经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修1-2）

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修1-2）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　王尚志　王建波
编写人员（按姓氏笔画排序）
王尚志　王建波　关　健
张思明　李亚玲　范永利

北京师范大学出版社
·北 京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮 购 科 电 话　010-58808083
传　　　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电 子 邮 箱　shuxue3@bnupg.com
通 信 地 址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：6
字　　数：166 千字
版　　次：2008 年 5 月第 3 版
印　　次：2019 年 7 月第 23 次印刷
定　　价：5.50 元
ISBN　978-7-303-08185-1
责任编辑：董克强　邢自兴　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展．要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的．中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要．希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识．数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题．大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics)．问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始．在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的．不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26 册书组成：必修教材有5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题．习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的．在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

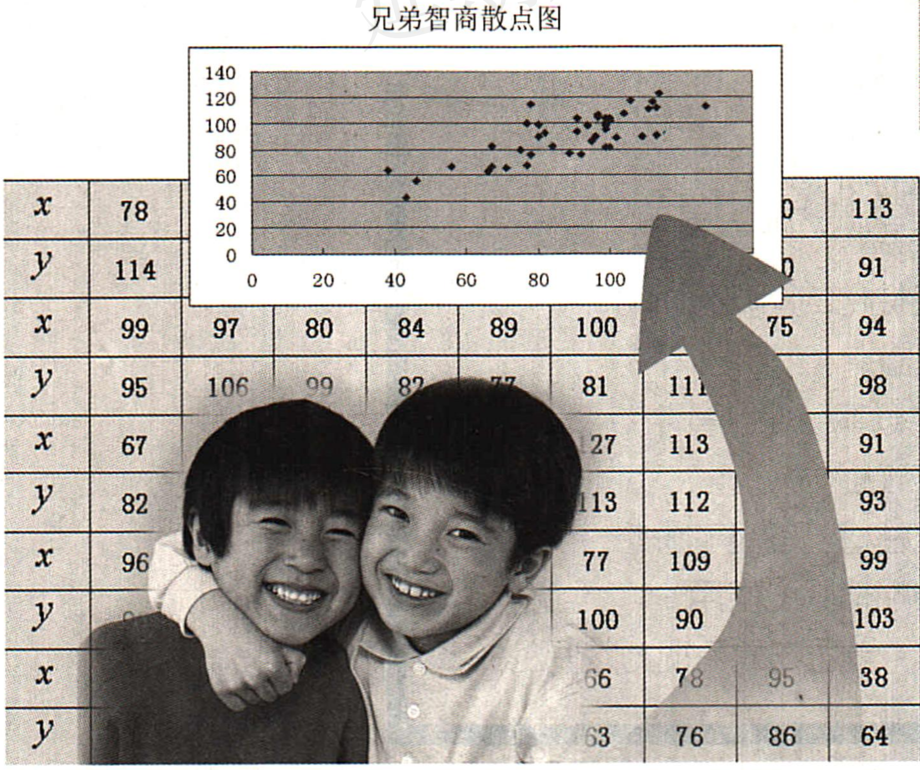
我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811.

目　录

第一章 统计案例

“一个家族中兄弟或姐妹智商的相关性如何?”“吸烟与肺癌是否有关?”……这些都是日常生活中常见的一些问题.

本章将在必修课程学习统计的基础上，通过对以上问题的讨论，了解和使用一些常见的统计方法，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想以及统计方法使用的广泛性.



§1 回归分析

通过必修阶段统计内容的学习，我们已经认识到了现实生活中存在着某些有关系的不同变量，这些变量之间的关系不是可以用函数表示的确定性关系. 例如，父母的身高与他们孩子的身高，食物中所含的脂肪与所含的热量，模拟测验的成绩与实际考试的成绩，农作物的施肥量与产量. 它们之间是一种非确定性关系，称为相关关系. 例如，施肥量无疑是影响农作物产量的重要因素，但不是唯一因素，农作物的产量还与农作物的栽培方式、气候等因素有关，有些因素是人为可以控制的，而有些则无法控制.

由于一个变量与另一个变量之间往往不是确定的关系，人们也不可能把握与某个变量有关的所有变量，因此变量间的关系往往会表现出某种不确定性. 回归分析就是研究这种变量之间的关系的一种方法，通过对变量之间关系的研究，从而发现蕴涵在事物或现象中的某些规律.

1.1 回归分析

在必修课程中，我们已经学习了最小二乘法，并会用它建立变量之间的线性回归方程.

例 始祖鸟是一种已经灭绝的动物. 在一次考古活动中，科学家发现了始祖鸟的化石标本共 6 个，其中 5 个同时保有股骨（一种腿骨）和肱骨（上臂的骨头）. 科学家检查了这 5 个标本股骨和肱骨的长度，得到表 1-1 中的数据：

表 1-1

编　号	1	2	3	4	5
股骨长度 x/cm	38	56	59	64	74
肱骨长度 y/cm	41	63	70	72	84

(1) 求出肱骨长度 y 对股骨长度 x 的线性回归方程；

(2) 还有 1 个化石标本不完整，它只有股骨，而肱骨不见了. 现测得股骨的长度为 50 cm，请预测它的肱骨长度.

分析理解 *

必修课程中,我们已经会用最小二乘法求变量之间的线性回归方程.假设样本点为(x_1,y_1),(x_2,y_2),…,(x_n,y_n),设线性回归方程为$y=a+bx$,我们的想法就是要求a,b,使这n个点与直线$y=a+bx$的“距离”平方之和最小,即使得

$Q(a,b)=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots+(y_n-a-bx_n)^2$

达到最小.(如图 1-1 所示)

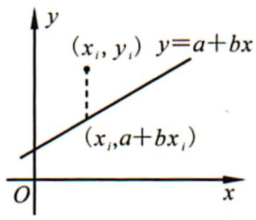


图 1-1

在统计上,我们使用$\bar{x}$表示一组数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均值,即$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,为了简化表示,我们引进求和符号,记作$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.同理有$\bar{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$.

这样就有:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}y_i-n\bar{y}=n\bar{y}-n\bar{y}=0.$$

为了简化上面的表示,我们引入以下记号:

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2,$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y},$$

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2.$$

从而

$$\begin{aligned}
&Q(a,b)\\
&=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots+(y_n-a-bx_n)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-\bar{y})+[\bar{y}-(a+b\bar{x})]-b(x_i-\bar{x})\}^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2+n[\bar{y}-(a+b\bar{x})]^2+b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2[\bar{y}-(a+\\
&\quad b\bar{x})]\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})-2b[\bar{y}-(a+\\
&\quad b\bar{x})]\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})
\end{aligned}$$

$$= l_{yy} + n[\overline{y} - (a + b\overline{x})]^2 + l_{xx}b^2 - 2l_{xy}b$$
$$= l_{yy} + n[\overline{y} - (a + b\overline{x})]^2 + l_{xx}\left(b - \frac{l_{xy}}{l_{xx}}\right)^2 - \frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}.$$

当 $\overline{y} - (a + b\overline{x}) = 0$ 且 $b - \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} = 0$ 时，$Q(a,b)$ 取最小值，此时

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{x}^2},$$
$$a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

解　(1) 从散点图 1-2 可以看出，表 1-1 中的两个变量呈现出近似的线性关系，我们可以建立肱骨长度 y 对股骨长度 x 的线性回归方程.

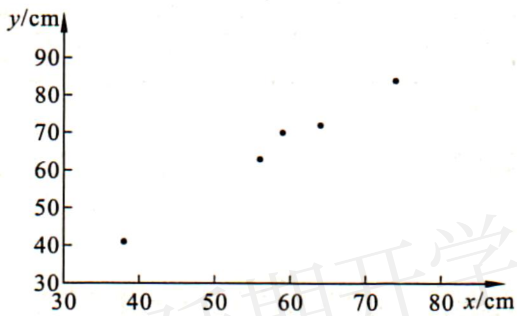


图 1-2

根据上面的分析，我们将数据列表如表 1-2 所示：

表 1-2

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	38	41	1 444	1 558
2	56	63	3 136	3 528
3	59	70	3 481	4 130
4	64	72	4 096	4 608
5	74	84	5 476	6 216
$\sum$	291	330	17 633	20 040

由此可得：$\overline{x} = \dfrac{291}{5} = 58.2$，$\overline{y} = \dfrac{330}{5} = 66$. 进而可以求得

$$b = \frac{20\ 040 - 5 \times 58.2 \times 66}{17\ 633 - 5 \times 58.2^2} \approx 1.197,$$

$$a = 66 - \frac{20\ 040 - 5 \times 58.2 \times 66}{17\ 633 - 5 \times 58.2^2} \times 58.2 \approx -3.660.$$

于是，y 对 x 的线性回归方程为

$$y=-3.660+1.197x.$$

回归直线的斜率 $b=1.197$ 的意思是，对于这次发现的始祖鸟的化石标本来说，股骨的长度每增加 1 cm，肱骨的长度平均增加 1.197 cm.

(2)由上面最小二乘法得到的线性回归方程可知，当股骨的长度为 50 cm 时，肱骨长度的估计值为

$$-3.660+1.197\times 50=56.19\approx 56(\text{cm}).$$

练 习

研究某灌溉渠道水的流速 y 和水深 x 之间的关系，测量得到的数据如下：

水深 x/m	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10
流速 y/(m/s)	1.70	1.79	1.88	1.95	2.03	2.10	2.16	2.21

(1) 求出流速 y 对水深 x 的线性回归方程；

(2) 预测水深为 1.85 m 时水的流速是多少.

1.2 相关系数

问题提出

我们知道，任何数据，不管它们的线性相关关系如何，都可以用最小二乘法求出线性回归方程. 为使建立的线性回归方程有意义，在利用最小二乘法求线性回归方程之前，我们先要对变量之间的线性相关关系作一个判断，通常可以作数据的散点图.

但在某些情况下，从散点图中不容易判断变量之间的线性关系，另外，当数据量较大时，画散点图比较麻烦，此时我们有没有其他方法来刻画变量之间的线性相关关系呢？

为了解决以上问题，我们可以通过计算两个随机变量间的线性相关系数 r，来判断它们之间线性相关程度的大小.

假设两个随机变量的数据分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，则变量间线性相关系数 r 的计算公式如下：

$$r=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}.$$

根据前面的分析，回归方程的系数 a，b 使误差达到最小.

误差可以表示为

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$=l_{yy}+n[\overline{y}-(a+b\overline{x})]^2+l_{xx}\left(b-\frac{l_{xy}}{l_{xx}}\right)^2-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}.$$

其最小值为

$$Q=l_{yy}-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{xx}}=l_{yy}\left(1-\frac{l_{xy}{}^2}{l_{yy}l_{xx}}\right)=l_{yy}(1-r^2).$$

由于 $Q\geqslant 0$，从而 $r^2\leqslant 1$. 故变量之间线性相关系数 r 的取值范围为$[-1,1]$. $|r|$值越大，误差 Q 越小，变量之间的线性相关程度越高；$|r|$值越接近 0，Q 越大，变量之间的线性相关程度越低. 当 $r>0$ 时，$l_{xy}>0$，从而 $b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}>0$，两个变量的值总体上呈现出同时增减的趋势，此时称两个变量正相关；当 $r<0$ 时，$b<0$，一个变量增加，另一个变量有减少的趋势，称两个变量负相关；当$r=0$时，称两个变量线性不相关.

思考交流

(1) 如何求出例题（见教科书第 3 页）中变量的线性相关系数 r？

对于例题，由表 1-2 可得：$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=17\ 633$，$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=22\ 790$，$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=20\ 040$；$\overline{x}=\frac{291}{5}=58.2$，$\overline{y}=\frac{330}{5}=66$. 进而可以求得

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$$

$$=\frac{20\ 040-5\times 58.2\times 66}{\sqrt{17\ 633-5\times 58.2^2}\times\sqrt{22\ 790-5\times 66^2}}\approx 0.994\ 1.$$

由此可以得出，肱骨长度 y 和股骨长度 x 有较强的线性相关程度.

(2) 请计算表 1-3 中变量的线性相关系数 r，通过计算，发现了什么？

表 1-3

x	-5	-4	-3	0	3	4	5
y	0	3	4	5	4	3	0

根据表 1-3 的数据，列表如表 1-4 所示：

表 1-4

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	-5	0	25	0	0
2	-4	3	16	9	-12
3	-3	4	9	16	-12
4	0	5	0	25	0
5	3	4	9	16	12
6	4	3	16	9	12
7	5	0	25	0	0
$\sum$	0	19	100	75	0

由此可得：$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=100$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=75$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=0$，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=2.71$. 进而可以求得

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}=\frac{0-7\times0\times2.71}{\sqrt{100-7\times0^2}\times\sqrt{75-7\times2.71^2}}=0.$$

从散点图 1-3 容易看出，表格中的数据都在同一个半圆上，此时建立线性回归方程是没有任何意义的，这与线性相关系数 r 的计算结果是一致的.

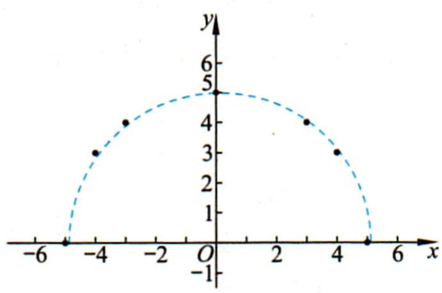


图 1-3

实际上，线性相关系数 r 越大，变量之间的线性关系就越强，用

直线拟合的效果就越好. 相关系数 r 的值究竟大到什么程度就认为线性关系较强,同学们可以参考有关的统计书籍进一步学习!

练　习

许多先进国家对驾驶员的培训,大多采用室内模拟教学和训练,而后再进行实地训练并考试,这种方法可以大大节约训练的费用. 问题是这种方法有效吗? 下表是 12 名学员的模拟驾驶成绩 x 与实际考试成绩 y 的记录(单位:分):

x	98	55	50	87	77	89
y	95	60	45	85	75	87
x	79	98	94	83	74	73
y	75	97	92	80	71	72

试问:两者的相关性如何? 请画出散点图,并求出 y 与 x 间的线性相关系数.

1.3　可线性化的回归分析

问题提出

表 1-5 按年份给出了 1981～2001 年我国出口贸易量(亿美元)的数据,你能根据此表预测 2008 年我国的出口贸易量吗?

表 1-5　1981～2001 年我国出口贸易量数据

年份	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
出口贸易量/亿美元	220.1	223.2	222.3	261.4	273.5	309.4	394.4
年份	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
出口贸易量/亿美元	475.2	525.4	620.9	719.1	849.4	917.4	1 210.1
年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
出口贸易量/亿美元	1 487.8	1 510.5	1 827.9	1 837.1	1 949.3	2 492.0	2 661.0

要预测 2008 年我国的出口贸易量,首先应根据表中的数据找到出口贸易量与年份之间的关系.

我们在必修阶段已经详细讨论了用直线方程 $y=a+bx$ 来描述两个变量的关系. 然而由图 1-4 可以看出,出口贸易量与年份之间呈

现出一种非线性的相关性. 如果用直线来描述，其结果如图 1-5 所示，显然效果不太好，若用它来作预测，误差将会很大. 于是，我们考虑用非线性函数来描述图 1-4 中数据的变化关系.

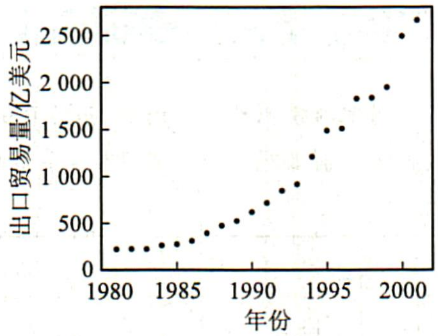


图 1-4

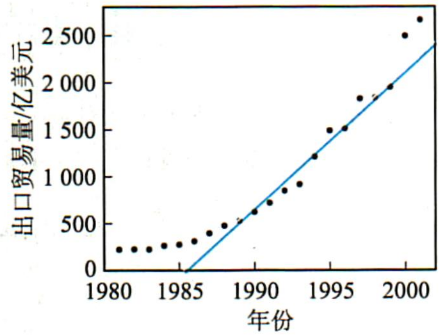


图 1-5

分析理解

从原始数据的散点图（图 1-4）可以看出，图像近似一个指数函数，我们可以考虑用函数

$$y=ae^{bx}$$

来拟合数据的变化关系，但如何进行拟合呢？我们可以先将其转化成线性函数，这就需要事先作个变换：对上式两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx.$$

若记

$$u=\ln y,\ c=\ln a,$$

则上式就变成了

$$u=c+bx,$$

即回到我们的线性回归方程，于是就可以用最小二乘法来进行计算. 为了方便建立回归方程，我们把年份 1981 记为 $x=1$，年份 1982 记为 $x=2$，……因此，我们实际上是对 $(x, u=\ln y)$ 作线性回归，其中 y 表示原始观测值. 将表 1-5 中的数据经过上述变换后即可得到表 1-6 中的数据.

表 1-6

x	1	2	3	4	5	6	7
u	5.394	5.408	5.404	5.566	5.611	5.735	5.977
x	8	9	10	11	12	13	14
u	6.164	6.264	6.431	6.578	6.745	6.822	7.098
x	15	16	17	18	19	20	21
u	7.305	7.320	7.511	7.516	7.575	7.821	7.886

我们对表 1-6 中的(x,u)求线性回归方程，可得：$c=5.056$，$b=0.138$，即$u=5.056+0.138x$（如图 1-6 所示）.

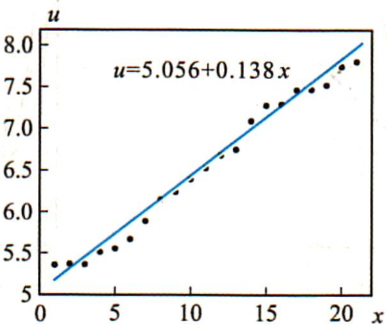


图 1-6

由此可得：$y=e^{u}=e^{5.056}\cdot e^{0.138x}$，在图 1-4 中画出函数曲线，如图 1-7 所示.

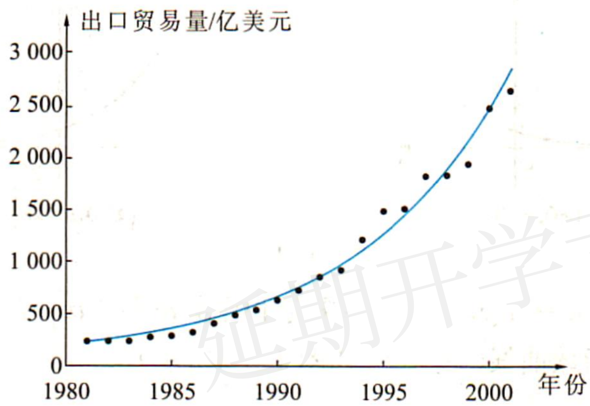


图 1-7

现在，你能预测出 2008 年我国的出口贸易量吗？

抽象概括

上面我们用非线性函数$y=ae^{bx}$对我国 1981～2001 年的出口贸易量进行了拟合. 其方法是通过变换先将其转化成线性函数，利用最小二乘法得到线性回归方程，再通过相应变换得到非线性回归方程.

然而上述函数仅是非线性的一种，还有其他经过变换也可以变成线性函数的非线性函数. 我们如何将一些常见的非线性回归模型转化为线性回归模型，从而得到相应的回归方程呢？

1. 幂函数曲线 $y=ax^b$(如图 1-8 所示).

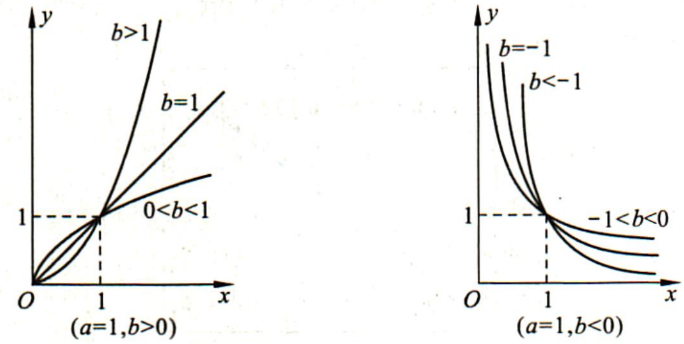


图 1-8

作变换 $u=\ln y, v=\ln x, c=\ln a$,得线性函数 $u=c+bv$.

2. 指数曲线 $y=ae^{bx}$(如图 1-9 所示).

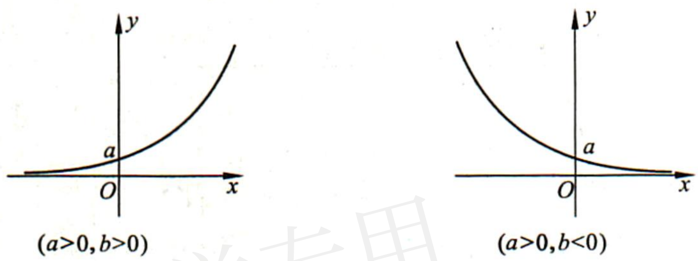


图 1-9

作变换 $u=\ln y, c=\ln a$,得线性函数 $u=c+bx$.

3. 倒指数曲线 $y=ae^{\frac{b}{x}}$(如图 1-10 所示).

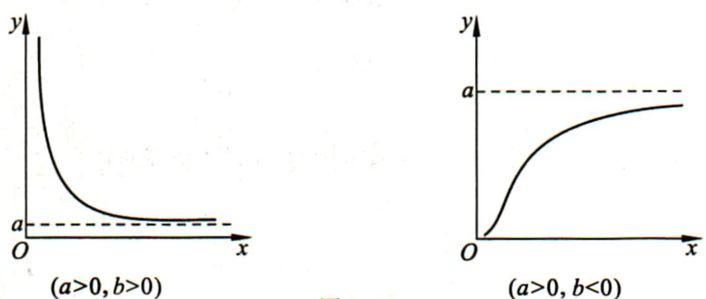


图 1-10

4. 对数曲线 $y=a+b\ln x$(如图 1-11 所示).

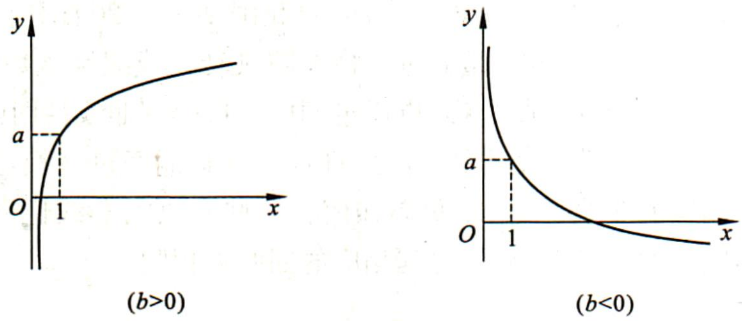


图 1-11

思考交流

对于上面的 3,4,你能通过适当的变换,分别将其转化成线性函数吗? 与同伴进行交流.

在具体问题中,我们首先应该作出原始数据(x,y)的散点图,从散点图中看出数据的大致规律,再根据这个规律选择适当的函数进行拟合.

练 习

某矿脉中设有 13 个相邻样本点,现人为地设定一个原点,测得各样本点与原点的距离 x,与该样本点处某种金属的含量 y 的数据如下:

x	2	3	4	5	7	8	10
y	106.42	108.20	109.58	109.50	110.00	109.93	110.49
x	11	14	15	15	18	19	
y	110.59	110.60	110.90	110.76	111.00	111.20	

请按 $y=a+\frac{b}{x}$ 建立 y 对 x 的回归方程,并预测当样本点对原点的距离 x 为 20 时该种金属的含量.

阅读材料

高尔顿与回归

高尔顿（Francis Galton，1822—1911）

“回归”这一名称是英国生物学家兼统计学家高尔顿在 1866 年左右提出来的. 人们大概都注意到，儿子的身高与其父亲的身高有关. 高尔顿以父亲的平均身高 x 为自变量，其成年儿子的平均身高 y 为因变量，研究了 1 074 对父亲及其成年儿子的平均身高，将所得(x,y)值作为点的坐标，把这些点标在直角坐标系中，发现二者的关系近乎一条直线. 总的趋势是当 x 增加时，y 也倾向于增加——这是意料中的结果. 有意思的是，高尔顿对所得数据作了深入一层的考察，从而发现了一个有趣的现象.

高尔顿计算出这 1 074 个 x 的平均值为 $\overline{x}=68$ in[1]，而 1 074 个 y 的平均值为 $\overline{y}=69$ in，子代身高平均增加了 1 in. 由此，人们会有这样的推测：平均身高为 72 in 的父亲，其儿子的平均身高应为 73 in；类似地，平均身高为 64 in 的父亲，其儿子的平均身高应为 65 in，等等. 但高尔顿实际观察的结果与此不符. 他发现：当父亲的平均身高为 72 in 时，其儿子的平均身高只有 71 in，不仅达不到预计的 73 in，反而比父亲的平均身高矮了. 反之，当父亲的身高为 64 in 时，观察数据显示其儿子的平均身高为 67 in，比预计 65 in 要高. 高尔顿对此的解释是：大自然有一种约束机制，使人类身高的分布保持某种稳定形态而不向两极分化. 这就是一种使身高“回归于中心”的作用. 例如，父亲身高平均为 72 in，比他们这一代平均身高 68 in 高出许多，“回归于中心”的力量把他们子代的身高拉回来一些：其平均值只有 71 in，反而比父亲平均身高矮，但仍超过子代全体平均值 69 in. 反之，当父亲平均身高只有 64 in——远低于他们这一代的平均值 68 in，而“回归于中心”的力量将其子代身高拉回去一些：其平均值达到 67 in，增长了 3 in，但仍低于子代全体平均值 69 in.

正是通过这个例子，高尔顿引入了“回归”这个词. 自高尔顿起，“回归”一词一直沿用至今，作为变量关系统计分析的称呼.

---

[1] in 表示英寸，1 in=2.54 cm.

习　题　1—1

1. 为研究鲈鱼身长与体重的关系，芬兰某渔业公司得出如下表所示的鲈鱼身长（单位：cm）与体重（单位：g）的记录：

身长 x/cm	30.0	31.2	31.1	33.5	34.0	34.7	34.5	35.0	35.1	36.2
体重 y/g	242.0	290.0	340.0	363.0	430.0	450.0	500.0	390.0	450.0	500.0
身长 x/cm	36.2	36.2	36.4	37.2	37.2	38.3	38.5	38.6	38.7	
体重 y/g	475.0	500.0	500.0	600.0	600.0	700.0	700.0	610.0	650.0	

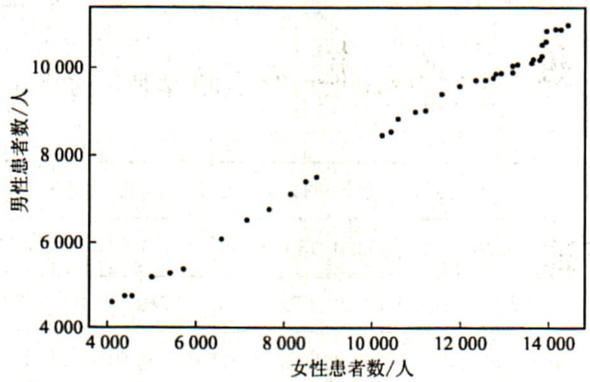
(1) 请画出散点图，并求鲈鱼身长与体重间的线性相关系数；

(2) 建立线性回归方程，并预测鲈鱼身长为 38 cm 时体重是多少.

2. 下表是德国 1955～1995 年男性与女性患肠癌的逐年病例数的记录. 从常识上看，男性与女性在同一国家，其生活饮食、环境有类似之处，两者患病的可能性也应有相关性. 然而也不是说同一家庭中丈夫得了肠癌，妻子也会得肠癌. 将表中的女性患病人数与对应的男性患病人数画在一张图上就是如图所示的样子. 从图中读者不难看出，随着女性患肠癌人数的增加，男性患者也在增加；但 1990 年和 1994 年两年女性患者人数几乎一样，而男性患者人数却相差很大.

1955～1995 年德国患肠癌的男女的人数

年份	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
女性	3 936	4 138	4 443	4 594	5 019	5 439	5 710	6 558	7 122
男性	4 356	4 623	4 769	4 769	5 193	5 260	5 390	6 087	6 563
年份	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
女性	7 641	8 125	8 459	8 719	10 220	10 444	10 588	10 995	11 228
男性	6 781	7 142	7 560	7 451	8 602	8 540	8 921	9 080	9 106
年份	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
女性	11 581	12 012	12 379	12 771	12 835	13 210	12 612	12 951	12 781
男性	9 475	9 680	10 159	9 966	10 292	10 303	9 816	9 989	9 818
年份	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
女性	12 837	13 315	13 209	13 684	13 626	13 865	13 821	14 186	13 965
男性	9 861	9 869	9 952	10 196	9 967	10 258	10 410	10 747	10 690
年份	1991	1992	1993	1994	1995				
女性	13 982	14 444	14 286	13 953	13 882				
男性	10 739	11 151	11 021	11 039	11 041				



（第 2 题）

请计算女性患者与男性患者人数的线性相关系数.

3. 一只红铃虫的产卵数 y 与温度 x 有关. 下表是产卵数与温度相对应的一组数据，试求 y 与 x 间的回归方程，并预测当温度为 37 ℃时红铃虫的产卵数.

温度 x/℃	21	23	25	27	29	32	35
产卵数 y/个	7	11	21	24	66	115	325

4. 在彩色显像中，根据以往的经验，知道染料光学密度 y 与析出银的光学密度 x 之间有如下函数关系：$y=ae^{\frac{b}{x}}(b<0)$. 我们通过 11 次试验得到如下数据：

x	0.05	0.06	0.07	0.10	0.14	0.20	0.25	0.31	0.38	0.43	0.47
y	0.10	0.14	0.23	0.37	0.59	0.79	1.00	1.12	1.19	1.25	1.29

试通过拟合，确定函数的参数，并预测当析出银的光学密度为 0.50 时形成染料的光学密度.

§2 独立性检验

2.1 条件概率与独立事件

问题提出

100 件产品中有 93 件产品的长度合格，90 件产品的质量合格，85 件产品的长度、质量都合格．现在，任取一件产品，若已知它的质量合格，那么它的长度合格的概率是多少？

分析理解

如果我们令 A=｛产品的长度合格｝，B=｛产品的质量合格｝，那么 $A\cap B$=｛产品的长度、质量都合格｝．

现在，任取一件产品，已知它的质量合格（即 B 发生），则它的长度合格（即 A 发生）的概率为 $\frac{85}{90}$．

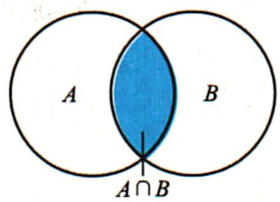


图 1-12

那么，此概率 $\left(\frac{85}{90}\right)$ 与事件 A 及 B 发生的概率有什么关系呢？

由题目可知：

$$P(A)=\frac{93}{100},\ P(B)=\frac{90}{100},\ P(A\cap B)=\frac{85}{100},$$

因此，在事件 B 发生的前提下，事件 A 发生的概率为

$$\frac{85}{90}=\frac{\frac{85}{100}}{\frac{90}{100}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

抽象概括

实际上，上面的例子是求已知 B 发生的条件下（即质量合格），A 发生（即长度合格）的概率，称为 **B 发生时 A 发生的条件概率**，记为

$P(A|B)$. 从上面的例子中可以看出，当 $P(B)>0$ 时，我们有

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad（其中，A\cap B 也可以记成 AB）.$$

类似地，当 $P(A)>0$ 时，**A 发生时 B 发生的条件概率为**

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

问题提出

从一副扑克牌（去掉大、小王，共 52 张）中随机取出 1 张，用 A 表示取出的牌是“Q”，用 B 表示取出的牌是红桃. 是否可以利用 $P(B)$ 及 $P(AB)$ 计算 $P(A|B)$？

分析理解

由于 52 张牌中有 13 张红桃，则 B 发生（即取出的牌是红桃）的概率为

$$P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}.$$

而在 52 张牌中既是红桃又是“Q”的牌只有 1 张，故

$$P(AB)=\frac{1}{52}.$$

根据条件概率的计算公式，有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{13}.$$

事实上，$P(A|B)$ 表示，已知取出的牌是红桃时它为“Q”的概率.

另外，由于 52 张牌中共有 4 张“Q”，因而 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

不难发现

$$P(A|B)=P(A).$$

容易理解，取出的牌是红桃不影响取出的牌是“Q”的概率.

抽象概括

对两个事件 A，B，如果 $P(A|B)=P(A)$，则意味着事件 B 发生不影响事件 A 的概率 . 设 $P(B)>0$，根据条件概率的计算公式，$P(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，我们能得到 $P(AB)=P(A)P(B)$.

一般地，对两个事件 A，B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 **A，B 相互独立**. 可以证明，如果 A，B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

思考交流

在实际应用中，我们常常根据实际问题的条件，利用直觉来判断事件间的“相互独立性”. 例如，掷硬币时，{第一次掷出正面}与{第二次掷出正面}是相互独立的；{甲厂的产品是次品}与{乙厂的产品是次品}是相互独立的.

请列举出日常生活中的一些独立事件的例子.

例 1　通过调查发现，某班学生患近视的概率为 0.4. 现随机抽取该班级的 2 名同学进行体检，求他们都近视的概率.

解　如果用 $A_i(i=1,2)$ 表示抽取到第 i 名同学患近视，则 $P(A_1)=P(A_2)=0.4$. 可以认为 2 名同学是否近视是相互独立的，因此，

$$P(\text{两名同学都近视})=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$$
$$=0.4\times0.4=0.16.$$

前面我们讨论了两个事件的相互独立性. 事实上，对多个事件我们也可以讨论它们的相互独立性. 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

思考交流

有人以为，把一枚均匀硬币掷 4 次，事件“第 1 次出现正面，第 2 次出现反面，第 3 次出现正面，第 4 次出现反面”的发生是正常的. 而事件“4 次都是正面”的发生就不太正常，好像前者发生的概率大. 你同意这种观点吗？

练　习

四个射手独立地进行射击，设每人中靶的概率都是 0.9. 试求下列各事件的概率：

(1) 4 人都中靶；

(2) 4 人都没中靶.

阅读材料

概率与法庭

下面是美国历史上一个很有名的案例，控辩双方都使用了概率论的知识.

1964 年 6 月 18 日上午，年老的 Brooks 太太在购物后沿着洛杉矶市郊区的一条小巷回家. 一名袭击者从背后将她推倒，抢了她的钱包. Brooks 太太瞥到逃跑的袭击者是一名穿着黑色的衣服、梳着马尾辫的金发年轻女子.

正在小巷一端自家屋前浇灌草坪的 Bass 被叫喊声所吸引，她看到一名女子跑出小巷，进入一辆部分是黄色的小汽车，车由一名留着络腮胡子的黑人驾驶逃离了现场.

按照这些描述，警察很快便逮捕了一对年轻夫妇：Malcolm Collins 和他的妻子 Janet Collins. Malcolm 是黑人，虽然脸刮得很干净，但有证据表明他最近留过络腮胡子. Janet 是金发，并且常常将她的头发梳成马尾辫. 他们还驾驶一辆部分是黄色的林肯车. 原告请了一位数学教授作为专家证人，根据目击者的描述这位教授提供了一份犯罪嫌疑人的特征，而且保守地估计了各个特征的概率(如下表所示).

特征	概率
金发女子	$\frac{1}{3}$
梳马尾辫的女子	$\frac{1}{10}$
留小胡子的男子	$\frac{1}{4}$
留络腮胡子的男子	$\frac{1}{10}$
部分黄色的小汽车	$\frac{1}{10}$
种族混合同车	$\frac{1}{1\,000}$

原告据此提出随机地挑出具有这些特征的一对夫妇的概率是上述概率的乘积，也就是$\frac{1}{12\,000\,000}$，这是一个很小的概率，不足千万分之一，因此，被告是有罪的. 陪审团同意了这一说法并且宣布对 Collins 夫妇犯有二级抢劫罪的裁决.

在本案随后的上诉中，辩护律师辩护如下：首先，承认以下事实，假设在洛杉矶地区有 5 000 000 对夫妇，随机地挑选出来适合目击者描述的一对夫妇的概率是$\frac{1}{12\,000\,000}$，这个概率是非常小的. 但是，如果该地区有一对这样的夫妇，就可能有

许多对这样的夫妇.计算表明,“在有一对这样夫妇的条件下,有多对这样的夫妇”这个随机事件的概率不低.因此,无法断言 Collins 夫妇是罪犯.

加利福尼亚州最高法院最终推翻了本案最初的有罪裁决.

由此可以看出,概率论知识对于法庭裁决起着重要的参考作用.

2.2 独立性检验

问题提出

我们知道,“吸烟具有危害性”,为什么人们都认可这一观点呢?它的根据又是什么呢?

为了调查吸烟与患肺癌是否有联系,某机构随机调查了 6 578 人,得到表 1-7 中的数据(单位:人):

表 1-7

患肺癌情况 / 吸烟情况	患肺癌	未患肺癌
吸烟	56	1 932
不吸烟	23	4 567

上面是一张 2 行 2 列的表,在统计中称为 2×2 列联表.在这个问题中,考虑两个变量:是否吸烟,是否患肺癌;每个变量取两个值:吸烟、不吸烟和患肺癌、未患肺癌.

表中数据是根据调查得到的结果,如:吸烟且患肺癌的人数是 56,不吸烟但患肺癌的人数是 23,等等.我们的问题是:如何根据表格中的数据来判断吸烟与患肺癌是否独立,这一问题称为 2×2 列联表的独立性检验.

分析理解

为了讨论的方便,我们引入以下记号:

变量 A:A_1=吸烟,　　$A_2=\overline{A_1}$=不吸烟;

变量 B:B_1=患肺癌,　　$B_2=\overline{B_1}$=未患肺癌.

根据表 1-7,我们可以计算出吸烟与不吸烟的总人数分别是

1 988和 4 590，患肺癌和未患肺癌的总人数分别是 79 和 6 499，调查的总人数为 6 578. 得到表 1-8(单位：人)：

表 1-8

吸烟情况 \ 患肺癌情况	患肺癌 B_1	未患肺癌 B_2	总计
吸烟 A_1	56	1 932	1 988
不吸烟 A_2	23	4 567	4 590
总计	79	6 499	6 578

我们假设吸烟与患肺癌是独立的，即吸烟不影响患肺癌. 根据直观的经验，我们把吸烟人群中患肺癌的人所占百分比，与不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比作比较. 如果吸烟不影响患肺癌，就意味着，无论吸烟与否，患肺癌的人所占的百分比应该是基本一样的. 就此题而言：

吸烟人群中患肺癌的人所占百分比是：$\frac{56}{1\ 988}\approx 2.82\%$；

不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比是：$\frac{23}{4\ 590}\approx 0.50\%$.

吸烟人群中患肺癌的人所占百分比，与不吸烟人群中患肺癌的人所占百分比不等，且相差较大. 由此我们可以推断，开始的假设是不成立的. 也就是说，患肺癌与吸烟是有关系的. 由吸烟人群中患肺癌的人所占的百分比较多，我们认为吸烟会对肺癌的发病率造成一定的影响.

另一方面，如果吸烟与患肺癌是独立的，那么有 $P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)$，$P(A_1B_2)=P(A_1)P(B_2)$，$P(A_2B_1)=P(A_2)P(B_1)$，$P(A_2B_2)=P(A_2)P(B_2)$成立.

我们先讨论 $P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)$的情况. 我们可以列出频率表，并用既吸烟又患肺癌的人的频率来估计 $P(A_1B_1)$，用吸烟的人的频率来估计 $P(A_1)$，用患肺癌的人的频率来估计 $P(B_1)$，得到表 1-9：

表 1-9

吸烟情况 \ 患肺癌情况	患肺癌 B_1	未患肺癌 B_2	总计
吸烟 A_1	$\frac{56}{6\ 578}$	$\frac{1\ 932}{6\ 578}$	$\frac{1\ 988}{6\ 578}$
不吸烟 A_2	$\frac{23}{6\ 578}$	$\frac{4\ 567}{6\ 578}$	$\frac{4\ 590}{6\ 578}$
总计	$\frac{79}{6\ 578}$	$\frac{6\ 499}{6\ 578}$	1

既吸烟又患肺癌的人的频率是：$\frac{56}{6\ 578}\approx 0.85\%$，

吸烟的人的频率是：$\frac{1\,988}{6\,578}\approx 30.22\%$，

患肺癌的人的频率是：$\frac{79}{6\,578}\approx 1.20\%$.

显然，$30.22\%\times 1.20\%=0.36\%\neq 0.85\%$，由于根据表中数据计算出的值是频率值，它只是概率的估计值，因此即使变量之间独立，这两个数一般也不一定恰好相等. 但是当两边相差很大时，就可以得出：患肺癌与吸烟有关.

抽象概括

设 A，B 为两个变量，每一个变量都可以取两个值，

$$\text{变量 } A: A_1, A_2=\overline{A_1};$$

$$\text{变量 } B: B_1, B_2=\overline{B_1}.$$

通过观察得到表 1-10 所示数据：

表 1-10

A \ B	B_1	B_2	总计
A_1	a	b	$a+b$
A_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$n=a+b+c+d$

其中，a 表示变量 A 取 A_1，且变量 B 取 B_1 时的数据；b 表示变量 A 取 A_1，且变量 B 取 B_2 时的数据；c 表示变量 A 取 A_2，且变量 B 取 B_1 时的数据；d 表示变量 A 取 A_2，且变量 B 取 B_2 时的数据.

设 $n=a+b+c+d$，用 $\frac{a}{n}$ 估计 $P(A_1B_1)$，$\frac{a+b}{n}$ 估计 $P(A_1)$，$\frac{a+c}{n}$ 估计 $P(B_1)$.

若有式子

$$\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n},$$

则可以认为 A_1 与 B_1 独立.

同理，若 $\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$，则可以认为 A_1 与 B_2 独立；若 $\frac{c}{n}=\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$，则可以认为 A_2 与 B_1 独立；若 $\frac{d}{n}=\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}$，则可以认为 A_2 与 B_2 独立.

但是，在 $\frac{a}{n}=\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}$ 中，由于 $\frac{a}{n}$，$\frac{a+b}{n}$，$\frac{a+c}{n}$ 表示的是频率，不同于概率. 即使变量之间独立，式子两边也不一定恰好相等. 但是当

两边相差很大时，变量之间就不独立.

练 习

为了调查吸烟是否对患慢性支气管炎有影响，某机构随机调查了 5 896 人，得到如下的数据(单位：人)：

患慢性支气管炎情况 / 吸烟情况	患慢性支气管炎	未患慢性支气管炎
吸烟	54	1 896
不吸烟	28	3 918

请根据上面的数据分析吸烟是否对患慢性支气管炎有影响.

2.3 独立性检验的基本思想

在上一节研究吸烟是否对患肺癌有影响的问题中，我们表明了当$\left|\frac{a}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right|$大时，变量之间不独立．同理，我们也知道当$\left|\frac{b}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right|$，$\left|\frac{c}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right|$，$\left|\frac{d}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right|$大时，变量之间也不独立．但这些量究竟要多大才能说明变量之间不独立呢？我们能不能选择一个量，用它的大小来检验变量之间是否独立呢？

统计学家选取以下统计量，用它的大小来检验变量之间是否独立：

$$\chi^2=n\left[\frac{\left(\frac{a}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(\frac{b}{n}-\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{a+b}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}+\frac{\left(\frac{c}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}\right)^2}{\frac{c+d}{n}\cdot\frac{a+c}{n}}+\frac{\left(\frac{d}{n}-\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}\right)^2}{\frac{c+d}{n}\cdot\frac{b+d}{n}}\right].$$

当 χ^2 较大时，说明变量之间不独立. 上面的式子看起来很复杂，但是经过化简可以得到：

$$\boxed{\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.} \quad (*)$$

当数据量较大时，在统计中，用以下结果对变量的独立性进行判断.

(1) 当 $\chi^2\leqslant 2.706$ 时，没有充分的证据判定变量 A，B 有关联，可

以认为变量 A,B 是没有关联的；

(2) 当 $\chi^2>2.706$ 时，有 90%的把握判定变量 A,B 有关联；

(3) 当 $\chi^2>3.841$ 时，有 95%的把握判定变量 A,B 有关联；

(4) 当 $\chi^2>6.635$ 时，有 99%的把握判定变量 A,B 有关联.

对于吸烟与患肺癌的问题，我们计算

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$
$$=\frac{6\ 578\times(56\times4\ 567-1\ 932\times23)^2}{1\ 988\times4\ 590\times79\times6\ 499}\approx62.698.$$

因为 $62.698>6.635$，所以有 99%以上的把握认为吸烟与患肺癌是有关的.

练 习

为了了解高中生是否喜欢参加体育锻炼与性别之间的关系，调查者随机调查了 500 名高中生的情况，调查结果如下(单位：人)：

参加体育锻炼情况 / 性别	喜欢参加体育锻炼	不喜欢参加体育锻炼
男	197	48
女	135	120

试问：高中生是否喜欢参加体育锻炼与性别之间有关系吗？

2.4 独立性检验的应用

例 2 某组织对男女青年是否喜爱古典音乐进行了一个调查，调查者随机调查了 146 名青年，表 1-11 给出了调查的结果(单位：人)：

表 1-11

喜爱古典音乐情况 / 青年	喜爱	不喜爱
男青年	46	30
女青年	20	50

试问：男女青年喜爱古典音乐的程度是否有差异？

解 问题是判断喜爱古典音乐是否与青年的性别有关. 根据表 1-11 中的数据计算得到表 1-12(单位：人)：

表 1-12

青年 \ 喜爱古典音乐情况	喜爱	不喜爱	总计
男青年	46	30	76
女青年	20	50	70
总计	66	80	$n=146$

由(＊)计算得：$\chi^2=\dfrac{146\times(46\times50-30\times20)^2}{76\times70\times66\times80}\approx15.021$.

因为 $15.021>6.635$，所以有 99% 以上的把握认为是否喜爱古典音乐与青年的性别有关.

例 3 容易生气的人更有可能患心脏病吗？某机构随机调查了 2 796人，表 1-13 给出了调查的结果(单位：人)：

表 1-13

是否易怒 \ 患心脏病情况	患心脏病	未患心脏病
易怒	27	606
不易怒	53	2 110

试问：容易生气的人是否更有可能患心脏病?

解 问题是要判断患心脏病是否与易怒有关. 根据表 1-13 中的数据计算得到表 1-14(单位：人)：

表 1-14

是否易怒 \ 患心脏病情况	患心脏病	未患心脏病	总计
易怒	27	606	633
不易怒	53	2 110	2 163
总计	80	2 716	$n=2\ 796$

由(＊)计算得：$\chi^2=\dfrac{2\ 796\times(27\times2\ 110-606\times53)^2}{633\times2\ 163\times80\times2\ 716}\approx5.805$.

因为 $5.805>3.841$，所以有 95% 以上的把握认为患心脏病与易怒有关.

例 4 生物学上对于人类头发的颜色与眼睛虹膜的颜色是否有关进行了调研，以下是一次调查结果，调查人数共 212 人. 调查记录如表 1-15(单位：人)：

表 1-15

头发颜色＼眼睛虹膜颜色	蓝色	棕色
红/金黄色	156	12
黑色	20	24

试问：头发的颜色与眼睛虹膜的颜色有关吗？

解　问题是要判断头发的颜色是否与眼睛虹膜的颜色有关．根据表 1-15 中的数据计算得到表 1-16(单位：人)：

表 1-16

头发颜色＼眼睛虹膜颜色	蓝色	棕色	总计
红/金黄色	156	12	168
黑色	20	24	44
总计	176	36	$n=212$

由(＊)计算得：$\chi^2=\dfrac{212\times(156\times24-12\times20)^2}{168\times44\times176\times36}\approx55.576$.

因为 $55.576>6.635$，所以有 99%以上的把握认为头发的颜色与眼睛虹膜的颜色有关．

练　习

某县有甲、乙两所规范化学校，教育主管部门为了检验两校初中三年级学生的数学水平，从甲、乙两校的初三学生中，分别随机抽取 55 人和 45 人(各占全校初三学生总数的 15%)，进行统一试题的数学测验．测验结果如下表所示(单位：人)：

学校＼及格情况	及格	不及格
甲校	47	8
乙校	30	15

试问：甲、乙两校初三学生的数学成绩的差异是否显著？

习 题 1—2

1. 在一个坛子中装有 16 个除颜色外完全相同的玻璃球，其中有 2 个红的，3 个蓝的，5 个绿的，6 个黄的. 从中任取一球，放回后，再取一球，求第一次取出红球且第二次取出黄球的概率是多少.
2. 请用 χ^2 检验解决 § 2.2 练习(见教科书第 24 页)中的问题.
3. 为了考查研制出的新药对预防某种疾病的效果，科学家进行了试验，得到如下结果(单位：人)：

服用新药情况 \ 患病情况	患病	未患病
服用新药	12	58
未服用新药	22	28

问：新药对预防此种疾病是否有效？

4. 下面是对智商在 40～69 之间的人的出生季节所作的一个调查，结果如下(单位：人)：

出生季节 \ 智商	40～54	55～69
夏和秋	30	48
春和冬	40	30

问：智商在 40～69 之间的人其智商与出生季节有关吗？

5. 为了了解高中生数学考试成绩是否和吃早点有关，调查者随机调查了 50 名高中生的情况，调查结果如下(单位：人)：

吃早点情况 \ 考试成绩	及格	不及格
吃早点	17	10
不吃早点	15	8

试问：高中生的数学考试成绩是否和吃早点有关？

6. 下表是老一代和年青一代对某影片的评价的调查，所得数据如表所示(单位：人)：

年代 \ 评价	评价高	评价一般
老一代	45	60
年青一代	36	51

试问：老一代和年青一代对影片的评价是否一致？

7. 选择生活中的一个大家比较关心的问题(如男女同学对数学课的喜欢程度)，利用独立性检验进行分析，并写出一份简明的分析报告.

统计活动

学习成绩与视力之间的关系

问题提出

在学习生活中，我们或许都有过这样的疑问：学习成绩和视力之间是否存在一定的线性相关关系？请同学们对这个问题设计一个调查方案并开展统计活动.

实践活动

我们可以按照如下的步骤来进行这个统计活动.

1. 确定调查对象

全班所有同学.

2. 收集数据

每位同学分别记录近期自己左右眼的视力情况，求出平均值，并记录上次期末考试的总分，得到下表：

姓名	左眼视力	右眼视力	左右眼视力平均值	上次期末考试总分

3. 整理数据

(1) 先将本小组成员收集到的数据按下表汇总：

第____小组

	左眼视力	右眼视力	左右眼视力平均值	上次期末考试总分
小组成员 1				
小组成员 2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
小组成员 n				

(2) 再把班上所有同学的数据按照小组进行汇总，得到下页表：

	左眼视力	右眼视力	左右眼视力平均值	上次期末考试总分
第 1 小组				
	⋮	⋮	⋮	⋮
第 2 小组				
	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 m 小组				
	⋮	⋮	⋮	⋮

4. 分析数据

(1) 画出左右眼视力平均值和上次期末考试总分的散点图，你能从散点图中大致判断出视力与学习成绩之间的线性相关关系吗？

(2) 计算视力与学习成绩之间的线性相关系数 r，并与散点图的结果进行比较.

5. 作出推断

从上面的数据分析，你能得到什么结论？它与你在从事这个统计活动之前的猜想一致吗？

思考交流

1. 在这个统计活动的过程中，调查的问题和目的分别是什么？你经历了哪些主要的步骤？

2. 根据调查的问题和目的，应当如何确定调查的对象？

3. 你认为如何收集数据比较方便？

4. 你将如何对收集到的数据快捷并且正确地进行整理？

5. 从统计数据中，要想得到一个比较好的结论，应当对数据做哪些分析？

附：

北京市延庆一中高二(2)班学生视力情况及中考成绩统计表

姓名	左眼视力	右眼视力	中考成绩
奚晶晶	4.0	4.0	596
李　佳	4.5	4.0	576
刘　莹	4.5	4.3	614
赵黎明	4.3	4.2	599
智　华	4.1	4.1	603
时俊明	4.0	4.0	597
张鹏冀	4.4	4.4	614
赵婀娜	4.3	4.3	584
高艳方	4.3	4.4	565
张　蕾	4.1	4.6	588
郎　琪	5.0	4.1	600
张博辉	4.3	4.3	592
李　雪	4.1	4.1	594
王立辉	4.3	4.1	596
张志锋	4.2	4.5	559
卢艳芬	4.6	4.5	590
梁　策	4.8	4.3	576
谢志鹏	4.1	4.1	590
陈　颖	4.4	4.6	605
周　玮	4.5	4.1	600
吴雅婧	5.1	5.0	602
张立东	5.0	4.9	582
高慧娟	4.5	4.5	573
李　妮	5.1	5.1	562
刘　昕	5.0	5.0	574
刘贵宾	5.1	5.0	587

续表

姓名	左眼视力	右眼视力	中考成绩
郑晓宇	5.2	5.2	604
蔡淑珍	4.0	4.1	563
张小文	4.4	4.6	598
张文龙	5.1	5.2	573
李　岩	5.1	5.1	589
赵文龙	5.1	5.0	561
吕　楠	5.2	5.2	582
乔立国	5.1	5.0	601
鲁俊杰	5.0	4.7	567
常洞赜	4.3	4.3	614
高宇峰	5.2	5.2	588

（数据来源：张鹏翼. 视力情况统计分析. 见：中学生研究性学习案例——中学数学建模论文选编(一). 长春：东北师范大学出版社，2003）

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 通过对典型案例的探究，进一步了解回归分析的基本思想、方法及初步应用.

2. 通过对典型案例的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用.

二、复习本章知识，就以下问题思考、归纳、总结，写出复习小结报告

1. 你可以通过什么方法来刻画变量之间的线性相关程度？

2. 当两个变量之间呈现出非线性的相关性时，你如何得到它们之间的回归方程？

3. 通过具体实例说明独立性检验的基本思想和主要过程.

4. χ^2 统计量在 2×2 列联表的独立性检验中起了什么作用？

复习题一

1. 家族中兄弟或姐妹的智商是否有相关性一直是教育工作者、社会学家、生理学家关注的一个问题，日本学者 Ogasawara 在 1989 年曾对 45 对兄弟的智商进行测试，得出下表的结果. 其中，x 表示兄，y 表示弟.

x	78	77	112	114	104	99	92	80	113	96	100	97	82	43	77
y	114	68	116	123	107	81	76	90	91	90	102	104	92	43	100
x	99	97	80	84	89	100	111	75	94	109	99	99	100	56	56
y	95	106	99	82	77	81	111	80	98	90	100	103	103	67	67
x	67	46	106	99	102	127	113	91	91	67	71	66	78	95	38
y	82	56	117	98	89	113	112	103	93	67	66	63	76	86	64

(1) 请画出散点图，并求 y 与 x 间的线性相关系数；

(2) 建立 y 关于 x 的线性回归方程，并预测当 x 为 110 时 y 的值.

2. 炼钢厂所用的盛钢水的钢包，由于钢水对耐火材料的侵蚀，容积会不断增大. 我们希望找出使用次数 x 与增大的容积 y 之间的关系，试验数据见下表.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	
y	10.49	10.59	10.60	10.80	10.60	10.90	10.76	

试求 y 关于 x 的回归方程，并预测当使用次数为 20 时增大的容积量.

3. 妇女绝育手术每 4 000 例中会有 1 例失败，男子绝育手术的成功率为99.9%. 在双方都做了绝育手术的夫妇中，随机抽取一对夫妇，求他们仍怀上了孩子的概率.

4. 为了了解对生活满意程度与婚姻状况的关系，调查者随机对 150 人进行了抽查，结果如下(单位：人)：

生活满意程度 / 婚姻状况	满意	不满意
已婚	82	38
丧偶	11	19

问：对生活满意程度是否与婚姻状况有关?

5. 一个调查机构向某大学的毕业生发放调查表，下面是回收情况(单位：人)：

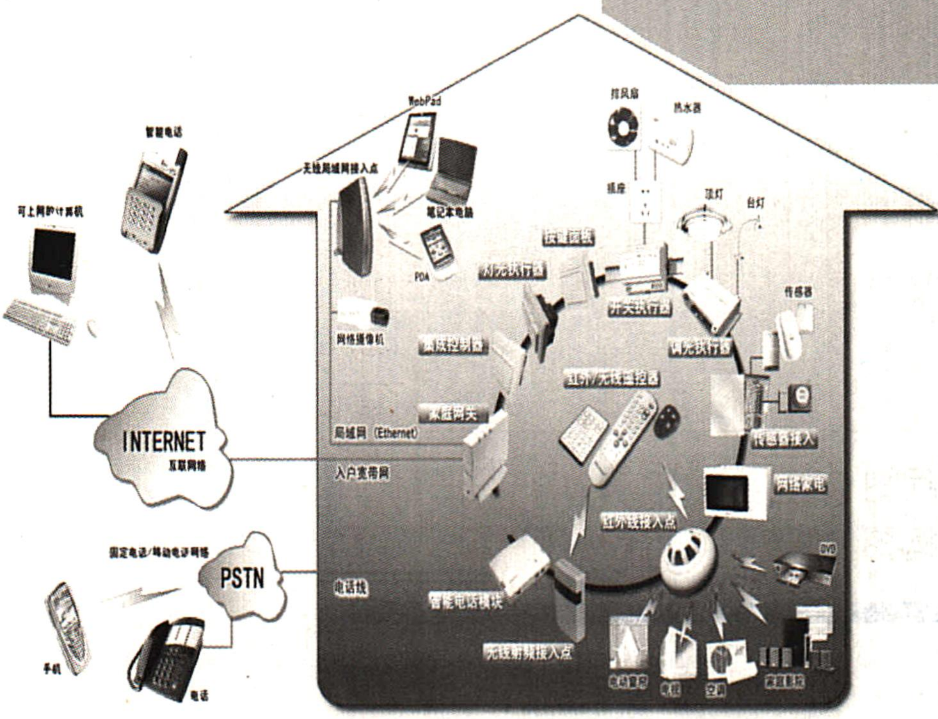
寄回情况 / 学位	寄回	未寄回
学士	78	11
博士和硕士	61	13

问：调查表的寄回与否与学位高低有关吗?

第二章 框图

框图是表示一个系统各部分和各环节之间关系的图示，它的作用在于能够清晰地表达比较复杂的系统各部分之间的关系. 框图已经广泛应用于算法的研究、计算机程序的设计、工序流程的表述、设计方案的比较等方面，也是表示数学计算与证明过程中主要逻辑步骤的工具，并将成为日常生活和各门学科中进行交流的一种常用表达方式.

本章将引导学生学习阅读生活中的各种框图，并学习一些简单的绘制方法.



§1 流 程 图

我们可以使用流程图表示各种工作程序，例如办税流程图，图书出版流程图，房屋买卖流程图，国家公务员录用流程图，学位申请流程图，等等. 图 2-1 给出了一个某大学网络学院的网上学习流程图.

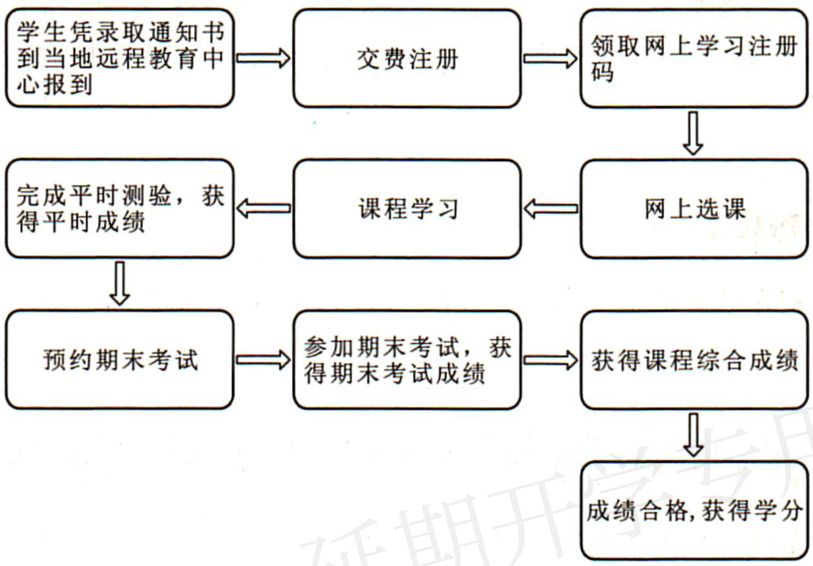


图 2-1

只要学生按照图 2-1 中箭头所指的方向，依次完成每个要求，就能够修完课程，获得学分. 事实上，流程图已经成为我们表述工作方式、工艺流程的一种常用手段. 它的特点是直观、清楚.

例 1　阅读下列乌龙茶的制作工艺步骤，并绘制其工艺流程图.

首先，通过萎凋散发部分水分，提高叶片韧性，便于后续工序进行.

做青是乌龙茶制作的重要工序. 经过做青，叶片边缘细胞受到破坏，发生轻度氧化，呈现红色. 叶片中央部分，叶色由暗绿转变为黄绿，即所谓的“绿叶红镶边”.

炒青是承上启下的转折工序，主要是抑制鲜叶中的酶的活性，控制氧化进程，防止叶子继续变红，固定做青形成的品质.

揉捻是塑造外形的一道工序. 通过外力作用使叶片揉破变轻，卷转成条，体积缩小，且便于冲泡.

干燥可抑制酶性氧化，蒸发水分和软化叶片，并起热化作用，消除苦涩味，使滋味醇厚.

解 第一步：确定工序.

乌龙茶的制作工序概括起来可分为：萎凋、做青、炒青、揉捻、干燥.

第二步：确定这些工序的先后顺序.

如果用序号来表示工序的步骤，各工序的顺序如下：

(1) 萎凋； (2) 做青； (3) 炒青； (4) 揉捻； (5) 干燥.

第三步：用流程图表示.

我们可以画出如图 2-2 所示的工艺流程图.

图 2-2

我们注意到，在乌龙茶的制作工艺中，每道工序有着严格的先后顺序. 但是，在工程中，为了提高工作效率，很多工作是可以同时进行的.

思考交流

根据所在学校的实际情况，用框图形式表示新生入学报到的程序.

练 习 1

给出组装自行车的工艺示意图，并画出其工艺流程图.

例 2 “非典”期间，由于病毒的传播速度非常快，各单位需要对出现症状的员工进行准确及时地处理和救治，以免病毒在更大的范围内扩散. 北京市海淀区某大学针对这种情况，制定了以下相关措施：

1. 有人出现发烧或者其他不适症状，首先送到校医院发烧门诊初诊，然后到专业医院发烧门诊首诊.

2. 如果为一般原因发烧，则学校医院留院观察.

3. 如果是“非典”疑似，则首诊医院留院观察.

4. 如果确定为“非典”，则送定点医院专业治疗，同时还要进行下面几项工作：

(1) 信息报送.

① 海淀区疾病控制中心；

② 教育部；

③ 北京市教工委.

(2) 集中观察.

① 对出现症状前的密切接触者电话跟踪；

② 对出现症状后的密切接触者集中隔离观察，预防性观察 14 天后，继续进行电话跟踪.

(3) 消毒措施.

对非典病人所在的工作、学习和生活场所进行专业消毒.

请根据上面所制定的措施，画出其流程图.

解 第一步：确定主要步骤和顺序.

在上述第一个措施中，有 3 个步骤是按顺序进行的，这些是流程图的主线. 第 4 个步骤是进行判断，诊断结果有多种可能，我们把这一步放在菱形框里面(如图 2-3 所示).

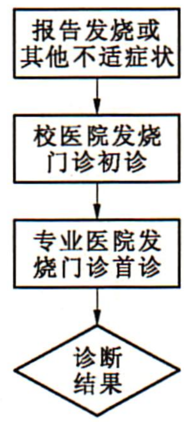


图 2-3

第二步：补足其他步骤.

需要补足第 4 个步骤后面的各种处理. 因为有 3 种可能出现的结果. 我们把 3 种不同的结果放在菱形框的其余 3 个顶点指向的处理框中，并加上注释.

流程图如图 2-4 所示.

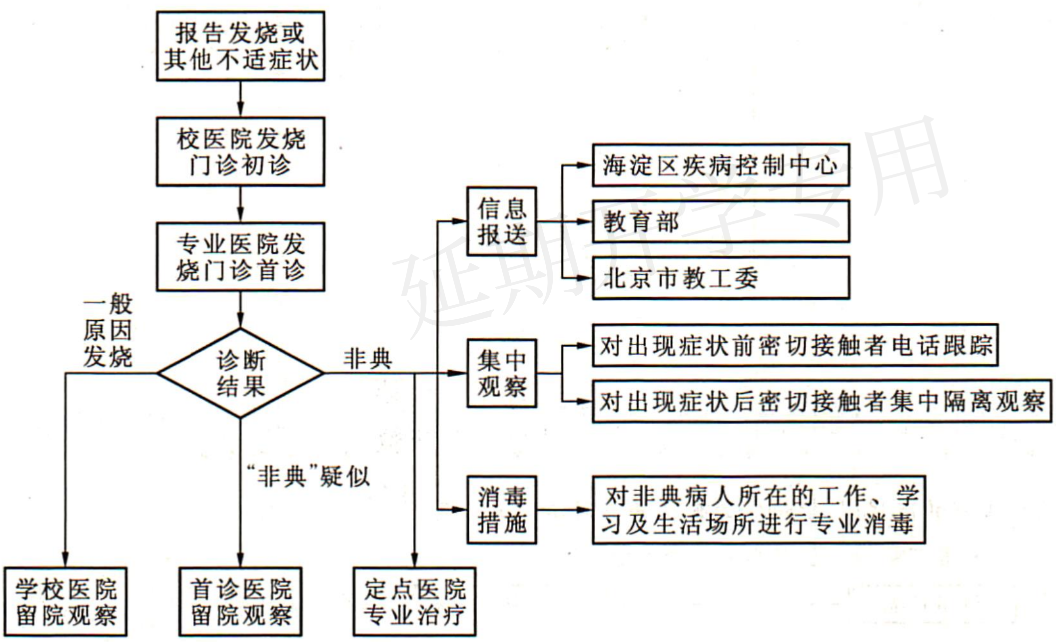


图 2-4

思考交流

阅读下面的洗衣机工作流程图，用自然语言叙述洗衣机的工作过程.

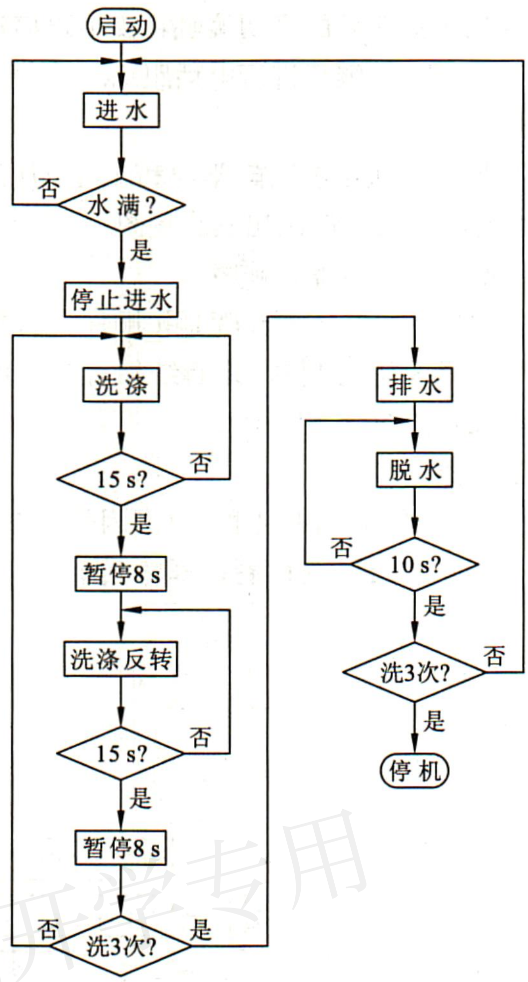
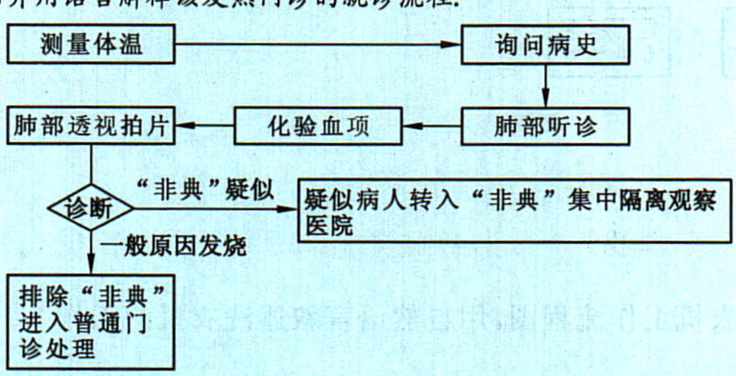


图 2-5

练 习 2

1. 请同学们查阅某项工程的流程图，解释它的含义并与同学们进行交流.
2. 阅读下列流程图，并用语言解释该发热门诊的就诊流程.



（第 2 题）

流程图的特点是直观清晰，从而使读者能以较快的速度把握信息.

例 3　请阅读图 2-6 所示的流程图，说明该游戏的游戏规则.

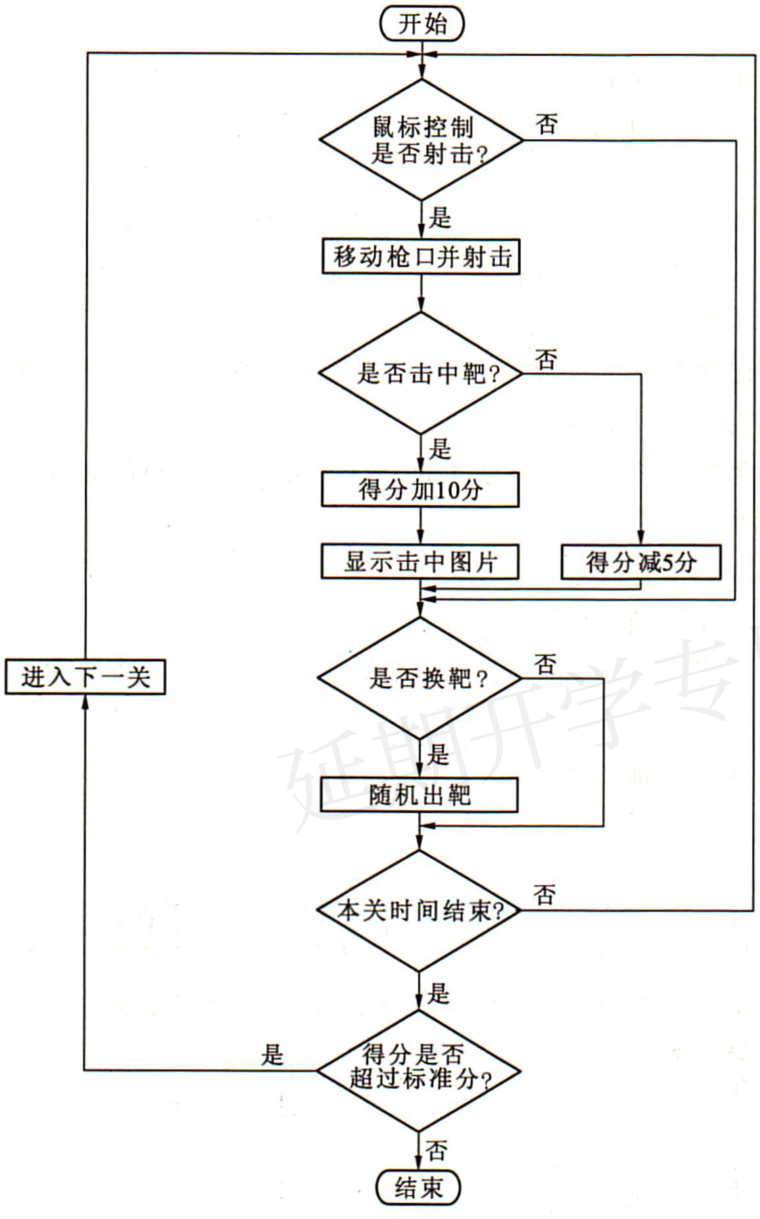


图 2-6

解　浏览整个流程图，我们可以判断出这是一个打靶游戏. 游戏规则如下：

1. 游戏开始.

2. 鼠标控制是否射击：选择射击，移动枪口进行射击；选择不射击，转向第 4 步.

3. 判断中靶情形：如果中靶，加 10 分，然后显示击中图片；否则减 5 分.

4. 选择是否换靶：选择换靶，随机出靶；否则进行第 5 步.

5. 判断本关时间是否结束：如果时间未到，则转向第 2 步，重新开始射击；否则进行第 6 步.

6. 将得分与标准分进行比较，如果超过标准分，进入下一关；否则游戏结束.

为了提高效率，我们通常把一种解决数学问题的一般方法总结成算法的形式，并用框图来表示这种算法.

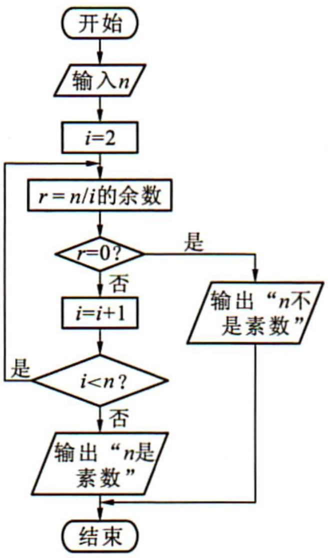


图 2-7

例 4 请画出判断一个数是否是素数的算法框图.

解 可以先具体分析一下，例如，要判断 257 是否是素数，只要看 2,3,4,5,6,…,256 能否整除 257 即可.

所以要判断自然数 n 是否为素数，只要判断 $2\sim(n-1)$之间的自然数能否整除 n 即可.

因为要对 $2\sim(n-1)$之间的自然数反复进行同样的判断，因而这是一个循环结构的算法.

循环变量为待判断的自然数 i.

循环体为判断自然数 i 能否整除 n.

循环终止条件：(1) 存在自然数 i 整除 n，即 n 不是素数；

(2) $i=n$.

该算法的流程图如图 2-7 所示.

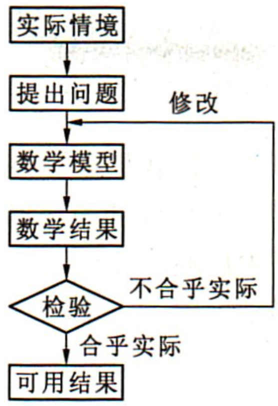
练 习 3

1. 请阅读某种电器的使用说明，画出实现其中某项功能的使用流程图，并与同学们交流.
2. 画出求解一元二次方程的算法流程图.

习 题 2—1

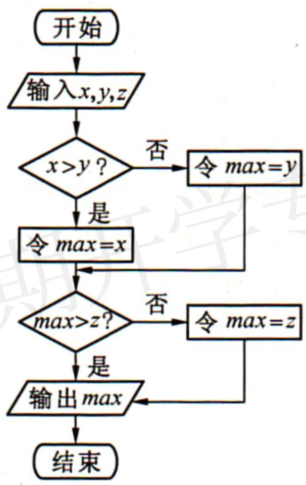
1. 工厂加工某种零件有三道工序：粗加工、返修加工和精加工. 每道工序完成时，都要对产品进行检验. 粗加工的合格品进入精加工，不合格品进入返修加工；返修加工合格品进入精加工，不合格品作为废品处理；精加工合格品为成品，不合格品为废品. 请用流程图表示这个零件的加工过程.

2. 阅读下列流程图，说明建模过程.



（第 2 题）

3. 阅读下列框图，说明其处理意图.



（第 3 题）

§2 结构图

流程图可以帮助我们表示完成某项工作的程序，只要按照流程图表示的顺序完成相应的工序，就能最终实现目的. 还有一些事物，它们之间不是先后顺序关系，而是存在某种逻辑关系，像这样的关系可以用结构图来描述.

例 1 在某个公司里，总经理对董事会负责，总工程师、常务副总经理、副总经理分别对总经理负责. 常务副总经理分管行政人事部、资金财务部、业务发展部和技术工程部，副总经理分管市场营销部、深圳办事处和杭州办事处. 请用框图的形式表示该公司的结构图.

解 这是一个层次结构图. 所以，首先分层：

第一层：董事会；

第二层：总经理；

第三层：总工程师，常务副总经理，副总经理；

第四层：行政人事部、资金财务部、业务发展部和技术工程部由常务副总经理分管；市场营销部、深圳办事处和杭州办事处由副总经理分管.

画出框图（见图 2-8）.

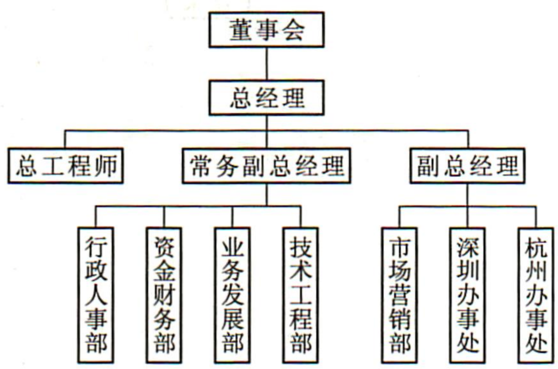


图 2-8

结构图除了可以表示结构设置的层次之外，还可以清楚地表示事物的分类.

例 2　阅读框图(见图 2-9),对其作出解释.

- 艺术
  - 音乐
    - 音乐史
    - 作曲与作曲理论
    - 音乐表演艺术
    - 音乐其他学科
  - 戏剧戏曲
    - 戏剧戏曲史
    - 戏剧戏曲理论
    - 戏剧戏曲表演
    - 戏剧戏曲其他学科
  - 舞蹈
    - 舞蹈史
    - 舞蹈理论
    - 舞蹈编导
    - 舞蹈表演
    - 舞蹈其他学科
  - 电影
    - 电影史
    - 电影理论
    - 电影艺术
    - 电影其他学科
  - 美术
  - 书法
  - 摄影

图 2-9

解　从图 2-9 中我们可以看出,这是一个学科分类图. 按照这种方法把艺术分为七个门类:音乐、戏剧戏曲、舞蹈、电影、美术、书法、摄影.

音乐可以分为:音乐史、作曲与作曲理论、音乐表演艺术、音乐其他学科.

戏剧戏曲可以分为:戏剧戏曲史、戏剧戏曲理论、戏剧戏曲表演、戏剧戏曲其他学科.

舞蹈可以分为:舞蹈史、舞蹈理论、舞蹈编导、舞蹈表演、舞蹈其他学科.

电影可以分为:电影史、电影理论、电影艺术、电影其他学科.

从以上我们对框图的解释来看,用框图的形式表示显得更加简洁、清晰.

在我们完成一件工作之前,通常会做一个计划;在写作之前,通常会列一个提纲;学完一个单元时,通常会做一个总结. 结构图可以有效地完成这些计划、提纲和总结工作.

例 3　我们在本书第一章中学习了统计案例，请画出统计案例一章的章节结构图.

解　在统计案例一章中，一共是 2 节：

§1　回归分析

　　1.1　回归分析

　　1.2　相关系数

　　1.3　可线性化的回归分析

§2　独立性检验

　　2.1　条件概率与独立事件

　　2.2　独立性检验

　　2.3　独立性检验的基本思想

　　2.4　独立性检验的应用

章节结构图见图 2-10.

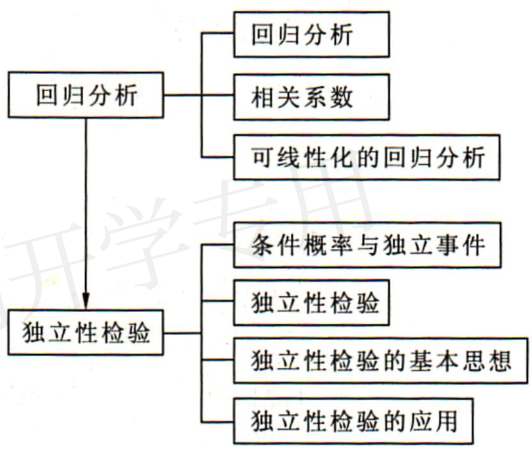


图 2-10

思考交流

你能画出统计一章的章节结构图吗?

练　习

请将下列概念进行分类，并说明你的分类标准.

平面图形、平行六面体、平行四边形、菱形、正方体、三棱锥、三角形、等腰三角形、三棱柱、圆台、立体图形、多边形、四边形、四面体、正三角形、矩形、正方形

习 题 2—2

1. 请自行拟定一个题目，并围绕这个中心做出一个演讲提纲，用结构图表示各部分内容的关系.
2. 选择一些事物，自己给定一种标准，并按照这种标准进行分类.
3. 阅读一本书，或者这本书的一些章节，画出阅读部分的知识结构图.

本章小结建议

一、学习要求

1. 学会阅读生活中各种流程图描述的工作流程.
2. 掌握绘制简单工作流程图的方法.
3. 学会阅读结构图,体会各部分之间的逻辑关系.
4. 初步掌握根据给定的关系,绘制结构图.

二、复习本章知识,思考以下问题,并写出复习总结报告

1. 绘制流程图有哪些基本步骤?
2. 结构框图可以用来实现哪些意图?

复习题二

1. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 是由 5 个不同的实数组成的集合，请画出从 A 中取出最大数的算法框图.

2. 阅读下列芦笋罐头的制作工艺，并画出工艺流程图.

   ① 原料验收. 采收后的芦笋嫩茎应在 12 小时内加工完毕. 若需放置 1～2 天，则必须放入 0 ～2 ℃的冷库中贮藏，并注意采取保湿措施.

   ② 冲洗. 清洗方法有机械清洗和人工清洗两种.

   ③ 精选分级. 首先将不符合规格的嫩茎及损伤茎挑出，然后按照嫩茎粗度、色泽、罐型包装及品种标准等分成若干级，分别放置.

   ④ 切割. 用手工或机械方法将原料切成与罐型相应的长度.

   ⑤ 去皮及鳞片. 加工整条去皮芦笋罐头时，应将原料基部表皮去掉，去皮长度不少于嫩茎总长的 $\frac{1}{3}$. 由于芦笋鳞片间易带有泥沙，因此加工整条带皮芦笋罐头时应将鳞片去除.

   ⑥ 预煮. 预煮可使嫩茎组织柔软，便于装罐，保证罐内固形物重量，并使酶失去活性，还可清除附着在嫩茎上的微生物，稍变弯的嫩茎通过预煮可以变直.

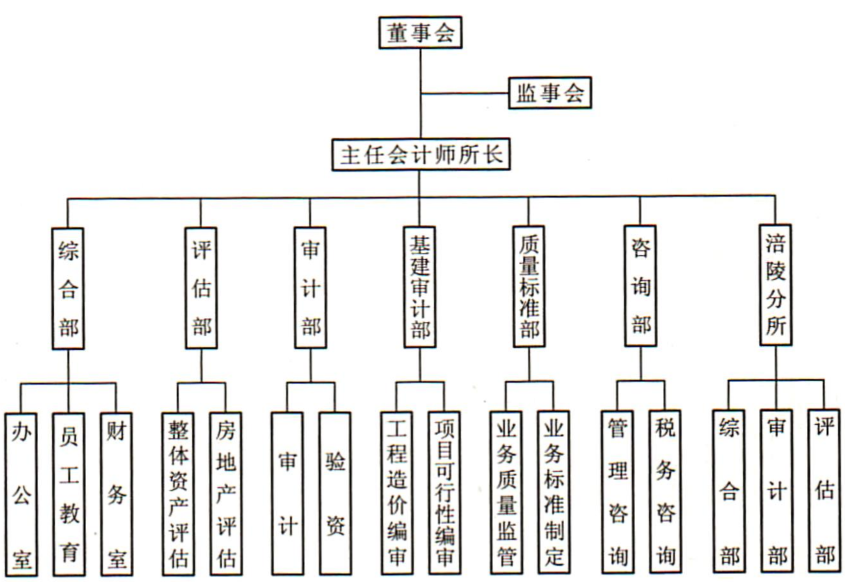
   ⑦ 冷却和装罐. 原料预煮后应迅速放入流动的冷水中冷却至 36 ℃以下，使软化过程中止. 将冷却后的嫩茎按标准装罐.

   ⑧ 排气和封口. 加入调味液后，应迅速将罐放入排气箱内，在 90 ～95 ℃的条件下排气 10～12 min，通过排气，使罐内形成一定的真空状态，从而减轻罐壁的腐蚀.

   ⑨ 灭菌. 封口后将罐的顶盖朝下放入高压灭菌锅内灭菌.

   ⑩ 冷却和装箱. 灭菌结束后，采用反压冷却方法迅速冷却到 40 ℃.

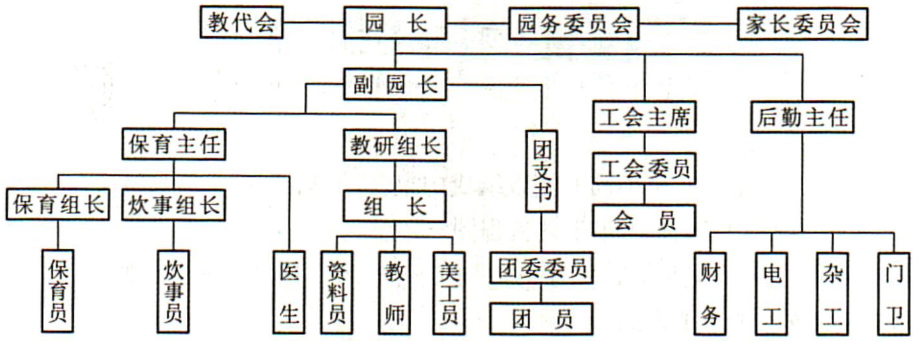
3. 阅读下列结构图，并对其进行解释.



（第 3 题）

4. 选定某种植物的一个分支，画出这个分支的分类结构图.

5. 阅读下面幼儿园的行政隶属关系图，并作出解释.



（第 5 题）

6. 参考第 5 题的内容，画出自己学校的行政隶属关系图，并作出解释.

7. 用框图形式表示学校运动会的比赛流程.

第三章 推理与证明

在日常生活和学习中，我们常常需要进行推理. 例如：

一个人看见一群乌鸦都是黑的，于是断言“天下乌鸦都是黑的”.

“每一位司机都应该遵守交通规则，小李是司机，所以，小李应该遵守交通规则.”

“如果 a,b,c 都是实数，且 $a>b,b>c$，那么 $a>c$.”

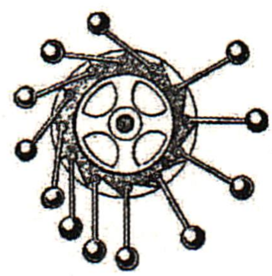
这些都是推理. 推理一般包括合情推理和演绎推理，它们都是日常生活、学习、工作和科学研究中常见的思维过程.

合情推理和演绎推理有什么特征？有什么区别？在学习中，特别是在数学学习中，合情推理和演绎推理有什么作用？同学们可以通过本章的学习，认识和体会这些问题.

§1　归纳与类比

1.1　归纳推理

在历史上，人们曾经有过制造永动机的美好愿望，希望制造出一种不消耗能量的机器，永无休止地为人类服务. 人们提出过许多永动机的设计方案. 最早永动机的设计方案是 13 世纪的法国人亨内考提出的，后来，人们又提出了各种永动机的设计方案，有人采用“螺旋汲水器”的原理，有人利用轮子的惯性原理，有人利用水的浮力或毛细作用的原理. 但是，这些设计方案都以失败而告终.



亨内考提出的永动机模型

从大量的失败案例中，科学界归纳出了一个结论：不可能制造出永动机. 1775 年，法国科学院郑重宣布不再审查任何有关永动机的设计方案.

后来，俄国著名科学家罗蒙诺索夫提出了能量守恒定律，从理论上说明了制造永动机是不可能的.

著名的哥德巴赫猜想也是归纳得出的结论. 观察 $6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7$，$16=5+11$，$18=7+11$，$20=3+17$，……，$30=13+17$，……

哥德巴赫归纳出以下结论：

一个偶数(大于 4)可以写成两个素数的和.

这个结论是否正确呢？人们验证了许多偶数，都满足这个规律，但至今还没有得到证明，这个结论仍然是猜想.

例 1　在一个凸多面体中，试通过归纳猜想其顶点数、棱数、面数满足的关系.

解　考察一些多面体，如图 3-1 所示. 将这些多面体的面数(F)、棱数(E)、顶点数(V)列出，得到表 3-1：

表 3-1

多面体	面数(F)	棱数(E)	顶点数(V)
三棱锥	4	6	4
四棱锥	5	8	5
五棱锥	6	10	6
三棱柱	5	9	6
五棱柱	7	15	10
立方体	6	12	8
八面体	8	12	6
十二面体	12	30	20

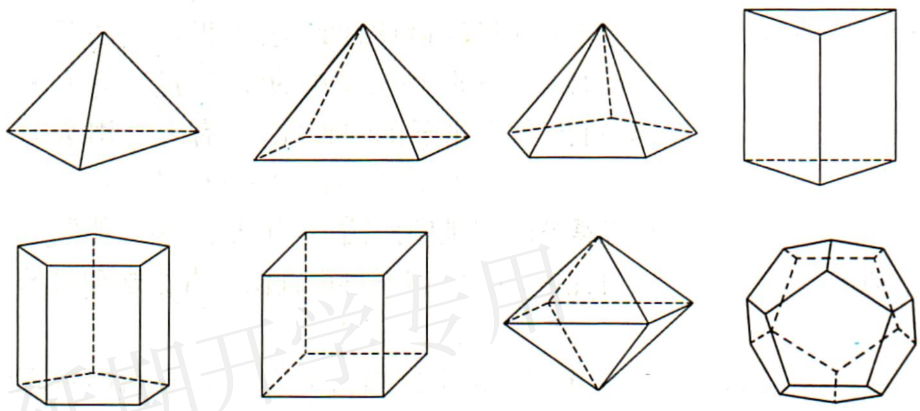


图 3-1

从这些事实中,可以归纳出:

$$V-E+F=2.$$

这就是著名的欧拉公式. 它的证明方法很多,有兴趣的同学可以参考选修 3 系列课程,例如"球面上的几何"等,在这些课程中,给出了一些不同的证明.

例 2 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$,$a_1=0$,试通过计算 a_2,a_3,a_4,a_5 的值,归纳、猜测$\{a_n\}$的通项公式.

解 由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$和 $a_1=0$,得

$$a_2=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}, a_4=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}, a_5=\frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5}.$$

归纳上述结果,得到猜测:$a_n=\dfrac{n-1}{n}$($n=1,2,\cdots$).

例 3 如果面积是一定的，什么样的平面图形周长最小？试猜测结论.

解 考虑单位面积的正三角形、正四边形、正六边形、正八边形，它们的周长分别记作 p_3，p_4，p_6，p_8，可得表 3-2.

表 3-2

p_3	p_4	p_6	p_8
4.56	4	3.72	3.64

归纳上述结果，可以发现：面积一定的正多边形中，边数越多，周长越小. 于是得到猜测：图形面积一定，圆的周长最小.

在以上各例的推理过程中，它们的共同之处是：根据一类事物中部分事物具有某种属性，推断该类事物中每一个事物都有这种属性. 我们将这种推理方式称为**归纳推理**.

归纳推理是由部分到整体，由个别到一般的推理.

但是，利用归纳推理得出的结论不一定是正确的.

例如，人们在数论研究中，希望得到生成素数的公式. 1640 年，著名数学家费马对形如 $2^{2^n}+1$ 的数进行计算时，发现当 $n=1,2,3$ 时对应的 $2^{2^n}+1$ 都是素数，$2^{2^4}+1=65\ 537$ 也是素数. 于是，他归纳出一个猜测："所有形如 $2^{2^n}+1(n=1,2,3,\cdots)$ 的数都是素数."

对于大一点的 n，验证这个猜测是很难的事情. 直至近百年后的 1732 年，瑞士数学家欧拉发现 $2^{2^5}+1=641\times6\ 700\ 417$ 不是素数，从而否定了这个猜测.

练 习

1. 猜测 $3\ 333\ 333\times3\ 333\ 334$ 的值.
2. 杨辉三角的前 5 行是

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

请试着写出第 8 行，并归纳、猜测出一般规律.

1.2 类比推理

在立体几何的学习中，我们可以通过与平面几何的相关内容的类比，得到一些立体几何的概念和性质. 例如，在平面几何中，三角形是边数最少的封闭多边形，在空间中，四面体是面数最少的封闭多面体，在学习四面体时，就可以通过类比三角形的性质得到四面体的一些性质；还可以用平面中的圆类比空间中的球；在平面中，学习了直线与圆的位置关系，通过类比，可以得到空间中平面与球的位置关系，等等.

例 4 已知“正三角形内一点到三边距离之和是一个定值”，将空间与平面进行类比，空间中什么样的图形可以对应正三角形？在对应图形中有与上述定理相应的结论吗？

解 将空间与平面类比，正三角形对应正四面体，三角形的边对应四面体的面. 得到猜测：正四面体内一点到四个面距离之和是一个定值.

为了证明这个猜测，可以分析原结果的证明方法，例如面积法，那么类比地考虑猜测的证明，可以用体积法.

思考交流

用面积法证明例 4 中已知的结论，并类比地用体积法证明猜测（先画出图）.

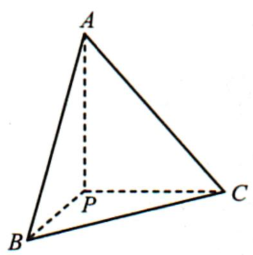


图 3-2

例 5 根据平面几何的勾股定理，试类比地猜测出空间中相应的结论.

解 平面中的直角三角形类比到空间就是直四面体. 如图 3-2，在四面体 $P\text{-}ABC$ 中，平面 PAB、平面 PBC、平面 PCA 两两垂直.

勾股定理：斜边长的平方等于两个直角边长的平方和.

类比到空间就是：$\triangle ABC$ 面积的平方等于三个直角三角形面积的平方和. 即

$$S^2_{\triangle ABC}=S^2_{\triangle PAB}+S^2_{\triangle PBC}+S^2_{\triangle PCA}.$$

在以上各例的推理过程中，它们的共同之处是：由于两类不同对象具有某些类似的特征，在此基础上，根据一类对象的其他特征，推断另一类对象也具有类似的其他特征，我们把这种推理过程称为**类比推理**.

类比推理是两类事物特征之间的推理.

但是，利用类比推理得出的结论不一定是正确的.

例如，在平面几何中，对于任意的 $n(n\geqslant 3)$，都存在正 n 边形. 若把这个结论类比到空间：对于任意的 $n(n\geqslant 4)$，都有正 n 面体. 这个结论是错误的. 事实上，在空间只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 除此之外，其他的正 n 面体是不存在的.

根据解决问题的需要，我们有时对概念、结论进行类比（如例 5），有时对方法进行类比（如对例 4 的证明）.

归纳推理和类比推理是最常见的**合情推理**. 合情推理是根据实验和实践的结果、个人的经验和直觉、已有的事实和正确的结论（定义、公理、定理等），推测出某些结果的推理方式.

尽管合情推理的结果不一定正确，但是，在数学、科学、经济和社会的历史发展中，合情推理有非常重要的价值，它是科学发现和创造的基础.

练　习

利用类比推理，根据学过的平面向量和运算，建立空间向量的概念和加法运算及其规律.

习　题　3—1

1. 从下面的等式中，你能猜想出什么结论？

   $37\times3=111$，$37\times6=222$，$37\times9=333$，$37\times12=444$.

2. 已知 $1^3+2^3=3^2=(1+2)^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2=(1+2+3)^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2=(1+2+3+4)^2$，试写出 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的表达式.

3. 右图中给出了 3 层的六边形，图中所有点的个数 S_3 为 28. 按其规律再画下去，可以得到 n 层六边形，试写出 S_n 的表达式.

（第 3 题）

4. 阅读以下求 $1+2+3+\cdots+n$ 的值的过程：

   因为 $(n+1)^2-n^2=2n+1$，

   $n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$，

   ……

   $2^2-1^2=2\times1+1$，

   以上各式相加得 $(n+1)^2-1=2(1+2+\cdots+n)+n$，

   所以 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2+2n-n}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   类比以上过程，求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的值.

5. 利用类比推理，根据学过的平面向量的坐标表示，建立空间向量的坐标表示.

§2 数学证明

在科学研究和日常生活中，常常通过合情推理探索方法、寻求思路、发现规律、得到猜想. 但是，合情推理的结论有时是不正确的. 对于数学命题，需要通过演绎推理严格证明. 因此，在数学学习中，不仅要学会运用合情推理提出猜想发现结论，还要善于运用演绎推理证明结论是否正确.

三段论是最常见的一种演绎推理形式. 例如：

因为菱形是平行四边形，

四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

这个推理有三段，第一段“菱形是平行四边形”讲的是一般性道理，称为**大前提**；第二段“四边形 $ABCD$ 是菱形”讲的是研究对象的特殊情况，称为**小前提**；第三段“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”是由大前提和小前提作出的判断，称为**结论**.

先表述大前提、小前提，由此给出结论，即为三段论推理的形式.

在应用三段论进行证明的过程中，有些大前提是人们熟知的，在书写时，这类大前提往往被省略.

例 1 求证：一个三角形中，最大的角不小于 $60°$.

证明 设 $\triangle ABC$ 中，$\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$，(1)

则 $\angle A+\angle B+\angle C \leqslant 3\angle C$，(2)

即 $3\angle C \geqslant 180°$. (3)

所以 $\angle C \geqslant 60°$. (4)

在这个例子中，由(1)到(2)是三段论推理，详细写出来是：

大前提：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数，若 $a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \cdots, a_n \leqslant b_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n \leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$；

小前提：$\triangle ABC$ 中各角的度数都是实数，设 $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$，即 $\angle A \leqslant \angle C$，$\angle B \leqslant \angle C$，$\angle C \leqslant \angle C$；

结论：$\angle A+\angle B+\angle C \leqslant \angle C+\angle C+\angle C=3\angle C$.

在这个例子中，由(2)到(3)也是三段论推理，省略的大前提是“三角形的内角和等于 $180°$”.

抽象概括

在数学中，证明一个命题，就是根据命题的条件和已知的定义、公理、定理，利用演绎推理的法则将命题推导出来.

合情推理是认识世界、发现问题的基础；演绎推理是证明命题、建立理论体系的基础.

例 2　设 a_1, a_2, b_1, b_2 均为实数，求证：$a_1a_2+b_1b_2\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$.

证明　由于 $(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$,

即　$a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2\geqslant 0$,

故　$2a_1b_2a_2b_1\leqslant a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2$,

因而　$a_1^2a_2^2+2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2\leqslant a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+b_1^2b_2^2$,

即　$(a_1a_2+b_1b_2)^2\leqslant(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$.

由于不等式两边都是正数，

所以 $a_1a_2+b_1b_2\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$.

思考交流

分析上例演绎推理过程，明确每一步的推理依据.

练　习

写出两个用三段论表述的命题证明.

例如：数学系的毕业生都学过高等代数，（大前提）

　　高明是北京大学数学系毕业生，（小前提）

　　所以，高明学过高等代数.（结论）

习　题　3—2

1. 在$\triangle ABC$中，D是BC上的点，E是AD上的点，证明：$\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{BD}{DC}$.
2. 设 a, b, c 为实数，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

§3 综合法与分析法

3.1 综合法

在证明数学命题时，我们可以从已知条件入手，依据学过的定义、公理、定理等，通过严格的推理，证明命题的结论.

例 1 求证：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

证明 $f(x+\pi)=\sin\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x),$$

由函数周期的定义可知：π 是函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的一个周期.

例 2 （韦达定理）已知 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0, b^2-4ac\geqslant 0)$ 的两个根. 求证：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

证明 由于 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，根据求根公式，有

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

这样，我们从命题的条件出发，通过计算，证明了命题的结论.

例 3　已知：x,y,z 为互不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. 求证：$x^2y^2z^2=1$.

证明　根据命题的条件 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$，可得

$$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}.$$

又由命题的条件，x,y,z 为互不相等的实数，

所以上式可变形为　$yz=\frac{y-z}{x-y}$.

同理可得　$xy=\frac{x-y}{z-x}$，$zx=\frac{z-x}{y-z}$.

所以　$x^2y^2z^2=\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{x-y}{z-x}\cdot\frac{z-x}{y-z}=1$.

这样，我们就从命题的条件出发，通过计算，证明了命题的结论.

抽象概括

从上面的几个例子，我们可以看出它们证明的特点是：从命题的条件出发，利用定义、公理、定理及运算法则，通过演绎推理，一步一步地接近要证明的结论，直到完成命题的证明. 我们把这样的思维方法称为**综合法**.

练　习

设 a,b 是实数，求证：$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

3.2　分　析　法

在证明数学命题时，我们也可以从命题的结论入手，不断地寻求保证结论成立的条件，直到归结为命题给定的条件，或归结为定义、公理、定理.

例 4　已知：a,b 是不相等的正数. 求证：$a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证明　要证明 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$，

只需证明　$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$，

只需证明　$(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)>0$，

只需证明　$(a+b)(a^2-2ab+b^2)>0$，

只需证明　$(a+b)(a-b)^2>0$，

只需证明　$a+b>0$ 且 $(a-b)^2>0$.

由于命题的条件“a,b 是不相等的正数”，它保证上式成立.

这样，就证明了命题的结论.

例 5　求证：$\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

证明　要证明 $\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$ 成立，

只需证明 $(\sqrt{8}+\sqrt{7})^2>(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2$，

即 $8+7+2\sqrt{56}>5+10+2\sqrt{50}$，

从而只需证明 $2\sqrt{56}>2\sqrt{50}$，

即 $56>50$，这显然成立.

这样，就证明了　$\sqrt{8}+\sqrt{7}>\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

例 6　求证：函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的.

证明　要证明函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的，

只需证明　对于任意 $x_1,x_2\in(3,+\infty)$，且 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

只需证明　对任意的 $x_1>x_2>3$，有

$$
\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2)&=(2x_1^2-12x_1+16)-(2x_2^2-12x_2+16)\\
&=2x_1^2-2x_2^2-(12x_1-12x_2)\\
&=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-12(x_1-x_2)\\
&=2(x_1-x_2)(x_1+x_2-6)>0.
\end{aligned}
$$

根据命题的条件，“$x_1>x_2$，且 $x_1>3$，$x_2>3$”，有 $x_1-x_2>0$，且 $x_1+x_2>6$，它保证上式成立.

这样，就证明了：函数 $f(x)=2x^2-12x+16$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是增加的.

抽象概括

通过前面的例子，可以发现它们的证明有共同的特点：都是从求证的结论出发，一步一步地探索保证前一个结论成立的充分条件，直到归结为这个命题的条件，或者归结为定义、公理、定理等. 我们把这样的思维方法称为**分析法**.

练 习 1

1. 求证：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$（其中 $a\geqslant 3$）.
2. 证明：表面积相等的球和正方体，球的体积大于正方体的体积.

从前面的讨论中，不难看出，综合法是“由因导果”，分析法是“执果索因”. 事实上，在很多数学命题的证明中，往往需要综合地运用这两种思维方法.

例 7 如图 3-3，已知 BE，CF 分别为$\triangle ABC$ 的边 AC，AB 上的高，G 为 EF 的中点，H 为 BC 的中点. 求证：$HG\perp EF$.

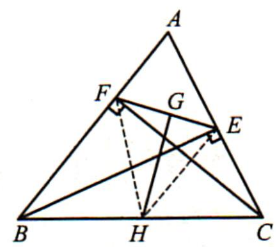


图 3-3

证明 考虑待证的结论“$HG\perp EF$”和已知的命题条件：G 是 EF 的中点，连接 EH，FH，只要证明$\triangle EHF$ 为等腰三角形，即 $EH=HF$ 即可.

根据条件 $CF\perp AB$，且 H 是 BC 的中点，可知 FH 是 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 斜边上的中线.

所以 $FH=\frac{1}{2}BC$.

同理 $HE=\frac{1}{2}BC$.

这样，就证明了$\triangle EHF$ 为等腰三角形.

所以 $HG\perp EF$.

例 8 已知：a，b，c 都是正实数，且 $ab+bc+ca=1$. 求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

证明 考虑待证的结论“$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$”，因为 $a+b+c>0$，

只需证明 $(a+b+c)^2\geqslant 3$，

即 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3$.

又 $ab+bc+ca=1$，

所以，只需证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant 1$，

即 $a^2+b^2+c^2-1\geqslant 0$.

因为 $ab+bc+ca=1$，

所以，只需证明 $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqslant 0$，

只需证明 $2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\geqslant 0$，

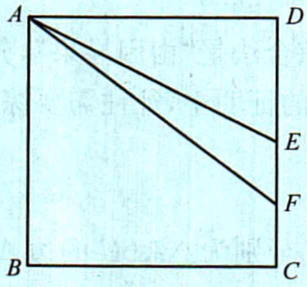
即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.

由于任意实数的平方都非负，故上式成立.

所以 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

练习 2

如图所示，已知四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 是 CD 边上的点，$CE=\frac{1}{2}CD$，$CF=\frac{1}{4}CD$. 求证：$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$.



习 题 3—3

1. 已知：$a>0$，$b>0$，求证：$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
2. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.
3. 证明：$f(x)=2^{x^2-4x+3}$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增加的.
4. 已知：a,b,c,d 都是实数，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$|ac+bd|\leqslant 1$.
5. 已知：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，求证：$\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\leqslant 1$.
6. 证明：当 $x>0$ 时，$\sin x<x$.
7. 已知：$a+b+c$，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ 组成公比为 q 的等比数列. 求证：$q^3+q^2+q=1$.
8. 已知：$\triangle ABC$ 三内角 A,B,C 成等差数列，求证：对应三边 a,b,c 满足
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$
9. 已知：四边形 $ABCD$ 不是矩形，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$M,N$ 分别为 AC,BD 的中点.
求证：$MN\perp BD$.

§4 反 证 法

在数学证明中，有直接证明和间接证明. 在上一节，我们学习的综合法和分析法都是直接证明的方法. 这一节，我们将学习一种间接证明的方法——反证法.

例 1　已知：a 是整数，2 能整除 a^2. 求证：2 能整除 a.

证明　假设命题的结论不成立，即"2 不能整除 a".

因为 a 是整数，故 a 是奇数，a 可表示为 $2m+1$（m 为整数），则

$$a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1,$$

即 a^2 是奇数，

所以，2 不能整除 a^2. 这与已知"2 能整除 a^2"相矛盾.

于是，"2 不能整除 a"这个假设错误，故 2 能整除 a.

在本例中，我们要讨论的是 2 和整数 a 的整除关系. 2 能整除 a，2 不能整除 a，二者必居其一.

由于不易直接证明"2 能整除 a"，不妨先假设"2 不能整除 a". 在这个前提下，我们得到了与已知条件矛盾的结论. 由此可以说明开始的假设是错误的，从而证明"2 能整除 a".

例 2　在同一平面内，两条直线 a，b 都和直线 c 垂直. 求证：a 与 b 平行.

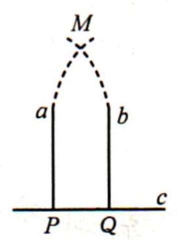


图 3-4

证明　假设命题的结论不正确，即"直线 a 与 b 相交".

不妨设直线 a，b 的交点为 M，a，c 的交点为 P，b，c 的交点为 Q，如图 3-4 所示，则$\angle PMQ>0°$.

这样，$\triangle MPQ$ 的内角和$=\angle PMQ+\angle MPQ+\angle PQM$

$$=\angle PMQ+90°+90°>180°.$$

这与定理"三角形的内角和等于 180°"相矛盾.

这说明假设是错误的.

所以，直线 a 与 b 不相交，即 a 与 b 平行.

在本例中，两条直线 a，b 要么相交，要么不相交，二者必居其一.

由于不易直接证明"两条直线 a，b 平行"，不妨先假设"两条直线 a，b 相交". 在这个前提下，我们得到了与已知定理矛盾的结论. 这说

明假设“两条直线 a,b 相交”不正确，那么假设的反面就是正确的，即“两条直线 a,b 平行”.

抽象概括

在证明数学命题时，要证明的结论要么正确，要么错误，二者必居其一. 我们可以先假定命题结论的反面成立，在这个前提下，若推出的结果与定义、公理、定理相矛盾，或与命题中的已知条件相矛盾，或与假定相矛盾，从而说明命题结论的反面不可能成立，由此断定命题的结论成立. 这种证明方法叫作**反证法**.

反证法的证题步骤是：

(1) 作出否定结论的假设；

(2) 进行推理，导出矛盾；

(3) 否定假设，肯定结论.

例 3 求证：$\sqrt{2}$是无理数.

证明 假设$\sqrt{2}$不是无理数，即$\sqrt{2}$是有理数，那么它就可以表示成两个整数之比，设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$，$p\neq 0$，且 p,q 互素，则 $p\sqrt{2}=q$.

所以，$$2p^2=q^2. \qquad ①$$

故 q^2 是偶数，q 也必然为偶数.

不妨设 $q=2k$，代入①式，则有 $2p^2=4k^2$，

即 $p^2=2k^2$，

所以，p 也为偶数.

p 和 q 都是偶数，它们有公约数 2，这与 p,q 互素相矛盾.

这样，$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数.

练 习 1

求证：$\sqrt{3}$是无理数.

例 4 已知 $a_1+a_2+a_3+a_4>100$，求证：a_1,a_2,a_3,a_4 中，至少有一个数大于 25.

证明 假设结论不对，即 a_1,a_2,a_3,a_4 均不大于 25，那么，

$$a_1+a_2+a_3+a_4\leqslant 25+25+25+25=100,$$

这与已知条件矛盾.

所以，a_1,a_2,a_3,a_4 中，至少有一个数大于 25.

例 5　求证：$1,2,\sqrt{5}$不可能是一个等差数列中的三项.

证明　假设 $1,2,\sqrt{5}$是公差为 d 的等差数列的第 p,q,r 项，则 $2-1=(q-p)d,\sqrt{5}-1=(r-p)d$，于是

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{q-p}{r-p}.$$

因为 p,q,r 均为整数，所以等式右边是有理数，而等式左边是无理数，二者不可能相等，推出矛盾，所以 $1,2,\sqrt{5}$不可能是一个等差数列中的三项.

例 6　如图 3-5 所示，直线 a 平行于平面 α，β 是过直线 a 的平面，平面 α 与 β 相交于直线 b. 求证：直线 a 平行于直线 b.

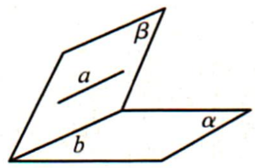


图 3-5

证明　假设命题的结论不成立，即“直线 a 不平行于直线 b”.

由于直线 a,b 在同一平面 β 中，且直线 a,b 不平行，故直线 a,b 相交，设交点为 A，A 在直线 b 上，故 A 在平面 α 内.

所以，直线 a 与平面 α 相交于 A.

这与条件“直线 a 平行于平面 α”矛盾.

因此，假设不成立，即“直线 a 平行于直线 b”.

练 习 2

用反证法证明：13 个人中至少有两个人的生日在同一个月.

习 题 3—4

利用反证法证明下列各题：

(1) 证明：400 个人中至少有两个人生日相同；

(2) 证明：100 个球放在 90 个盒子里，至少有一个盒子里不少于两个球；

(3) 求证：$\sqrt{5}$是无理数；

(4) 证明：如果在一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

(5) 证明：垂直于同一条直线的两个平面互相平行.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 合情推理的意义与应用

(1) 会利用归纳进行简单的推理与猜想；

(2) 会利用类比进行简单的推理与猜想.

2. 演绎推理的意义与应用

(1) 体会演绎推理的重要性，并能进行简单的推理；

(2) 了解数学证明的几种基本方法：综合法、分析法、反证法，并能运用这些方法进行一些简单的数学证明；

(3) 了解合情推理和演绎推理之间的联系、差异和各自所起的作用.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次地呈现.

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结.

3. 本章复习时，可供参考的思考问题：

(1) 日常和数学学习中有哪些合情推理的方式？举例说明；

(2) 如何运用合情推理进行数学和其他学科的学习？如何避免合情推理的局限性？

(3) 分析法与综合法各自有何特点？在解决问题时各自有何作用？

(4) 与其他证明方法相比，反证法的思考过程有何特点？

4. 请同学们相互交流学习本章的感受，特别是本章所学的常用的思维方式在日常学习和生活中的应用.

复习题三

1. 运用类比的思想，讨论椭圆、双曲线、抛物线的性质.
2. 运用类比的思想，讨论指数函数和等比数列，线性函数和等差数列.
3. 将下面平面几何中的概念类比到立体几何中，会得到什么样的结果？请将下表填充完整.

平面几何	立体几何
① 等腰三角形	
② 等腰三角形的底	
③ 等腰三角形的腰	
④ 点到直线的距离	

4. 用综合法证明：若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
5. 用分析法证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A$ 的外角平分线与三角形的外接圆相交于点 D，那么 $BD=CD$.
6. 用分析法证明：$(\sqrt{2}+1)^2<\frac{17}{5}\sqrt{3}$.
7. 设 $a\geqslant 3$，求证：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.
8. 分别用分析法和综合法证明：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$，BE，CF 分别是三角形的高线，BE 与 CF 相交于点 M，那么，$MB=MC$.
9. 求证：在三角形中，大边对大角.
10. 用反证法证明：在一个三角形中，至少有一个内角大于或等于 60°.
11. 根据生物科学的研究结果，人的头发不超过 20 万根.

    (1) 试证明：在人口为 50 万的城市中，至少有两个人头发根数相同；

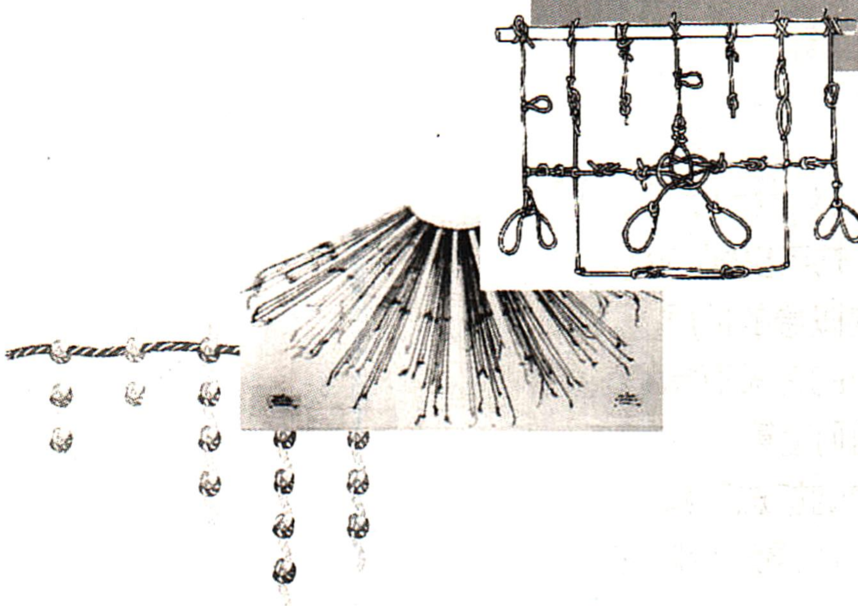
    (2) 是否有三个人头发根数相同？说明理由.
12. 在空间中，有三条不共面的直线，它们交于一点，试用反证法证明：这三条直线没有公共垂线.
13. 用反证法证明：a，b，c，d 都是实数，且满足 $a+b=1$，$c+d=1$，$ac+bd>1$，则 a，b，c，d 四个数中至少有一个是负数.

第四章 数系的扩充与复数的引入

人类文明的历史经历了数的发展.

我国古代文献《周易 · 系辞下》有“上古结绳而治，后世圣人易之以书契”之说.“结绳而治”就是结绳记事或结绳记数，“书契”就是刻画符号记事或记数……

随着历史的发展，人们对数的认识也在发生变化……学习了这一章你就会对数的发展有新的认识.



复数系统在科学上的作用可大了. 没有复数，便没有电磁学，便没有量子力学，便没有近代文明！数学的伟大是大可想象的.

——陈省身

§1　数系的扩充与复数的引入

1.1　数的概念的扩展

人类很早就知道用自然数来计数. 随着社会的发展和实际的需要,数的概念也逐步扩充. 至今我们已学习过自然数集 **N**,整数集 **Z**,有理数集 **Q** 和实数集 **R**,并且它们之间有如下的包含关系:

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}.$$

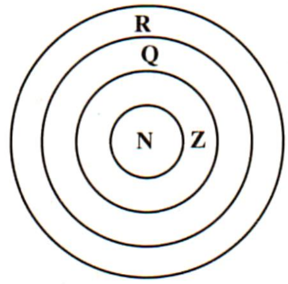


图 4-1

问题提出

人们发现仅有实数还是不够用. 例如 $x^2=-1$ 这样简单的方程在实数集内无解,因为无论 x 取什么实数值,它的平方都不等于-1.

为了保证运算可以实施,我们引进一个使这个方程有解的数. 把平方等于-1 的数用符号 i 表示,规定 $\mathrm{i}^2=-1$. 我们把 i 叫作**虚数单位**.

我们规定,i 可以和实数 b 相乘,得 $b\mathrm{i}$(因为零和任何实数相乘所得的积是零,与此类似,我们规定 $0\cdot\mathrm{i}=0$). $b\mathrm{i}$ 还可以和实数 a 相加得 $a+b\mathrm{i}$. 于是,数的范围又得到了扩充,出现了形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数,其中 a,b 是实数. 我们把形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数叫作**复数**(a,b 是实数,i 是虚数单位). 复数通常表示为

$$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}).$$

此时有,$b\mathrm{i}=\mathrm{i}b$,$a+b\mathrm{i}=b\mathrm{i}+a$,等等.

根据复数中 a,b 的取值不同,复数可以有以下的分类:

$$\text{复数 } a+b\mathrm{i}\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$,a 与 b 分别叫作复数 z 的实部与虚部,并且分别用 $\mathrm{Re}\,z$ 与 $\mathrm{Im}\,z$ 表示,即 $a=\mathrm{Re}\,z$,$b=\mathrm{Im}\,z$.

复数的全体组成的集合叫作**复数集**,记作 **C**,显然 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

例 1 说出下列三个复数的实部、虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数请指出是否为纯虚数：

(1) $3+4\mathrm{i}$； (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$； (3) -7.

解 (1) $3+4\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 3 与 4，它是虚数，但不是纯虚数；

(2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的实部与虚部分别是 0 与 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，它是虚数，而且是纯虚数；

(3) -7 的实部与虚部分别是 -7 与 0，它是实数.

从 18 世纪起，复数在数学、力学中得到了应用，现在复数的理论在数学、力学、电学等方面有着更加广泛的应用，它已成为科技人员普遍熟悉的数学工具.

1.2 复数的有关概念

复数 $a+b\mathrm{i}$ 可以看成是关于 i 的一次二项式，类比两个二项式相等的意义，我们规定：

两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等，即

$$\boxed{a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i} \text{ 当且仅当 } a=c\text{，且 } b=d.}$$

例 2 设 $x, y\in\mathbf{R}$，并且 $(x+2)-2x\mathrm{i}=-3y+(y-1)\mathrm{i}$，求 x, y 的值.

解 由复数相等的意义，得

$$\begin{cases} x+2=-3y, \\ -2x=y-1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

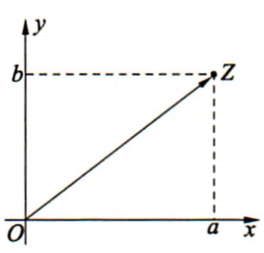


图 4-2

复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 可以用直角坐标平面内的一个点 Z 来表示，这个点的横坐标是 a，纵坐标是 b（如图 4-2 所示）. 显然表示实数的点都在 x 轴上，表示纯虚数的点都在 y 轴上.

当用直角坐标平面内的点来表示复数时，我们称这个直角坐标平面为**复平面**，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**.

这样，每一个复数在复平面内都有唯一的一个点与它对应；反过来，复平面内的每一个点都有唯一的一个复数与它对应．复数集 **C** 和复平面内所有的点构成的集合是一一对应的，即**任一个复数 $z=a+bi$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 是对应的.**

又因为复平面内的点 $Z(a,b)$ 与平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是一一对应的，所以一个复数 $z=a+bi$ 与复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 也是一一对应的.

设复数 $z=a+bi$ 在复平面内对应的点是 $Z(a,b)$，点 Z 到原点的距离 $|OZ|$ 叫作**复数 z 的模或绝对值**，记作 $|z|$．显然，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

两个复数一般不能比较大小，但可以比较它们模的大小.

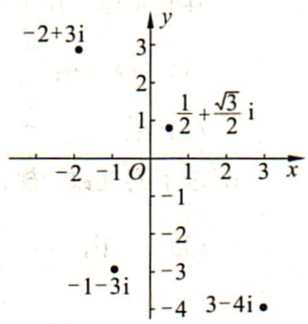


图 4-3

例 3　在复平面内表示下列复数，并分别求出它们的模：

(1) $-2+3i$；　(2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$；　(3) $3-4i$；　(4) $-1-3i$.

解　在复平面内的表示如图 4-3 所示.

(1) $|-2+3i|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$；

(2) $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$；

(3) $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$；

(4) $|-1-3i|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

练　习

1. 说出下列复数的实部与虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数指出是否为纯虚数：

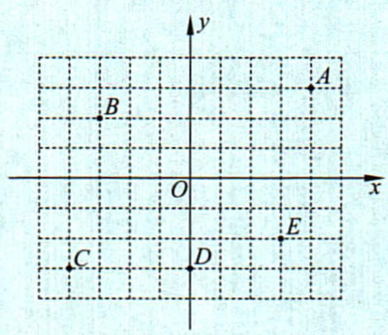
(1) $1+\sqrt{2}i$；　(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$；　(3) $(\sqrt{3}-1)i$；　(4) 0.

2. 求适合下列方程的实数 x，y 的值：

(1) $(-2x+3)+(y-4)i=0$；

(2) $(3x-2y)-(x+2y)i=3-6i$.

3. 说出图中复平面内点 A，B，C，D，E 所表示的复数（每个小方格的边长是 1）.



（第 3 题）

4. 设复数 $z=a+bi$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 对应，若点 Z 分别位于下列位置，求 a，b 满足的条件：

(1) 实轴上；　(2) 虚轴上；

(3) 实轴上方（不包括实轴）；　(4) 虚轴左侧（不包括虚轴）.

5. 求下列复数的模：

(1) $z_1=-5+12i$；　(2) $z_2=4i-5$；　(3) $z_3=\sqrt{3}-i$.

习题 4—1

A 组

1. 求实数 m 的值，使复数 $(m^2-2m-3)+(m^2-3m-4)i$ 分别是：

(1) 实数；　(2) 纯虚数；　(3) 零.

2. 求适合下列各方程的实数 x,y：

(1) $(x+y)-xyi=6+7i$；

(2) $(x^2-4x-5)+(y^2+3y-4)i=0$.

3. 在复平面上作出表示下列复数的点：

(1) $-1+2i$；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$；

(3) $3i$；　(4) 5.

4. 求下列复数的模：

(1) $3-4i$；　(2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$；

(3) -6；　(4) $-5i$.

B 组

设复数 $z=(m-1)+(m^2-4m-5)i$ 和复平面内的点 Z 对应，若点 Z 的位置分别满足下列要求，求实数 m 满足的条件：

(1) 不在实轴上；　(2) 在虚轴上；

(3) 在实轴下方(不包括实轴)；　(4) 在虚轴右侧(不包括虚轴).

§2　复数的四则运算

2.1　复数的加法与减法

设 $a+bi$ 和 $c+di$ 是任意两个复数，我们定义复数的加法、减法如下：

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}.$$

也就是说，两个复数的和(或差)仍然是一个复数. 它的实部是原来两个复数的实部的和(或差)，它的虚部是原来两个复数的虚部的和(或差).

思考交流

请举例验证复数的加法法则是否满足交换律、结合律，并与同学交流.

例 1　计算：

(1) $(-5+3\mathrm{i})+(2-4\mathrm{i})$；　(2) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})+(2\sqrt{3}-4\mathrm{i})$.

解　(1)　$(-5+3\mathrm{i})+(2-4\mathrm{i})$

$=(-5+2)+(3-4)\mathrm{i}$

$=-3-\mathrm{i}$；

(2)　$(\sqrt{3}-\mathrm{i})+(2\sqrt{3}-4\mathrm{i})$

$=(\sqrt{3}+2\sqrt{3})+(-1-4)\mathrm{i}$

$=3\sqrt{3}-5\mathrm{i}$.

例 2　计算：

(1) $(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$；　(2) $(4-9\mathrm{i})-(4+9\mathrm{i})$.

解　(1)　$(2-\mathrm{i})-(3+\mathrm{i})$

$=(2-3)+(-1-1)\mathrm{i}$

$=-1-2\mathrm{i}$；

(2)　$(4-9\mathrm{i})-(4+9\mathrm{i})$

$=(4-4)+(-9-9)\text{i}$

$=-18\text{i}.$

练 习

计算：

(1) $-7+(-3-\text{i})$；

(2) $(3-2\text{i})+(-1+2\text{i})$；

(3) $(-\sqrt{6}-2\text{i})+(\sqrt{6}+2\text{i})$；

(4) $(3\sqrt{2}-2\text{i})-(-\sqrt{2}+3\text{i})+(4\sqrt{2}+3\text{i})$；

(5) $(3\sqrt{5}-4\text{i})-(-\sqrt{5}+2\text{i})$；

(6) $(8-2\text{i})-(-7+5\text{i})+(3\sqrt{3}+7\text{i})$.

2.2 复数的乘法与除法

设 $a+b\text{i}$ 与 $c+d\text{i}$ 分别是任意两个复数，我们定义复数的乘法如下：

$$\boxed{(a+b\text{i})(c+d\text{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\text{i}.}$$

也就是说，两个复数的积仍然是一个复数. 复数的乘法与多项式的乘法是类似的，但在运算过程中，需要用 $\text{i}^2=-1$ 进行化简，然后把实部与虚部分别合并.

例 3 计算：$(-2-\text{i})(3+\text{i})$.

解 $(-2-\text{i})(3+\text{i})$

$=-2\times3-2\text{i}-3\text{i}-\text{i}\times\text{i}$

$=-6-2\text{i}-3\text{i}-\text{i}^2$

$=-6-2\text{i}-3\text{i}+1$

$=-5-5\text{i}.$

例 4 计算：

(1) $(-2-3\text{i})(-1+3\text{i})$；　　(2) $(-\sqrt{2}-2\text{i})(\sqrt{6}+\text{i})$.

解 (1) $(-2-3\text{i})(-1+3\text{i})$

$=2-6\text{i}+3\text{i}-3\text{i}\times3\text{i}$

$=2-6\text{i}+3\text{i}+9$

$=11-3\text{i}$；

(2) $(-\sqrt{2}-2\text{i})(\sqrt{6}+\text{i})$

$=-\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\sqrt{2}\text{i}-2\text{i}\times\sqrt{6}-2\text{i}\times\text{i}$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}i-2\sqrt{6}i-2i^2$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}i-2\sqrt{6}i+2$

$=(2-2\sqrt{3})-(\sqrt{2}+2\sqrt{6})i.$

动手实践

计算下列各式，你发现其中有什么规律吗？请将你概括出的规律与同学交流，并证明.

(1) $(3+2i)(3-2i)$；　(2) $(-2-3i)(-2+3i)$；

(3) $(-2\sqrt{2}-i)(-2\sqrt{2}+i)$；(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$.

我们可以发现，如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，那么它们的乘积是一个非负实数：

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这样的两个复数叫作**互为共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用$\overline{z}$来表示，也就是当 $z=a+bi$ 时，$\overline{z}=a-bi$. 于是

$$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2.$$

容易验证，复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，即对任意 $z_1, z_2, z_3\in\mathbf{C}$，有

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

在复数范围内，实数范围内正整数指数幂的运算律仍然成立.

即对于任意复数 z, z_1, z_2 和正整数 m, n，有

$$z^mz^n=z^{m+n},\ (z^m)^n=z^{mn},\ (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n.$$

思考交流

请验证复数的乘法法则满足结合律及乘法对加法的分配律，并与同学交流.

例 5　计算：

(1) $(1+i)^4$；　(2) $(2-i)^2(2+i)^2$.

解　(1) $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2=(2i)^2=-4$；

(2) $(2-i)^2(2+i)^2=[(2-i)(2+i)]^2=(4+1)^2=25.$

实数的除法是实数乘法的逆运算，类似地，复数的除法也是复数乘法的逆运算.

给出两个复数 $a+bi$，$c+di(c+di\neq 0)$，我们把满足等式 $(c+di)\cdot(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi$ 叫作复数 $a+bi$ 除以 $c+di$ 所得的**商**，记作 $(a+bi)\div(c+di)$ 或者 $\dfrac{a+bi}{c+di}$.

问题提出

怎样求 $(a+bi)\div(c+di)$ 呢？

分析理解

利用前面探究的共轭复数的积是一个非负数，我们可以将 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 的分子、分母同乘分母 $c+di$ 的共轭复数 $c-di$，得

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

所以

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

利用前面探究的共轭复数的积是一个非负数，我们可以在等式 $(c+di)(x+yi)=(a+bi)$ 的两边同乘 $(c-di)$，得

$$(c+di)(x+yi)(c-di)=(a+bi)(c-di),$$

计算，得

$$(c^2+d^2)(x+yi)=(ac+bd)+(bc-ad)i.$$

因为 $c+di\neq 0$，所以 $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ 是正实数，因此在上式两边同除以 c^2+d^2，得

$$x+yi=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

由此可见，复数的除法与分母有理化的方法相类似，可以用分母的共轭复数同乘分子与分母后，再进行运算.

例 6 计算：

(1) $\dfrac{-1}{2i}$；　　(2) $\dfrac{1+2i}{2-3i}$.

解 (1) $\dfrac{-1}{2i}=\dfrac{-1\times i}{2i\times i}=\dfrac{-i}{-2}=\dfrac{i}{2}$；

(2) $\dfrac{1+2i}{2-3i}=\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{-4+7i}{13}=-\dfrac{4}{13}+\dfrac{7i}{13}$.

练　习

1. 计算：

(1) $(1+3i)(3+2i)$；　　(2) $(-1-2i)(2i+4)$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$；　　(4) $(3+2i)(-3+2i)$.

2. 计算：

(1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$；　　(2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$.

3. 计算：

(1) $(-2+3i)^3$；　　(2) $(1+2i)^4$.

4. 计算：

(1) $\frac{i}{2-3i}$；　　(2) $\frac{2+i}{1-i}+\frac{1+i}{3-i}$.

习 题 4—2

A　组

1. 计算：

(1) $i+(3+4i)$；　　(2) $(1-i)-(1+i)$；

(3) $(2-i)-(3+i)$；　　(4) $(1-4i)+(2-i)$.

2. 计算：

(1) $(1+i)(3+4i)$；　　(2) $(1-2i)(1+2i)$；

(3) $(3+i)(3-2i)(1-i)$；　　(4) $[(5-4i)+(1+3i)](5+2i)$.

3. 计算：(其中 $n\in\mathbf{N}$)

(1) $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}$；　　(2) $i^{4n}\cdot i^{4n+1}\cdot i^{4n+2}\cdot i^{4n+3}$.

4. 计算：

(1) $\frac{2-3i}{i}$；　　(2) $\frac{1+i}{1-i}$；　　(3) $\frac{i-2}{2+i}$；　　(4) $\frac{3-5i}{1-2i}$.

5. 计算：

(1) $(1+2i)^2$；　　(2) $(3-4i)^2$.

6. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ 的值等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

7. 已知 a 为实数，并且$\frac{2+i}{3-ai}+\frac{1}{4}$的实部与虚部相等，求 a 的值.

B 组

1. 在复平面内，与复数 $z=3-4\mathrm{i}$ 的共轭复数对应的点位于(   ).

   A. 第一象限　　　　B. 第二象限

   C. 第三象限　　　　D. 第四象限

2. 写出下列复数的共轭复数，并在复平面上作出表示各对复数的点：

   (1) $-3+\mathrm{i}$；　　　　(2) $\sqrt{3}\mathrm{i}-2$；

   (3) $1-3\mathrm{i}$；　　　　(4) $3-4\mathrm{i}$.

3. 已知 $z_1=1-3\mathrm{i}$，$z_2=2a+4\mathrm{i}$，且 $z_2=\frac{1}{z_1}$，求复数 a.

4. 已知 m 为实数，并且 $\frac{1+m\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\frac{1}{2}$ 的实部与虚部相等，求 m.

5. 已知 $z_1=2-\mathrm{i}$，$z_2=a+\mathrm{i}$，且 $z_1=\frac{1}{z_2}$，求复数 a.

阅读材料

数的扩充

一、从自然数到复数

数系发展经历了一个漫长的历史过程，人们的生产实践和数学本身发展的需要是数系发展的动力和源泉. 克罗内克说：“上帝创造了自然数，其余的都是人的研究工作.”这就是说数学的一切研究从自然数开始. 以自然数为源头，随着社会的发展，数系得以不断扩充. 生活中的分配问题产生了分数，互相亏欠的问题产生了负数.

从无理数开始，数系的进一步扩充，动力主要来自于数学内部. 例如：求面积为 2 的正方形的边长是多少，也就是求方程 $x^2=2$ 的解的问题导致了无理数的产生；求方程 $x^2=-1$ 的解的问题促进了虚数的引入，进而产生了复数.

数系的每一次扩充，无论是源于生活、生产实践的推动，还是源于数学内部的动力，每次有新的意义的数的引入，都具有如下两个特点：

一是要符合数学学科理论发展的要求，比如数系扩充后仍然保持了原有数系中的运算法则和运算关系；

二是都具有广泛的应用和意义，比如借助复数的几何意义，人们对复数的存在得以确立，进一步在许多学科找到了它的应用.

这表明数学与生活实际、自然科学有着相互影响、相互作用的关系，数学为自然科学提供定量描述的工具，自然科学则向数学提供大量的问题.

二、四元数简介

每一个人了解到数系的扩充过程之后都会不约而同地产生一个问题：复数还能不能再扩充呢？人们自然考虑复数由两个有序实数确定，那么多个有序实数是否也能构成一个类似的数系呢？事实上从19世纪中叶开始不断有人研究所谓超复数，直到20世纪初才完成了超复数的一般理论.

四元数是比较简单的一种扩充. 它是英国数学家哈密顿(W. R. Hamilton，1805—1865)于1843年引入的. 在四元数中规定了e，i，j，k四个元(其中，e=1)，任何一个四元数 q 可以表示为

$$q = a_0\mathrm{e} + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}.\ (\text{其中},a_0,a_1,a_2,a_3\ \text{是实数})$$

在多项式乘法运算中规定各元之间的乘法关系为

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{ee} = \mathrm{e}, & \mathrm{ei} = \mathrm{i}, & \mathrm{ej} = \mathrm{j}, & \mathrm{ek} = \mathrm{k}, \\
\mathrm{ie} = \mathrm{i}, & \mathrm{ii} = -\mathrm{e}, & \mathrm{ij} = \mathrm{k}, & \mathrm{ik} = -\mathrm{j}, \\
\mathrm{je} = \mathrm{j}, & \mathrm{ji} = -\mathrm{k}, & \mathrm{jj} = -\mathrm{e}, & \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \\
\mathrm{ke} = \mathrm{k}, & \mathrm{ki} = \mathrm{j}, & \mathrm{kj} = -\mathrm{i}, & \mathrm{kk} = -\mathrm{e}.
\end{array}$$

虽然四元数的运算在很多方面都与复数的运算相类似，但是由于乘法不满足交换律，使得四元数的性质与复数的性质有很大差异.

四元数的引入给向量代数的发展以很大的推动力. 近20年来计算机图形学和机器人科学的迅速发展，使四元数得到广泛的应用，它在表示向量及旋转变换时提供了比矩阵更方便的方法. 四元数是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系. 四元数的产生对于代数学的发展是革命性的.

参考书目：

张顺燕. 数学的源与流. 北京：高等教育出版社，2000

李文林. 数学史概论. 北京：高等教育出版社，2002

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 认识数系扩充的过程，体会在数系扩充中数学与实际需求的作用与关系.

2. 理解复数的基本概念、表示方法，能进行复数的四则运算.

3. 会解实系数一元二次方程，理解韦达定理.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次地呈现.

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结，以适当方式呈现.

3. 本章复习时，可供参考的思考题：

(1) 在数系扩充的过程中，实际需求发挥了什么作用？

(2) 在数系扩充中，数学内部需求发挥了什么作用？

(3) 复数的概念是如何引入的？

(4) 如何对两个复数进行四则运算？

(5) 如何求解一般的实系数一元二次方程？实系数一元二次方程的根与系数之间有何关系？

4. 请同学们相互交流学习本章的感受，并结合自己的体会写出读书报告.

复习题四

A　组

1. 求适合下列方程的实数 x,y 的值：

(1) $(-4x+1)+(y+2)\mathrm{i}=0$；

(2) $(x-2y)-(3x+y)\mathrm{i}=3-6\mathrm{i}$.

2. 化简：i^{11}，i^{25}，i^{26}，i^{36}，i^{70}，i^{101}，i^{355}，i^{400}.

3. 计算：

(1) $(3+4\mathrm{i})+(-5-3\mathrm{i})$；　　(2) $(1-5\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$；

(3) $(-2+3\mathrm{i})+(6-5\mathrm{i})$；　　(4) $(7-\mathrm{i})-(2\mathrm{i}-3)$.

4. 计算：

(1) $(-8-7\mathrm{i})(-3\mathrm{i})$；　　(2) $(4-3\mathrm{i})(-5-4\mathrm{i})$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$；　　(4) $(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$.

5. 计算：

(1) $(1+2\mathrm{i})^2$；　　(2) $(2-3\mathrm{i})^3$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$；　　(4) $\frac{1}{\mathrm{i}}$；

(5) $\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；　　(6) $\frac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$.

6. 已知 $w=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，求 w^2-w+1 的值.

B　组

1. 计算：

(1) $\frac{\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$；　　(2) $\frac{4+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$；

(3) $\frac{1-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}-3}{1+\mathrm{i}}$；　　(4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\mathrm{i}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\mathrm{i}}$.

2. 当 $z=2+\mathrm{i}$ 时，计算 $\frac{z^2-4z+8}{z-1}$.

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
统计	statistics
回归分析	regression analysis
演绎推理	deductive inference
归纳	induction
类比	analogy
猜想	conjecture
合情推理	plausible reasoning
复数	complex number
数的扩充	extension of number
框图	block diagram
流程图	flow chart
结构图	structure diagram