积分基本定理可得

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}.$$

(3)由于 $\sin x$ 的导函数是 $\cos x$，根据微积分基本定理可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

(4)由于 e^x 的导函数仍是 e^x，根据微积分基本定理可得

$$\int_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \Big|_1^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}.$$

求定积分的问题，就是寻找一个函数的原函数. 根据导函数公式表，我们可以得到常用函数的积分公式表，见本书附录 1，利用积分公式表可以直接求得一些函数的积分值.

例 2 求定积分 $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 定积分 $\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x$ 中，被积函数为 $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

查积分表：$x^\alpha(\alpha\neq -1)$ 的一个原函数是 $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$，所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的一个原函数是

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

由牛顿-莱布尼茨公式，可得

$$\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例 3 求定积分 $\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x$，并解释其意义.

解 在定积分 $\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x$ 中，被积函数是 $\cos x$.

查积分公式表，$\cos x$ 的一个原函数是 $\sin x$.

由牛顿-莱布尼茨公式，可得

$$\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

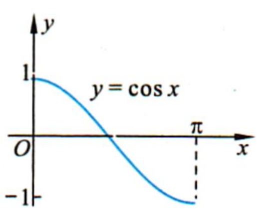


图 4-9

由图 4-9 可以看出，定积分 $\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x$ 的值就是在区间$[0,\pi]$内，函数 $y=\cos x$ 与 x 轴所围成平面图形面积的代数和，其中 x 轴上方的面积取正值，x 轴下方的面积取负值.

练　习

1. 求下列定积分：

(1) $\int_{0}^{1} e^{x}dx$；　　(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$；　　(3) $\int_{0}^{1} x^{3}dx$.

2. 求下列函数的导函数，并利用所求结果求 $\int_{0}^{1} 2xdx$：

(1) x^2；　　(2) x^2+5；

(3) $x^2-\pi$；　　(4) x^2-a（其中，a 是一个常数）.

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_{0}^{1}(x^{3}-1)dx$；　　(2) $\int_{2}^{4}\frac{1}{x}dx$；　　(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^{2}x}dx$.

习　题　4—2

A　组

1. 已知 $2e^{\frac{1}{2}x}$ 的导函数是 $e^{\frac{1}{2}x}$，求定积分 $\int_{0}^{1}e^{\frac{1}{2}x}dx$.

2. 已知 $F(x)=\frac{1}{x+1}$，$f(x)=F'(x)$，求 $\int_{0}^{1}f(x)dx$.

3. 已知 $F(x)=\sin x\cos x$，$f(x)=F'(x)$，求 $\int_{0}^{\pi}f(x)dx$.

4. (1)求 $\sin x$，$\sin x+2$，$\sin x+c$（其中 c 为任意常数）的导函数；

(2)求定积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$.

5. 求出下列函数的原函数，并求出各个函数在区间[0,1]上的定积分：

(1) $1+2x$；　　(2) $3\sin x+\cos x$.

6. 计算下面的定积分：

(1) $\int_{0}^{1}(2x-7)dx$；　　(2) $\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{x^{2}}+\frac{2}{x}\right)dx$；

(3) $\int_{1}^{3}3^{x}dx$；　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin xdx$

(5) $\int_{1}^{e}\ln xdx$；　　(6) $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}dx$；

(7) $\int_{0}^{1}(x^{2}-2x+3)dx$；　　(8) $\int_{1}^{3}(x-1)^{2}dx$；

(9) $\int_{-1}^{1}(2^{x}+x^{2})dx$；　　(10) $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2x}+x\sqrt{x}\right)dx$.

7. 一辆汽车在一段时间内，行驶过程中的速度 v(单位：m/s)是时间 t(单位：s)的函数 $v(t)=2\sqrt{t}+t+2$，$t\geqslant 0$. 求汽车在 5～10 s 这段时间内走过的路程.

8. 将一根弹性系数为 0.5 N/m 的弹簧自 80 cm 压缩至 60 cm，求这一过程中弹簧弹力所做的功.

B 组

1. 求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

2. 求出下列定积分：

   (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^2 (x-1)^2\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-1}^0 (x+1)^2\mathrm{d}x$.

   你能得出什么结果？把以上定积分用图像表示出来，解释你的结果.

§3　定积分的简单应用

定积分有着广泛的应用，如求平面图形的面积、根据速度求路程以及求给定力所做的功等问题都可以用定积分来解决.

本节我们将通过实例来体会定积分在几何中的应用.

3.1　平面图形的面积

例 1　求如图 4-10 所示阴影部分的面积.

解　图 4-10 中阴影部分的面积由两部分组成：

一部分是 x 轴上方的图形的面积(记为 S_1)；另一部分是 x 轴下方图形的面积(记为 S_2).

$$S_1=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

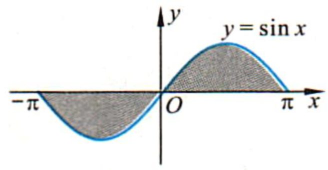


图 4-10

根据正弦函数的性质，$S_1=S_2$.

所以，所求阴影部分的面积是 4.

例 2　求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围成平面图形的面积.

解　首先求出抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 的交点为(0,0)和(2,4)，画出抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围成的平面图形，如图 4-11 阴影所示.

设所求图形的面积为 S，根据图像可以看出 S 等于直线 $y=2x$，$x=2$以及 x 轴所围成的图形的面积(设为 S_1)减去抛物线 $y=x^2$，直线 $x=2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积(设为 S_2).

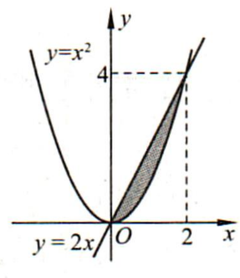


图 4-11

由上面分析知

$$S_1=\int_0^2 2x\mathrm{d}x,S_2=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x.$$

由积分公式表以及牛顿-莱布尼茨公式得

$$S_1=\int_0^2 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^2=2^2-0^2=4,$$

$$S_2=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{1}{3}\times(2^3-0^3)=\frac{8}{3}.$$

所以，$S=S_1-S_2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.

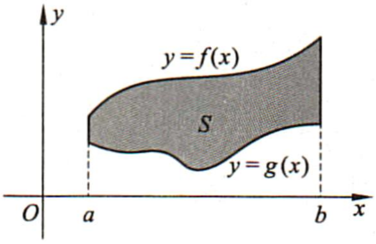


图 4-12

抽象概括

一般地，设由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 以及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的平面图形（如图 4-12）的面积为 S，则

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

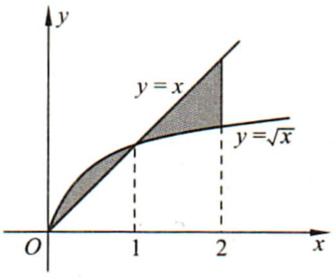


图 4-13

例 3　求图 4-13 所示阴影部分的面积.

解　曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

设所求图形的面积为 S，根据图像可以看出 S 是由 $x=1$ 左边部分（设为 S_1）和 $x=1$ 右边部分（设为 S_2）组成的：

$$S=S_1+S_2,$$

其中

$$S_1=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x,$$

$$S_2=\int_1^2 x\mathrm{d}x-\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x.$$

利用牛顿-莱布尼茨公式和积分公式表，可得

$$S_1=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{6},$$

$$S_2=\int_1^2 x\mathrm{d}x-\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_1^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\times(\sqrt{8}-1)=\frac{13}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

所以　$$S=S_1+S_2=\frac{7}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

练　习

1. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$，直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.
2. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$，直线 $x=1$ 以及坐标轴所围成的平面图形的面积.

3.2　简单几何体的体积

求体积问题也是定积分的一个重要应用，下面我们介绍一些简单旋转几何体体积的求法.

例 4　给定直角边为 1 的等腰直角三角形，绕一条直角边旋转一周，得到一个圆锥体．求它的体积.

分析　如图 4-14(1)所示，在平面直角坐标系中，直角边为 1 的等腰直角三角形可以看成是由直线 $y=x$，$x=1$ 以及 x 轴所围成的平面图形.

在区间[0,1]内插入 $n-1$ 个分点，使 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$，把这个三角形分割成 n 个垂直于 x 轴的小梯形，设第 i 个小梯形的宽是 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，这个小梯形绕 x 轴旋转一周就得到一个厚度是 Δx_i 的小圆台(如图 4-14(2))．当 Δx_i 很小时，第 i 个小圆台近似于底面半径为 x_i 的小圆柱，因此，第 i 个小圆台的体积 V_i 近似为

$$V_i\approx\pi x_i^2\Delta x_i.$$

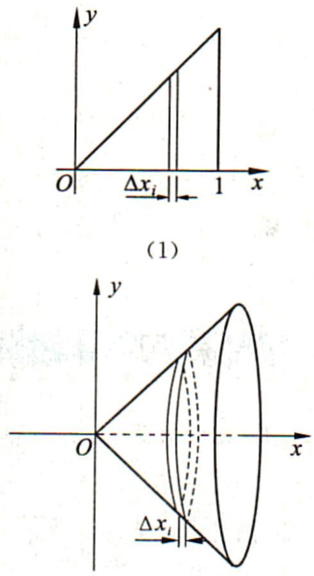
圆锥的体积 V 就等于所有小圆台的体积和

$$V\approx\pi(x_1^2\Delta x_1+\cdots+x_i^2\Delta x_i+\cdots+1^2\Delta x_n).$$

这个问题是定积分问题.

解　圆锥体的体积为

$$V=\int_0^1\pi x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$



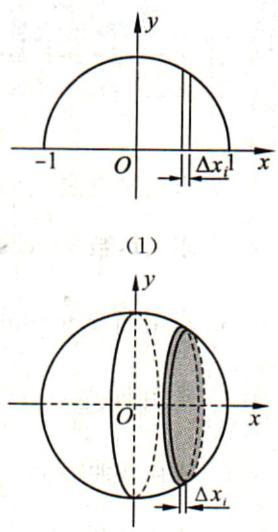
(1)　(2)

图 4-14

例 5　一个半径为 1 的球可以看成是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 x 轴所围成的区域(半圆)绕 x 轴旋转一周得到的，如图 4-15 所示. 求球的体积.

分析　在区间[−1,1]内插入 $n-1$ 个分点，使 $-1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$，把半圆分割成 n 个垂直于 x 轴的小长条，设第 i 个小长条的宽是 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，这个小长条绕 x 轴旋转一周就得到一个厚度是 Δx_i 的小圆片. 当 Δx_i 很小时，第 i 个小圆片近似于底面半径为 $\sqrt{1-x_i^2}$ 的小圆柱，因此，第 i 个小圆片的体积 V_i 近似为

$$V_i\approx\pi(1-x_i^2)\Delta x_i.$$



(1)　(2)

图 4-15

球的体积 V 等于所有小圆片的体积和

$$V \approx \pi(1-x_1^2)\Delta x_1 + \cdots + \pi(1-x_i^2)\Delta x_i + \cdots + \pi(1-x_n^2)\Delta x_n.$$

这个问题是定积分问题.

解 $V=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)\mathrm{d}x$,

根据定积分的性质 2、性质 3 得

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\right).$$

查积分表得

$$\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x=x\Big|_{-1}^{1}=2,$$

$$\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

所以,所求球的体积为

$$V=\pi\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi.$$

练 习

1. 将由直线 $y=x$, $x=1$, $x=2$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周,得到一个圆台,利用定积分求该圆台的体积.
2. 求由曲线 $y=\sqrt{x+1}$, x 轴,y 轴以及直线 $x=1$ 所围成的区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.

习 题 4—3

1. 求由抛物线 $y=x^2$,直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形的面积.
2. 求由函数 $y=\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积.
3. 求由曲线 $y=\sin x$,直线 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 以及 x 轴所围成的平面图形的面积.
4. 求由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$,直线 $x=1$, $x=2$ 和 x 轴所围成的平面图形的面积.
5. 求由双曲线 $y=\frac{1}{x}$,直线 $x=1$, $x=2$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.
6. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $x=1$ 以及坐标轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.
7. 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形的面积,并求该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

阅读材料

数学史上的丰碑——微积分

在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了，如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里.

——恩格斯

恩格斯

国际无产阶级的伟大导师、近代共产主义的奠基人

一、数学史上的丰碑

人们通过在一个时刻附近用匀速变化刻画非匀速变化，通过在一点附近用切线代替曲线，人类第一次对经验中的速度概念、切线及其斜率给出了确切的定义，得到了求速度、曲线斜率、函数最大—最小值等问题的一般方法.这样发明了微分学.

人们通过用匀速运动刻画非匀速运动速度的思想，得到了求变速直线运动物体走过的路程的一般方法；通过以直代曲，对经验中的曲线形面积概念给出了确切定义，并得到了通过矩形面积求曲边梯形面积的一般思想.这样发明了积分学.

特别重要的是，牛顿和莱布尼茨发现了微分学与积分学间的深刻联系——微积分基本定理，标志着微积分学的创立.通过这一联系，使得过去少数大数学家潜心研究的需要特殊方法才能解决的许多问题，今天一个接受过微积分基本训练的学生就能轻易解决.

微积分所具有的将复杂的非线性问题归纳为简单的线性问题加以研究的思想和方法，使得自从300年前微积分建立以来的每一个世纪，数学家的许多重要工作都是围绕着微积分的应用、发展和完善进行的，微积分成了现代数学的基础理论和方法之一，也使得数学在解决物理科学、工程学、生物科学，甚至是社会科学方面问题的强大威力得到了越来越充分的体现，所以说，微积分不愧是数学发展史上的一座丰碑，是人类智慧最伟大的成就之一.

二、站在巨人肩膀上的巨人

牛顿和莱布尼茨各自独立创立了微积分，单凭这一项成就，就足以奠定两人科学史上的伟大地位，何况他们的成就都远不止于此.莱布尼茨评价道：“在从世界开始到

伊萨克·牛顿
(Isaac Newton,
1643—1727)英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家

牛顿生活的年代的全部数学中,牛顿的工作超过了一半."

莱布尼茨终生奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法.这种努力导致许多数学的发现,最突出的是微积分学.牛顿建立微积分主要是从运动学的观点出发,而莱布尼茨则从几何学的角度去考虑.特别和I.巴罗的微分三角形有密切关系.他的第一篇微分学文章《一种求极大极小和切线的新方法,……》在《学艺》杂志上发表,这是世界上最早的微积分文献,比牛顿的《自然哲学的数学原理》早3年,它已含有现代微分符号和基本微分法则.1686年他在《学艺》上发表第一篇积分学论文.他所创设的微积分符号为微积分的发展带来了极大的方便.

但是微积分的创立并不只是这两人的功劳,而是那个时代一批科学大师共同努力的结果,牛顿和莱布尼茨只是微积分学的最终创立者.对此,牛顿曾有这样一句名言:"如果说我比别人看得远些,那是因为我站在了巨人的肩上."实际上,积分的思想可以追溯到古希腊时期以及中国古代,如阿基米德和刘徽及祖冲之父子导出球体积公式的过程.在牛顿和莱布尼茨发明微积分之前,文艺复兴带来的思想解放使得欧洲有一批先进人物继承和发扬了希腊的文化传统,提倡数学和科学,并将它们用于实际.这一时期,文化、商业、航海和其他生产活动得到了快速发展,发展过程中提出了需要研究物体运动的路程与速度、加速度的关系,求曲线的切线,求极大、极小值以及求体积和求曲线弧长等许多迫切需要解决的问题.在17世纪上半叶,这些问题吸引了当时几乎所有科学大师如伽利略、开普勒、笛卡儿、费马、巴罗(牛顿的老师)等的兴趣,他们提出了许多求曲线形面积、曲线切线、极值的问题的方法,甚至也有人意识到了在某些特殊情形下这两类问题的互逆关系,因此,应该说,微积分的发明是半个世纪酝酿的必然结果,牛顿和莱布尼茨是站在巨人肩膀上的巨人.

莱布尼茨
(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)
德国哲学家、数学家

当然,牛顿是人类历史上罕见的科学天才,爱因斯坦说:"在牛顿面前,我感觉自己很渺小."牛顿天生具有怀疑精神和长时间聚精会神思考问题的能力,即使是对别人司空见惯的事情,他也要追问到底,直到把问题的秘密揭穿.像他的许多重要成果一样,微积分是牛顿在1665年秋季到1667年春季提出的,当时,伦敦市区瘟疫流行,牛顿回到农村老家躲避瘟疫,正是这在穷乡僻壤隐居的18个月,他的头脑掀起了科学革命的巨浪,这段时间也成为牛顿一生,乃至科学史上的划时代岁月.

牛顿一生追求完美,他始终努力探求大自然存在和运行的根本原因.临终前,他给自己的一生评价道:"我不知道世上的人对我怎样评价.我却

这样认为：我好像是一个在海边玩耍的孩子，时而拾到几块晶莹的石子，时而拾到几片美丽的贝壳并为之欢欣，而在我面前仍是未被发现的真理的大海."直到今天，他的科学成果和科学精神仍在持续影响着我们的物质生活和精神生活.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 定积分的概念

通过估算曲边梯形面积等实例，引入定积分的概念，理解“分割、求和、取极限”的过程，知道定积分是一个确定的数值.

2. 微积分基本定理

理解微积分基本定理，体会导数与积分的关系，会通过查表求简单的定积分.

3. 定积分的应用

通过实例，进一步理解定积分的思想，了解定积分在求平面图形的面积、旋转体的体积等方面的简单应用.

二、复习建议

1. 阅读课本、整理笔记、复习例题，总结出本章的基本知识和基本方法.

2. 请自己制作定积分思想产生的框图.

3. 结合自己的理解，将定积分的思想应用于解决日常生活所遇到的问题.

4. 本章复习时可供参考的思考题：

(1) 为什么求平面图形的面积、求变速直线运动的物体所产生的位移、求变力所做的功等问题都可以看作是同一个数学模型？

(2) 通过阅读相关课外书籍，体会微积分的产生有何重要意义.

(3) 为什么“微积分基本定理”使应用更加广泛？

(4) 除了书上列举的定积分的模型外，定积分的思想还有哪些应用？

(5) 学习完本章后，你还有哪些不理解的问题？

5. 与同学互相交流学习本章的体会.

复 习 题 四

A　组

1. 用图形表示下列定积分：

(1) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\mathrm{d}x$.

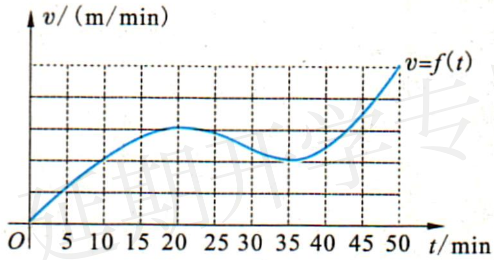
2. 一个水管中水的流速 v(单位：m^3/ min)是时间 t(单位：min)的函数：$v=f(t)$.

(1) 试用定积分表示在前 10 min 内水管中流过的水量；

(2) 假设 $f(t)=t+\frac{1}{2}t^2$，试估计前 10 min 水管中流过的水量，并写出估计值的误差.

3. 一只虫子在 $0\leqslant t\leqslant 50$ min 内以速度 $v=f(t)$爬行，速度以m/min为单位.

假设 $v=f(t)$的图像如图所示，试估算这只虫子在这 50 min 内爬行的距离，并写出估计值的误差.



（第 3 题）

4. 求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}(x^5+x^3-2x)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^{2}(2\mathrm{e}^x-\sin x)\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{3x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_{-2}^{0}(x+1)^2\mathrm{d}x$.

5. 求由曲线 $y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\right)$和 $y=\cos x\left(x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\right)$所围成的平面图形的面积.

6. 求半椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(y\geqslant 0)$绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积.

7. 求由抛物线 $y=x^2-1$ 与直线 $y=x+1$ 所围成的平面图形的面积.

8. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 及直线 $y=-x+1$，$x=1$ 所围成的平面图形的面积.

9. 物体以速度 $v=3t^2+2t$(单位：m/s)做直线运动，求它在 $t=0$ s 到 $t=3$ s 内所走过的路程.

10. 将由曲线 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周，求所得旋转体的体积.

11. 一条水管中水流的速度 v(单位：m^3/s)是时间 t(单位：s)的函数：$v=2t+\sin t$，求前 10 s 水管中流过的水量.

B 组

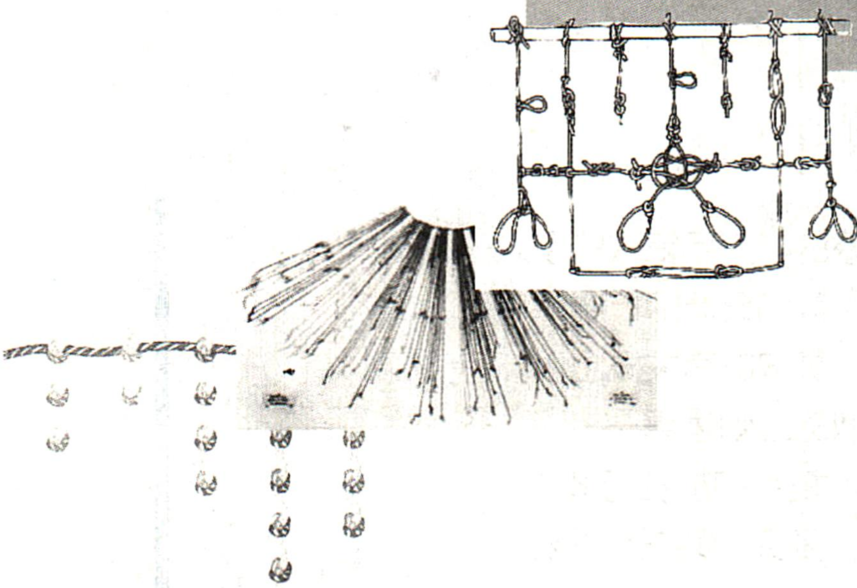
1. 一杯 90 ℃的热水被放进 4 ℃的冰箱冷藏室中冷却，如果在冰箱内，热水的温度随热水放入冰箱的时间 t(单位：min)的变化率为 $-7e^{-0.1t}$. 请问：20 min 后，水温能否降到30 ℃？
2. 一条长 10 m，质量为 20 kg 的均匀链条被悬挂于一建筑物顶部，问：需要做多少功才能把这一链条全部拉上建筑物顶部？
3. 当 a 为何值时，由曲线 $y=x^2+1$ 与直线 $x=a$，$x=a+1$，$y=0$ 所围成的图形面积最小？
4. 从一个鱼塘中捕捞鱼的成本与鱼塘中鱼的数量有关. 若鱼塘里有 x kg 鱼，则每千克的捕捞成本是 $\frac{200}{x}$元. 现在鱼塘中大约有 10 000 kg 鱼，要从中捕捞6 000 kg，需要花费多少元？

第五章 数系的扩充与复数的引入

人类文明的历史经历了数的发展.

我国古代文献《周易·系辞下》有“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”之说.“结绳而治”就是结绳记事或结绳记数，“书契”就是刻画符号记事或记数……

随着历史的发展，人们对数的认识也在发生变化……学习了这一章你就会对数的发展有新的认识.



复数系统在科学上的作用可大了.没有复数，便没有电磁学，便没有量子力学，便没有近代文明！数学的伟大是大可想象的.

——陈省身

§1　数系的扩充与复数的引入

1.1　数的概念的扩展

人类很早就知道用自然数来计数. 随着社会的发展和实际的需要,数的概念也逐步扩充. 至今我们已学习过自然数集 **N**,整数集 **Z**,有理数集 **Q** 和实数集 **R**,并且它们之间有如下的包含关系:

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}.$$

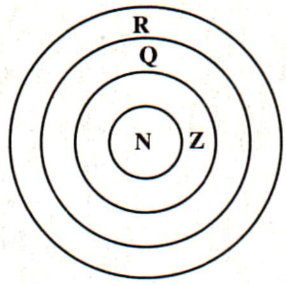


图 5-1

问题提出

人们发现仅有实数还是不够用. 例如 $x^2=-1$ 这样简单的方程在实数集内无解,因为无论 x 取什么实数值,它的平方都不等于-1.

为了保证运算可以实施,我们引进一个使这个方程有解的数. 把平方等于-1 的数用符号 i 表示,规定 $\mathrm{i}^2=-1$. 我们把 i 叫作**虚数单位**.

我们规定,i 可以和实数 b 相乘,得 $b\mathrm{i}$(因为零和任何实数相乘所得的积是零,与此类似,我们规定 $0\cdot\mathrm{i}=0$). $b\mathrm{i}$ 还可以和实数 a 相加得 $a+b\mathrm{i}$. 于是,数的范围又得到了扩充,出现了形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数,其中 a,b 是实数. 我们把形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数叫作**复数**(a,b 是实数,i 是虚数单位). 复数通常表示为

$$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}).$$

此时有,$b\mathrm{i}=\mathrm{i}b$,$a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}+a$,等等.

根据复数中 a,b 的取值不同,复数可以有以下的分类:

$$\text{复数 } a+b\mathrm{i}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$,a 与 b 分别叫作复数 z 的实部与虚部,并且分别用 $\mathrm{Re}\,z$ 与 $\mathrm{Im}\,z$ 表示,即 $a=\mathrm{Re}\,z$,$b=\mathrm{Im}\,z$.

复数的全体组成的集合叫作**复数集**,记作 **C**,显然 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

例 1 说出下列三个复数的实部、虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数请指出是否为纯虚数：

(1) $3+4\mathrm{i}$； (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$； (3) -7.

解 (1) $3+4\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 3 与 4，它是虚数，但不是纯虚数；

(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 0 与 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，它是虚数，而且是纯虚数；

(3) -7 的实部与虚部分别是 -7 与 0，它是实数.

从 18 世纪起，复数在数学、力学中得到了应用，现在复数的理论在数学、力学、电学等方面有着更加广泛的应用，它已成为科技人员普遍熟悉的数学工具.

1.2 复数的有关概念

复数 $a+b\mathrm{i}$ 可以看成是关于 i 的一次二项式，类比两个二项式相等的意义，我们规定：

两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等，记作 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$. 即

$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 当且仅当 $a=c$，且 $b=d$.

例 2 设 $x, y\in\mathbf{R}$，并且 $(x+2)-2x\mathrm{i}=-3y+(y-1)\mathrm{i}$，求 x, y 的值.

解 由复数相等的意义，得

$$\begin{cases} x+2=-3y, \\ -2x=y-1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

复数 $z=a+b\mathrm{i}\,(a, b\in\mathbf{R})$ 可以用直角坐标平面内的一个点 Z 来表示，这个点的横坐标是 a，纵坐标是 b（如图 5-2 所示）. 显然表示实数的点都在 x 轴上，表示纯虚数的点都在 y 轴上.

当用直角坐标平面内的点来表示复数时，我们称这个直角坐标平面为**复平面**，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**.

这样，每一个复数在复平面内都有唯一的一个点与它对应；反过来，复平面内的每一个点都有唯一的一个复数与它对应. 复数集 **C** 和复平面内所有的点构成的集合是一一对应的，即**任一个复数 $z=a+bi$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 是对应的.**

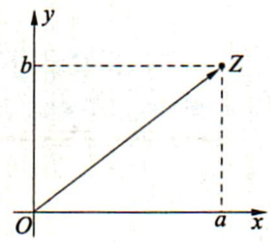


图 5-2

又因为复平面内的点 $Z(a,b)$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的，所以一个复数 $z=a+bi$ 与复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 也是一一对应的.

设复数 $z=a+bi$ 在复平面内对应的点是 $Z(a,b)$，点 Z 到原点的距离 $|OZ|$ 叫作**复数 z 的模或绝对值**，记作 $|z|$. 显然，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

两个复数一般不能比较大小，但可以比较它们模的大小.

例 3　在复平面内表示下列复数，并分别求出它们的模：

(1) $-2+3i$；　(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$；　(3) $3-4i$；　(4) $-1-3i$.

解　在复平面内的表示如图 5-3 所示.

(1) $|-2+3i|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$；

(2) $\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$；

(3) $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$；

(4) $|-1-3i|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

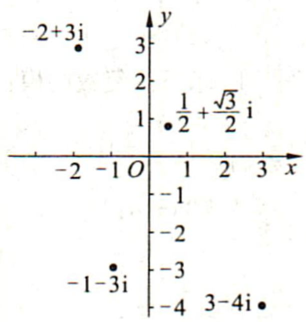


图 5-3

练　习

1. 说出下列复数的实部与虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数指出是否为纯虚数：

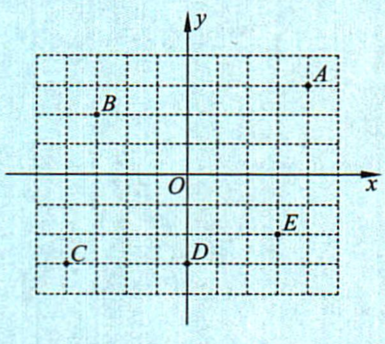
　(1) $1+\sqrt{2}i$；　(2) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$；　(3) $(\sqrt{3}-1)i$；　(4) 0.

2. 求适合下列方程的实数 x,y 的值：

　(1) $(-2x+3)+(y-4)i=0$；

　(2) $(3x-2y)-(x+2y)i=3-6i$.

3. 说出图中复平面内点 A, B, C, D, E 所表示的复数(每个小方格的边长是 1).



(第 3 题)

4. 设复数 $z=a+bi$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 对应，若点 Z 分别位于下列位置，求 a,b 满足的条件：

　(1) 实轴上；　(2) 虚轴上；

　(3) 实轴上方(不包括实轴)；　(4) 虚轴左侧(不包括虚轴).

5. 求下列复数的模：

　(1) $z_1=-5+12i$；　(2) $z_2=4i-5$；　(3) $z_3=\sqrt{3}-i$.

习 题 5—1

A 组

1. 求实数 m 的值，使复数 $(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)\,i$ 分别是：

(1) 实数； (2) 纯虚数； (3) 零.

2. 求适合下列各方程的实数 x, y：

(1) $(x+y)-xyi=6+7i$；

(2) $(x^2-4x-5)+(y^2+3y-4)i=0$.

3. 在复平面上作出表示下列复数的点：

(1) $-1+2i$； (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$；

(3) $3i$； (4) 5.

4. 求下列复数的模：

(1) $3-4i$； (2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$；

(3) -6； (4) $-5i$.

B 组

设复数 $z=(m-1)+(m^2-4m-5)i$ 和复平面内的点 Z 对应，若点 Z 的位置分别满足下列要求，求实数 m 满足的条件：

(1) 不在实轴上； (2) 在虚轴上；

(3) 在实轴下方(不包括实轴)； (4) 在虚轴右侧(不包括虚轴).

§2　复数的四则运算

2.1　复数的加法与减法

设 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 是任意两个复数，我们定义复数的加法、减法如下：

$$\boxed{(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}.}$$

也就是说，两个复数的和（或差）仍然是一个复数. 它的实部是原来两个复数的实部的和（或差），它的虚部是原来两个复数的虚部的和（或差）.

思考交流

请举例验证复数的加法法则是否满足交换律、结合律，并与同学交流.

例 1　计算：

(1) $(-5+3\mathrm{i})+(2-4\mathrm{i})$；　(2) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})+(2\sqrt{3}-4\mathrm{i})$.

解　(1)　$(-5+3\mathrm{i})+(2-4\mathrm{i})$

$=(-5+2)+(3-4)\mathrm{i}$

$=-3-\mathrm{i}$；

(2)　$(\sqrt{3}-\mathrm{i})+(2\sqrt{3}-4\mathrm{i})$

$=(\sqrt{3}+2\sqrt{3})+(-1-4)\mathrm{i}$

$=3\sqrt{3}-5\mathrm{i}$.

例 2　计算：

(1) $(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$；　(2) $(4-9\mathrm{i})-(4+9\mathrm{i})$.

解　(1)　$(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$

$=(2-3)+(-1-1)\mathrm{i}$

$=-1-2\mathrm{i}$；

(2)　$(4-9\mathrm{i})-(4+9\mathrm{i})$

$=(4-4)+(-9-9)i$

$=-18i.$

练 习

计算：

(1) $-7+(-3-i)$；

(2) $(3-2i)+(-1+2i)$；

(3) $(-\sqrt{6}-2i)+(\sqrt{6}+2i)$；

(4) $(3\sqrt{2}-2i)-(-\sqrt{2}+3i)+(4\sqrt{2}+3i)$；

(5) $(3\sqrt{5}-4i)-(-\sqrt{5}+2i)$；

(6) $(8-2i)-(-7+5i)+(3\sqrt{3}+7i)$.

2.2 复数的乘法与除法

设 $a+bi$ 与 $c+di$ 分别是任意两个复数，我们定义复数的乘法如下：

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

也就是说，两个复数的积仍然是一个复数. 复数的乘法与多项式的乘法是类似的，但在运算过程中，需要用 $i^2=-1$ 进行化简，然后把实部与虚部分别合并.

例 3 计算：$(-2-i)(3+i)$.

解 $(-2-i)(3+i)$

$=-2\times3-2i-3i-i\times i$

$=-6-2i-3i-i^2$

$=-6-2i-3i+1$

$=-5-5i.$

例 4 计算：

(1) $(-2-3i)(-1+3i)$； (2) $(-\sqrt{2}-2i)(\sqrt{6}+i)$.

解 (1) $(-2-3i)(-1+3i)$

$=2-6i+3i-9i^2$

$=2-6i+3i+9$

$=11-3i$；

(2) $(-\sqrt{2}-2i)(\sqrt{6}+i)$

$=-\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{2}i-2i\times\sqrt{6}-2i\times i$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}i-2\sqrt{6}i-2i^2$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}i-2\sqrt{6}i+2$

$=(2-2\sqrt{3})-(\sqrt{2}+2\sqrt{6})i.$

动手实践

计算下列各式，你发现其中有什么规律吗？请将你概括出的规律与同学交流，并证明.

(1) $(3+2i)(3-2i)$；　　(2) $(-2-3i)(-2+3i)$；

(3) $(-2\sqrt{2}-i)(-2\sqrt{2}+i)$；　　(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$.

我们可以发现，如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，那么它们的乘积是一个非负实数：

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这样的两个复数叫作**互为共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用$\overline{z}$来表示，也就是当 $z=a+bi$ 时，$\overline{z}=a-bi$. 于是

$$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2.$$

容易验证，复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，即对任何 $z_1, z_2, z_3\in\mathbf{C}$，有

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

在复数范围内，实数范围内正整数指数幂的运算律仍然成立.

即对于任意复数 z, z_1, z_2 和正整数 m, n，有

$$z^mz^n=z^{m+n},\ (z^m)^n=z^{mn},\ (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n.$$

思考交流

请验证复数的乘法法则满足结合律及乘法对加法的分配律，并与同学交流.

例 5 计算：

(1) $(1+i)^4$；　　(2) $(2-i)^2(2+i)^2$.

解 (1) $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2=(2i)^2=-4$；

(2) $(2-i)^2(2+i)^2=[(2-i)(2+i)]^2=(4+1)^2=25.$

实数的除法是实数乘法的逆运算，类似地，复数的除法也是复数乘法的逆运算.

给出两个复数 $a+bi$，$c+di(c+di\neq 0)$，我们把满足等式 $(c+di)\cdot(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi$ 叫作复数 $a+bi$ 除以 $c+di$ 所得的**商**，记作 $(a+bi)\div(c+di)$ 或者 $\dfrac{a+bi}{c+di}$.

问题提出

怎样求 $(a+bi)\div(c+di)$？

分析理解

利用前面探究的共轭复数的积是一个非负数，我们可以将 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 的分子、分母同乘分母 $c+di$ 的共轭复数 $c-di$，得

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

所以

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

利用前面探究的共轭复数的积是一个非负数，我们可以在等式 $(c+di)(x+yi)=(a+bi)$ 的两边同乘 $(c-di)$，得

$$(c+di)(x+yi)(c-di)=(a+bi)(c-di),$$

计算，得

$$(c^2+d^2)(x+yi)=(ac+bd)+(bc-ad)i.$$

因为 $c+di\neq 0$，所以 $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ 是正实数，因此在上式两边同除以 c^2+d^2，得

$$(x+yi)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

由此可见，复数的除法与分母有理化的方法相类似，可以用分母的共轭复数同乘分子与分母后，再进行运算.

例 6 计算：

(1) $\dfrac{-1}{2i}$；　　(2) $\dfrac{1+2i}{2-3i}$.

解 (1) $\dfrac{-1}{2i}=\dfrac{-1\times i}{2i\times i}=\dfrac{-i}{-2}=\dfrac{i}{2}$；

(2) $\dfrac{1+2i}{2-3i}=\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{-4+7i}{13}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i$.

练　习

1. 计算：

(1) $(1+3i)(3+2i)$；　(2) $(-1-2i)(2i+4)$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$；　(4) $(3+2i)(-3+2i)$.

2. 计算：

(1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$；　(2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.

3. 计算：

(1) $(-2+3i)^3$；　(2) $(1+2i)^4$.

4. 计算：

(1) $\frac{i}{2-3i}$；　(2) $\frac{2+i}{1-i}+\frac{1+i}{3-i}$.

习　题　5—2

A　组

1. 计算：

(1) $i+(3+4i)$；　(2) $(1-i)-(1+i)$；

(3) $(2-i)-(3+i)$；　(4) $(1-4i)+(2-i)$.

2. 计算：

(1) $(1+i)(3+4i)$；　(2) $(1-2i)(1+2i)$；

(3) $(3+i)(3-2i)(1-i)$；　(4) $[(5-4i)+(1+3i)](5+2i)$.

3. 计算：(其中 $n\in\mathbf{N}$)

(1) $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}$；　(2) $i^{4n}\cdot i^{4n+1}\cdot i^{4n+2}\cdot i^{4n+3}$.

4. 计算：

(1) $\frac{2-3i}{i}$；　(2) $\frac{1+i}{1-i}$；　(3) $\frac{i-2}{2+i}$；　(4) $\frac{3-5i}{1-2i}$.

5. 计算：

(1) $(1+2i)^2$；　(2) $(3-4i)^2$.

6. 计算：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.

7. 已知 m 为实数，并且 $\frac{1+mi}{2-i}+\frac{1}{2}$ 的实部与虚部相等，求 m 的值.

B 组

1. 在复平面内，与复数 $z=3-4\mathrm{i}$ 的共轭复数对应的点位于(　　).

   A. 第一象限　　　　B. 第二象限

   C. 第三象限　　　　D. 第四象限

2. 写出下列复数的共轭复数，并在复平面上作出表示各对复数的点：

   (1) $-3+\mathrm{i}$;　　　　(2) $\sqrt{3}\mathrm{i}-2$;

   (3) $1-3\mathrm{i}$;　　　　(4) $3-4\mathrm{i}$.

3. 已知 $z_1=1-3\mathrm{i}$，$z_2=2a+4\mathrm{i}$，且 $z_2=\frac{1}{z_1}$，求复数 a.

4. 已知 a 为实数，并且 $\frac{2+\mathrm{i}}{3-a\mathrm{i}}+\frac{1}{4}$ 的实部与虚部相等，求 a.

阅读材料

数的扩充

一、从自然数到复数

数系发展经历了一个漫长的历史，人们的生产实践和数学本身发展的需要是数系发展的动力和源泉．克罗内克说："上帝创造了自然数，其余的都是人的研究工作．"这就是说数学的一切研究从自然数开始．以自然数为源头，随着社会的发展，数系得以不断扩充．生活中的分配问题产生了分数，互相亏欠的问题产生了负数．

从无理数开始，数系的进一步扩充，动力主要来自于数学内部．例如：求面积为 2 的正方形的边长是多少，也就是求方程 $x^2=2$ 的解的问题导致了无理数的产生；求方程 $x^2=-1$ 的解的问题促进了虚数的引入，进而产生了复数．

数系的每一次扩充，无论是源于生活、生产实践的推动，还是源于数学内部的动力，每次有新的意义的数的引入，都具有如下两个特点：

一是要符合数学学科理论发展的要求，比如数系扩充后仍然保持了原有数系中的运算法则和运算关系；

二是都具有广泛的应用和意义，比如借助复数的几何意义，人们对复数的存在得以确立，进一步在许多学科找到了它的应用．

这表明数学与生活实际、自然科学有着相互影响、相互作用的关系，数学为自然科学提供定量描述的工具，自然科学则向数学提供大量的问题．

二、四元数简介

每一个人了解到数系的扩充过程之后都会不约而同地产生一个问题：复数还能不能再扩充呢？人们自然考虑复数由两个有序实数确定，那么多个有序实数是否也能构成一个类似的数系呢？事实上从 19 世纪中叶开始不断有人研究所谓超复数，直到 20 世纪初才完成了超复数的一般理论．

四元数是比较简单的一种扩充．它是英国数学家哈密顿（W. R. Hamilton，1805—1865）于 1843 年引入的．在四元数中规定了 e，i，j，k 四个元（其中，e=1），任何一个四元数 q 可以表示为

$$q=a_0\mathrm{e}+a_1\mathrm{i}+a_2\mathrm{j}+a_3\mathrm{k}.\text{（其中，}a_0,a_1,a_2,a_3\text{ 是实数）}$$

在多项式乘法运算中规定各元之间的乘法关系为

$$\begin{array}{llll} \mathrm{ee}=\mathrm{e}, & \mathrm{ei}=\mathrm{i}, & \mathrm{ej}=\mathrm{j}, & \mathrm{ek}=\mathrm{k}, \\ \mathrm{ie}=\mathrm{i}, & \mathrm{ii}=-\mathrm{e}, & \mathrm{ij}=\mathrm{k}, & \mathrm{ik}=-\mathrm{j}, \end{array}$$

$je=j$,　$ji=-k$,　$jj=-e$,　$jk=i$,

$ke=k$,　$ki=j$,　$kj=-i$,　$kk=-e$.

虽然四元数的运算在很多方面都与复数的运算相类似,但是由于乘法不满足交换律,使得四元数的性质与复数的性质有很大差异.

四元数的引入给向量代数的发展以很大的推动力.近 20 年来计算机图形学和机器人科学的迅速发展,使四元数得到广泛的应用,它在表示向量及旋转变换时提供了比矩阵更方便的方法.四元数是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系.四元数的产生对于代数学的发展是革命性的.

参考书目:

张顺燕.数学的源与流.北京:高等教育出版社,2000

李文林.数学史概论.北京:高等教育出版社,2002

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 认识数系扩充的过程，体会在数系扩充中数学与实际需求的作用与关系．

2. 理解复数的基本概念、表示方法，能进行复数的四则运算.

3. 会解实系数一元二次方程，理解韦达定理.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次的呈现．

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结，以适当方式呈现.

3. 本章复习时，可供参考的思考题：

(1) 在数系扩充的过程中，实际需求发挥了什么作用？

(2) 在数系扩充中，数学内部需求发挥了什么作用？

(3) 复数的概念是如何引入的？

(4) 如何对两个复数进行四则运算？

(5) 如何求解一般的实系数一元二次方程？实系数一元二次方程的根与系数之间有何关系？

4. 请同学们相互交流学习本章的感受，并结合自己的体会写出读书报告．

复习题五

A 组

1. 求适合下列方程的实数 x, y 的值：

(1) $(-4x+1)+(y+2)\mathrm{i}=0$；

(2) $(x-2y)-(3x+y)\mathrm{i}=3-6\mathrm{i}$.

2. 化简：i^{11}，i^{25}，i^{26}，i^{36}，i^{70}，i^{101}，i^{355}，i^{400}.

3. 计算：

(1) $(3+4\mathrm{i})+(-5-3\mathrm{i})$；

(2) $(1-5\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$；

(3) $(-2+3\mathrm{i})+(6-5\mathrm{i})$；

(4) $(7-\mathrm{i})-(2\mathrm{i}-3)$.

4. 计算：

(1) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})$；

(2) $(4-3\mathrm{i})(-5-4\mathrm{i})$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$；

(4) $(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$.

5. 计算：

(1) $(1+2\mathrm{i})^2$；

(2) $(2-3\mathrm{i})^3$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；

(4) $\frac{1}{\mathrm{i}}$；

(5) $\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；

(6) $\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$.

6. 已知 $w=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，求 w^2-w+1 的值.

B 组

1. 计算：

(1) $\frac{\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$；

(2) $\frac{4+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$；

(3) $\frac{1-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}-3}{1+\mathrm{i}}$；

(4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

2. 当 $z=2+\mathrm{i}$ 时，计算 $\frac{z^2-4z+8}{z-1}$.

探究活动

包装的设计

一、问题情境和探究任务

问题情境 市场上有许多饮料都用金属制成的易拉罐包装，其形状主要为圆柱体. 如果你注意的话，就会发现有些易拉罐的顶盖或者底部所用的材料常常与侧壁所用的材料不同．如何设计最节约成本的包装呢?

任务 1 请先就一种顶盖材料单位成本为其他部分单位成本的 3 倍的易拉罐包装的设计进行讨论．

任务 2 有一种易拉罐的顶盖和底部用的是同一种材料，其单位成本是侧壁所用材料单位成本的 x 倍，x 是如何影响最节约成本的包装形状的?

任务 3 有人说，买同一种饮料，越是大包装越划算．你同意这种说法吗? 你能用数学方法对这种说法进行解释吗?

任务 4 调查市场上的易拉罐包装，其中有与你设计的最佳方案相一致的包装设计吗? 试对你取得的结论进行解释．

二、实施建议

1. 可以组成学习探究小组，集体讨论，分工合作，形成具体可行的探究方案，再形成每个人的成果报告.

2. 对任务 2，3 的建议

用数学方法解决问题的第一步就是用数学语言明确问题，比如，首先用量化的方法定义“形状”“划算”.

3. 对任务 4 的建议

向饮料销售员、食品厂工程师等进行调查，也可以通过网络搜集资料，了解影响产品包装的主要因素，自己尝试分析，特别要注意提出其中可能蕴涵的新的数学问题．

4. 成果报告的书写建议

成果报告可以借助于后面的表格呈现，也可以自己设计呈现方式．

5. 成果交流

建议以小组为单位，选出代表，在班级中报告研究成果，交流研

究体会.

6. 评价建议

采用自评、互评、教师评价相结合的形式，善于发现别人工作中的特色，以下几个方面可着重考虑：

(1)调查、求解过程和结果：合理、清楚、简捷、正确；

(2)独到的思考和发现；

(3)恰当地使用工具；

(4)合理、简捷的算法；

(5)提出有见地的新问题；

(6)发挥组员的特长，体现合作学习的效果.

“包装的设计”探究活动成果报告表

____年级____班　姓名________　完成时间__________

<table>
<tr><td>课题组成员</td><td>分　工</td><td>主　要　贡　献</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">探究的过程和结果：</td></tr>
<tr><td colspan="3">参考文献：</td></tr>
<tr><td colspan="3">成果的自我评价：(请说明方法或原理的合理性、特色或创新点、不足之处等)</td></tr>
<tr><td colspan="3">拓展(选做)：(在解决问题的过程中发现和提出的新问题，可以延伸或拓展的内容，得到的新结果或猜想等)</td></tr>
<tr><td colspan="3">体会：(描述在工作中的感受)</td></tr>
</table>