经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修1-1）

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修1-1）

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志

副 主 编　张饴慈　李延林　张思明

本册主编　李延林　汪香志

编写人员　（按 姓 氏 笔 画 排 序）

任志瑜　安振平　李延林

汪香志　顿继安　薛文叙

北京師範大學出版社

·北　京·

营销中心电话　010-58802783
服务中心电话　010-58802795
邮购科电话　010-58808083
传　　真　010-58802838
学科编辑电话　010-58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnupg.com
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京市西城区新街口外大街 12-3 号
邮政编码:100088
印　　刷：江西教育印务实业有限公司
经　　销：江西省新华书店
开　　本：890mm × 1240mm　1/16
印　　张：6.75
字　　数：180 千字
版　　次：2014 年 7 月第 4 版
印　　次：2019 年 12 月第 24 次印刷
定　　价：6.10 元
ISBN 978-7-303-08072-4

责任编辑：焦继红　兰小银　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯　窦春香

前　　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20 世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由 26 册书组成：必修教材有 5 册；选修系列 1 有 2 册，选修系列 2 有 3 册，它们体现了发展的基本方向；选修系列 3 有 6 册，选修系列 4 有 10 册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为 A，B 两组；还有一类是复习题，分为 A，B，C 三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦.

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811，58802790.

目　录

第一章 常用逻辑用语

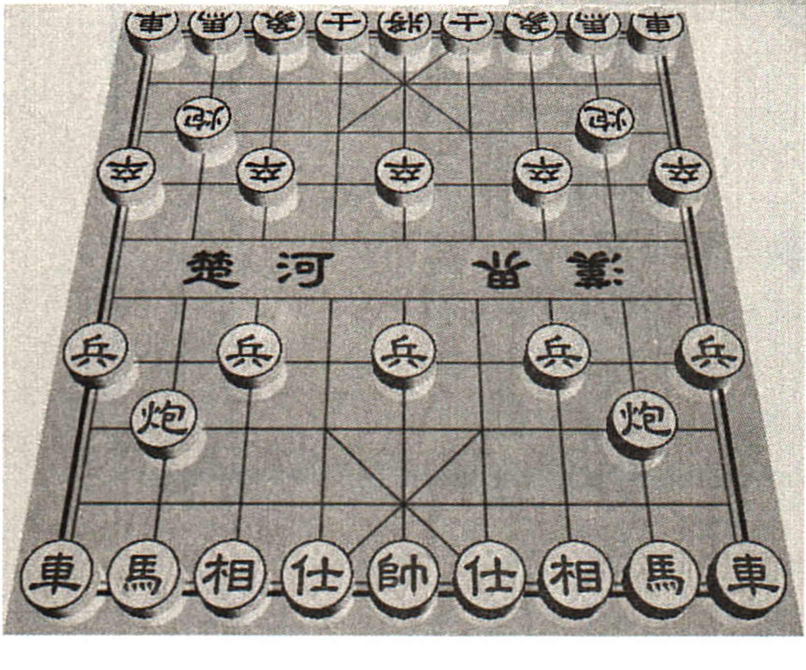
在初中的数学学习中，我们常常要思考下面的问题：

如何判断一个四边形是不是平行四边形？

我们知道，“若一个四边形两组对边分别平行，则这个四边形是平行四边形”. 在这里，条件“两组对边分别平行”是判定“四边形是平行四边形”的条件. 通常，称这类命题为判定定理. 在数学中，寻求一个“数学对象”成立的条件是一件非常基本的工作.

如何用简洁的语言清晰地表达这些思想呢？

在本章，我们将学习常用逻辑用语. 正确地使用逻辑用语，不仅能反映数学内容的逻辑关系，而且能准确地帮助我们理解和表达数学内容. 在学习常用逻辑用语的过程中，我们应当不断体会逻辑用语在表述和论证中的作用，提高表达自己思想的能力，更好地进行交流.



§1　命　　题

我们在初中已经学习过命题. 可以判断真假、用文字或符号表述的语句叫作命题. 看下面的语句：

在欧氏几何中，三角形三个内角的和等于 180°. ①

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$. ②

$\sqrt{2}\in\mathbf{N}$. ③

这些语句都可以判断真假，它们都是命题. 其中①②是正确的，是真的，叫作真命题，③是错误的，是假的，叫作假命题.

有些语句不是命题，例如下面的语句：

π 是无理数吗？（未涉及真假）

$x>1$.（不能判断真假）

一般地，一个命题由条件和结论两部分组成，例如命题①的条件是“三个角是一个三角形的内角”，结论是“它们的和等于 180°”.

数学中，通常把命题表示为“若 p，则 q”的形式，其中 p 是条件，q 是结论.

问题提出

在初中，我们还学习过命题与逆命题的知识，下面给出两个命题，请分别写出它们的逆命题，并仔细分析条件与结论，讨论它们之间有什么联系.

若 $\angle A=\angle B$，则 $\sin A=\sin B$. ④

若 $\angle A\neq\angle B$，则 $\sin A\neq\sin B$. ⑤

分析理解

命题④的逆命题是

若 $\sin A=\sin B$，则 $\angle A=\angle B$. ⑥

命题⑤的逆命题是

若 $\sin A\neq\sin B$，则 $\angle A\neq\angle B$. ⑦

分析这四个命题的条件与结论，容易发现，在命题④与命题⑤中，命题⑤的条件是命题④的条件的否定，命题⑤的结论是命题④的

结论的否定,我们把这样的两个命题叫作**互为否命题**. 若把命题④叫作原命题,则命题⑤就叫作原命题的否命题.

在命题④与命题⑦中,命题⑦的条件是命题④的结论的否定,命题⑦的结论是命题④的条件的否定,我们把这样的两个命题叫作**互为逆否命题**. 若把命题④叫作原命题,则命题⑦就叫作原命题的逆否命题.

概括地说,设命题④为原命题,那么

命题⑥为其逆命题,

命题⑤为其否命题,

命题⑦为其逆否命题.

这个例子中,原命题与逆否命题都是真命题,而逆命题与否命题都是假命题.

例 1 写出命题"对顶角相等"的逆命题、否命题和逆否命题,并判断这四个命题的真假.

分析 关键是找出原命题的条件和结论.

解 原命题可以写成"若两个角是对顶角,则这两个角相等". 如图 1-1 所示,$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角.

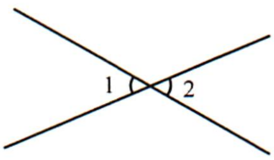


图 1-1

逆命题:若两个角相等,则这两个角是对顶角;

否命题:若两个角不是对顶角,则这两个角不相等;

逆否命题:若两个角不相等,则这两个角不是对顶角.

可见,原命题和逆否命题都是真命题,逆命题和否命题都是假命题.

例 2 设原命题是"若 $a=0$,则 $ab=0$".

(1)写出它的逆命题、否命题及逆否命题;

(2)判断这四个命题是真命题还是假命题.

解 (1)逆命题:若 $ab=0$,则 $a=0$;

否命题:若 $a\neq 0$,则 $ab\neq 0$;

逆否命题:若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$.

(2)原命题和逆否命题都是真命题,逆命题和否命题都是假命题.

四种命题之间的关系如图 1-2 所示.

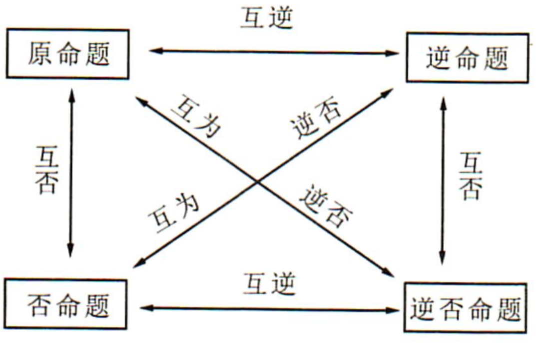


图 1-2

练　习

1. 分别写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并判断它们的真假：

(1) 若 $xy=0$，则 $x=0(x,y\in\mathbf{R})$；

(2) 若 $a=b$，则 $a^2=ab$；

(3) 若 $q\geqslant-\frac{1}{4}$，则方程 $x^2+x-q=0$ 有实数解；

(4) 负数的平方是正数；

(5) 正方形的四条边相等.

2. 设原命题是“若 $a<b$，则 $a+c<b+c$”，写出它的逆命题、否命题及逆否命题，并判断这四个命题的真假.

习 题 1—1

1. 分别写出下列命题的逆命题、否命题与逆否命题，并判断它们的真假：

(1) 若 $a-2$ 是无理数，则 a 是无理数；

(2) 矩形的两条对角线相等.

2. 判断下列命题的真假：

(1) 命题“若 $x^2+y^2=0$，则 x,y 全为 0”的逆命题；

(2) 命题“全等三角形是相似三角形”的否命题.

3. 写出命题“若 $a>b$，则 $a\neq b$”的逆命题，并判断其真假.

4. 写出命题“正方形是平行四边形”的否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

§2　充分条件与必要条件

2.1　充分条件与必要条件

先看学过的几个定理：

定理 1　如果闭区间$[a,b]$上函数 $f(x)$的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$，那么 $f(x)$在开区间(a,b)内至少存在一个零点.

定理 2　如果一条直线垂直于一个平面内两条相交直线，那么这条直线垂直于这个平面.

定理 3　如果两个平面平行，那么一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面.

定理 4　若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

以上定理都具有共同的形式：若“p”成立，则“q”一定成立. 记作“$p\Rightarrow q$”，称 p 是 q 的**充分条件**，q 是 p 的**必要条件**. 换个角度考虑，$p\Rightarrow q$，就是说，为了使 q 成立，具备条件 p 就足够了. 反过来说，一旦 q 不成立，p 一定也不成立，q 成立对于 p 成立是必要的.

例如，在定理 1 中，p：闭区间$[a,b]$上函数 $f(x)$的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$，q：函数 $f(x)$在开区间(a,b)内至少存在一个零点. 可以写成 $p\Rightarrow q$，这时，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

在定理 2 中，p：一条直线垂直于一个平面内两条相交直线，q：这条直线垂直于这个平面. 可以写成 $p\Rightarrow q$，这时，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

思考交流

对定理 3 和定理 4 进行分析理解.

2.2　充分条件与判定定理

我们已经学过很多判定定理. 例如：定理 1 是零点存在的判定定理，其作用是给出零点存在的充分条件. 定理 2 是直线与平面垂直的判定定理，其作用是给出直线与平面垂直的充分条件.

判定定理是数学中一类重要的定理，阐述了结论成立的依据，也就是说判定定理给出了结论成立的充分条件. 定理 1 可以理解为："函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少存在一个零点"的充分条件是"函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图像是连续曲线，且满足 $f(a)f(b)<0$"；定理 2 可以理解为："一条直线垂直于一个平面"的充分条件是"这条直线垂直于这个平面内两条相交直线".

思考交流

请用充分条件的语言表述下面的判定定理.

指数函数 $y=a^x(a>1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$ 且公比 $q>1$ 成立，那么这个数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

若 a,b 是非负实数，则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 在实数范围内有解.

2.3　必要条件与性质定理

前面列举的定理 3："如果两个平行平面，那么一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面"，这个定理是两个平面平行的性质定理. 在数学中，还有很多性质定理，例如：

定理 5　菱形的对角线互相垂直.

定理 6　函数 $f(x)=\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

性质定理同样是数学中一类重要的定理，阐述了一个数学研究对象所具有的重要性质，其作用是揭示这个研究对象的某个特征. 上面的三个定理分别描述了两个平行平面、菱形、正弦函数的性质. 例如，对角线互相垂直是菱形的一个重要特征. 事实上，性质定理给出了结论成立的必要条件.

这样，定理 3 可以理解为："一个平面内的直线平行于另一个平面"是"这两个平面平行"的必要条件.

思考交流

请用必要条件的语言表述下面的性质定理.

菱形的对角线互相垂直.

函数 $f(x)=\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

两条平行直线，如果斜率存在，那么它们的斜率相等.

若两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

练 习

1. 试判断下列条件中，p 是 q 的什么条件？
   (1) p：函数 $f(x)=\log_a x\,(0<a<1)$，q：函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数；
   (2) p：函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，q：函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数；
   (3) p：数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=dn+b$（d,b 为常数），q：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；
   (4) 给定直线 l 及平面 α,β，p：$l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，q：$\alpha/\!/\beta$；
   (5) p：$b^2=ac$，q：a,b,c 成等比数列.
2. 用充分条件或必要条件的语言表述下列定理或结论.
   (1) 垂直于同一个平面的两条直线平行；
   (2) 一个平面过另一个平面的垂线，则两个平面垂直；
   (3) 如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，存在唯一一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

2.4 充要条件

对于 p 和 q，如果有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，通常记作 $p\Leftrightarrow q$. 这时，p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件；同时，q 既是 p 的充分条件，也是 p 的必要条件. 我们称 p 是 q 的充分必要条件，简称**充要条件**. 也称 p 与 q 是等价的.

我们学习过一些重要的定理，条件和结论是等价的，例如：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，“$C=\frac{\pi}{2}$”是“$a^2+b^2=c^2$”的充要条件.

(2) 给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$”是“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”的充要条件.

(3) 给定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，“判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$”是“方程有两个不相等的实数解”的充要条件.

我们常用“当且仅当”来表达充要条件，p 是 q 的充要条件也可以说成：p 成立当且仅当 q 成立.

(4) “二元一次方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一一组解”是“直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 有唯一一交点”的充要条件.

在数学中，充要条件是十分重要的概念，它的作用在于从不同角度来刻画同一事物. 例如，在(3)中，一元二次方程有两个不同的实数

解可以用判别式大于 0 来等价表示；在(4)中，可以从解析几何的角度阐述二元一次方程组唯一解的问题.

思考交流1

请用充要条件的语言表述下面的定理或结论.

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴无交点，则 $b^2-4ac<0$；

(2) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

(3) 两条直线的斜率之积等于 -1，那么这两条直线垂直；

(4) $a+c=2b$，则 a,b,c 成等差数列.

给定 p,q，有时 p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件，例如，“一个数的末位数字为 0”是“这个数能被 5 整除”的充分条件但不是必要条件.

有时 p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件，例如，在直角坐标系中，“两条直线平行”是“这两条直线斜率相等”的必要条件，但不是充分条件，因为有的直线斜率不存在.

有时，p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件. 例如，“$a>b$”既不是“$a^2>b^2$”的充分条件，也不是“$a^2>b^2$”的必要条件.

思考交流2

在 2.1，2.2 和 2.3 列举的定理的条件和结论中，哪些是充要条件？哪些是充分不必要条件？哪些是必要不充分条件？

练 习

在下列各题中，试判断 p 是 q 的什么条件.

(1) $p:\dfrac{1}{x}<1$，$q:x>1$；

(2) $p:b=0$，q：函数 $y=ax^2+bx+c$ 是偶函数；

(3) $p:k>0$，q：函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 是减函数；

(4) p：平行四边形的对角线相等，q：这个平行四边形是矩形；

(5) $p:\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，$q:ad=bc$.

习 题 1—2

1. 请在“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选择一个使命题正确的填写在下面各题的横线上.

(1) 若 $A\subseteq B$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的________条件；

(2) “$x=\frac{\pi}{6}$”是“$\sin x=\frac{1}{2}$”的________条件；

(3) “$\alpha>\beta$”是“$\sin\alpha>\sin\beta$”的________条件；

(4) 在$\triangle ABC$中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的________条件；

(5) 已知直线 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，则“$k_1=k_2$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的________条件；

(6) “α 是第二象限角”是“$\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$”的________条件；

(7) “$|a|=|b|$” 是“$a=b$”的________条件；

(8) “实数 $\lambda=0$” 是“向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$”的________条件；

(9)“四边形的两条对角线相等” 是“四边形是等腰梯形”的________条件.

2. 判断下列说法是否正确：

(1) “$a\in\mathbf{N}$”是“$a\in\mathbf{Z}$”的充分条件；

(2) “两个三角形全等”是“两个三角形相似”的充分条件；

(3) “直线 $a\perp$ 平面 α，直线 $b\perp$ 平面 α”是“直线 a，b 平行”的充分条件.

3. 填空题.

(1)“一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个正根和一个负根”的一个充分不必要条件是________；

(2)“两个平面 α 和 β，$\alpha /\!/ \beta$”的一个必要不充分条件是________；

(3)“函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数”的充要条件是________.

4. 选择某一章的内容，用充分条件、必要条件或充要条件的语言梳理其中的重要结论，并交流讨论.

§3　全称量词与存在量词

3.1　全称量词与全称命题

分析理解

在数学中，常常见到下列形式的命题：

(1) 所有正方形都是矩形；

(2) 每一个有理数都能写成分数的形式；

(3) 任何实数乘 0 都等于 0；

(4) 如果直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线，那么直线 l 垂直于平面 α；

(5) 一切三角形的内角和都等于 180°.

在以上命题的条件中，"所有""每一个""任何""任意一条""一切"都是在指定范围内，表示整体或全部的含义，这样的词叫作**全称量词**. 像这样含有全称量词的命题，叫作**全称命题**.

在某些全称命题中，有时全称量词可以省略. 例如：

末位数字是偶数的整数能被 2 整除；

正方形是矩形；

球面是曲面.

全称量词，可用符号"∀"表示. 全称命题"对实数中任意一个 x，有 $x^2+1\geqslant 1$ 成立"可用符号简记为

$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\geqslant 1$，

读作"对任意 x 属于 $\mathbf{R}$，有 $x^2+1\geqslant 1$ 成立".

3.2　存在量词与特称命题

还有一些数学命题，反映对个体或整体的一部分的判断. 例如：

有些三角形是直角三角形；

如果两个数的和为正数，那么这两个数中至少有一个是正数；

在素数中，有一个是偶数；

存在实数 x，使得 $x^2+x-1=0$.

在以上命题中，"有些""至少有一个""有一个""存在"都有表示个别或一部分的含义，这样的词叫作**存在量词**. 像这样含有存在量词的命题，叫作**特称命题**.

存在量词，可用符号"∃"表示. 特称命题"存在 M 中的一个 x，使 $p(x)$ 成立"可用符号简记为

$\exists x\in M, p(x)$，

读作"存在一个 x 属于 M，使 $p(x)$ 成立".

思考交流

请举出一些全称命题和特称命题，并与同学交流.

例 1 判断下列命题哪些是全称命题，哪些是特称命题：

(1) 奇数是整数；

(2) 偶数能被 2 整除；

(3) 至少有一个素数不是奇数.

解 (1)“奇数是整数”是指“所有的奇数都是整数”，所以它是全称命题；

(2)“偶数能被 2 整除”是指“每一个偶数都能被 2 整除”，所以它是全称命题；

(3)“至少有一个素数不是奇数”是特称命题.

练 习

判断下列命题是全称命题还是特称命题：

(1) 方程 $x^2+x-1=0$ 的两个解都是实数解；

(2) 每一个一元一次方程 $ax+b=0$ 都有解；

(3) 有一个实数，不能作除数；

(4) 末位数字是 0 或 5 的整数，能被 5 整除；

(5) 棱柱是多面体；

(6) 对于所有的自然数 n，代数式 n^2-2n+2 的值都是正数.

3.3 全称命题与特称命题的否定

我们来看这样的一个命题：“所有的奇数都是素数.”

显然，这个命题是错误的. 我们只需要指出“有一个奇数不是素数”，就可以说明“所有的奇数都是素数”这个全称命题是错误的.

又如，要把命题“数列 1，2，3，4，5，… 的每一项都是偶数”加以否定，只需说明“数列 1，2，3，4，5，… 中有一项不是偶数”就可以了.

要把命题“集合$\{-2,-1,0,1,2\}$中的数都大于 0”加以否定，只需说明“集合$\{-2,-1,0,1,2\}$中有一个数不大于 0”就可以了.

要把命题“一元二次不等式都有实数解”加以否定，只需说明“有一个一元二次不等式没有实数解”就可以了.

抽象概括

在上述例子中，要说明一个全称命题是错误的，只需找出一个反例就可以了. 实际上是要说明这个全称命题的否定是正确的.

不难发现，全称命题的否定是特称命题.

我们来看命题："10，10^2，10^3，10^4，10^5 中有一个数能被 3 整除."

显然，这个命题是错误的.

我们只需要指出 10，10^2，10^3，10^4，10^5 中的每一个数都不能被 3 整除，就可以说明"10，10^2，10^3，10^4，10^5 中有一个数能被 3 整除"这个特称命题是错误的.

要把命题"方程 $x^2-5x+6=0$ 至少有一个负实根"加以否定，只需说明，"方程 $x^2-5x+6=0$ 的每一个实根都不是负的".

抽象概括

在上述例子中，要说明一个特称命题"存在一些对象满足某一性质"是错误的，就要说明所有的对象都不满足这一性质. 实际上是要说明这个特称命题的否定是正确的.

不难发现，特称命题的否定是全称命题.

例 2　写出下列全称命题和特称命题的否定：

(1) 三个给定产品都是次品；

(2) 方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数.

分析　(1) "三个给定产品都是次品"是一个全称命题，要否定它，只需说明"在这三个给定产品中，有一个产品不是次品"即可；

(2) "方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数"是一个特称命题，要否定它，只需说明"方程 $x^2-8x+15=0$ 的每一个根都不是偶数"即可.

解　(1) 命题"三个给定产品都是次品"的否定是：三个给定产品中至少有一个是正品；

(2) 命题"方程 $x^2-8x+15=0$ 有一个根是偶数"的否定是：方程 $x^2-8x+15=0$ 的每一个根都不是偶数.

练 习

写出下列命题的否定：

(1) 三个数 $-3, 2.5, \sqrt{2}$ 中，至少有一个数不是自然数；

(2) 对任意一个实数 x，都有 $2x+4 \geqslant 0$.

习 题 1—3

1. 判断下列命题是全称命题还是特称命题：

   (1) 一切分数都是有理数；

   (2) 有些三角形是锐角三角形；

   (3) 菱形都是正方形；

   (4) 对任何实数 x，都有 $x^2-2x+1 \geqslant 0$；

   (5) 至少有一个实数 x，使 $x^2-2=0$；

   (6) 存在实数 x，使 $x^2+2x+2 \leqslant 0$.

2. 找出第 1 题中的假命题，并进行否定.

3. 设原命题为“二次方程都有实数解”：

   (1) 写出它的逆命题、否命题和逆否命题；

   (2) 判断这四个命题的真假；

   (3) 写出上述假命题的否定.

4. 指出下列命题是全称命题还是特称命题，并对这些命题进行否定：

   (1) 我们班每个同学的身高都超过 1.85 m；

   (2) 我们组没有女生；

   (3) 学生会中至少有 1 名高二年级的学生.

5. 请你举出几个生活中的全称命题或特称命题，并对这些命题进行否定.

§4　逻辑联结词“且”“或”“非”

本节，我们将学习使用逻辑联结词“且”“或”“非”，并用它们构造新的命题.

4.1　逻辑联结词“且”

实例分析

我们看下面的例子：

p：菱形对角线互相垂直，q：菱形对角线互相平分.

我们可以用“且”联结这两个命题，得出新命题：

“菱形对角线互相垂直且菱形对角线互相平分”，即“菱形对角线互相垂直且平分”.

这个新命题与原来两个命题的关系是：

当两个命题 p 和 q 都是真命题时，这个新命题就是真命题；

在两个命题 p 和 q 之中，只要有一个是假命题时，这个新命题就是假命题.

由于“菱形对角线互相垂直”和“菱形对角线互相平分”都是真命题，所以，“菱形对角线互相垂直且平分”是真命题.

抽象概括

从上述例子可以看出，用“且”联结两个命题 p 和 q，构成一个新命题“p 且 q”. 当两个命题 p 和 q 都是真命题时，新命题“p 且 q”是真命题；在两个命题 p 和 q 之中，只要有一个命题是假命题，新命题“p 且 q”就是假命题.

“p 且 q”记作“$p\wedge q$”，读作“p 且 q”.

例 1　对下列各组命题，利用逻辑联结词“且”构造新命题，并判断新命题的真假：

（1）p：12 是 3 的倍数，q：12 是 4 的倍数；

（2）p：$\pi>3$，q：$\pi<2$.

解　（1）新命题：“12 是 3 的倍数且 12 是 4 的倍数”，是真命题；

(2) 新命题："π 大于 3 且小于 2"，是假命题.

4.2 逻辑联结词"或"

实例分析

我们看下面的例子，有两个命题：

p：一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根，q：一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相同的实根.

我们可以用"或"联结这两个命题，得出新命题：

"一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根或两个相同的实根"，即"一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个实根".

这个新命题与原来两个命题的关系是：

在 p 和 q 之中，只要有一个是真命题，这个新命题就是真命题；

当 p 和 q 都是假命题时，这个新命题就是假命题.

由于"一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个不同的实根"是假命题，"一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相同的实根"是真命题，所以，"一元二次方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个实根"是真命题.

抽象概括

从上述例子可以看出，用"或"联结两个命题 p 和 q，构成一个新命题"p 或 q". 在两个命题 p 和 q 之中，只要有一个命题是真命题，新命题"p 或 q"就是真命题；当两个命题 p 和 q 都是假命题时，新命题"p 或 q"是假命题.

"p 或 q"记作"$p \vee q$"，读作"p 或 q".

例 2 对下列各组命题，利用逻辑联结词"或"构造新命题，并判断新命题的真假：

(1) p：正数的平方大于 0，q：负数的平方大于 0；

(2) p：$3>4$，q：$3<4$；

(3) p：π 是整数，q：π 是分数.

解 (1) 新命题："正数或负数的平方大于 0"，即"非零实数的平方大于 0"，是真命题；

(2) 新命题："$3>4$ 或 $3<4$"，即"$3\neq4$"，是真命题；

(3) 新命题："π 是整数或分数"，即"π 是有理数"，是假命题.

4.3　逻辑联结词"非"

实例分析

我们看下面的例子：

(1) p：平面内垂直于同一直线的两条直线平行，q：平面内垂直于同一直线的两条直线不平行；

(2) p：$y=\sin x(x\in\mathbf{R})$是周期函数，q：$y=\sin x(x\in\mathbf{R})$不是周期函数.

上面两组命题中，命题 q 是对命题 p 的否定，我们称命题 q 是命题 p 的**非命题**. 在命题和它的非命题中，有一个且只有一个是真命题. 在(1)中，p 是真命题，q 是假命题；在(2)中，p 是真命题，q 是假命题.

抽象概括

一般地，对命题 p 加以否定，就得到一个新命题，记作 $\neg p$，读作"非 p".

一个命题 p 与这个命题的否定 $\neg p$，必然一个是真命题，一个是假命题. 一个命题的否定的否定仍是原命题.

在数学中，逻辑联结词"且""或""非"不一定联结命题. 有时我们也可以用它们联结一些"条件"，形成一些新的条件. 例如：

(1) "$x>3$"且"$x<5$"，它表示的是："$3<x<5$"；

(2) "$x<0$"或"$x>5$"，它表示的是："$x<0$ 或 $x>5$"；

(3) "$x<0$"的否定，它表示的是："$x\geqslant 0$".

练　习

试举出日常生活中和"且""或"有关的命题.

习 题 1—4

1. 用适当的逻辑联结词填空：

(1) 若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$；

(2) 若 $ab=0$，则 $a=0$ ________ $b=0$；

(3) 平行四边形的一组对边平行________相等.

2. 写出下列各组命题的“p 或 q”“p 且 q”“非 p”形式的命题，并判断其真假：

(1) p：24 是 8 的倍数，q：24 是 6 的倍数；

(2) p：矩形的对角线相等，q：矩形的对角线互相平分；

(3) p：正方形的四条边相等，q：正方形的四个角相等；

(4) p：π 是无理数，q：π 是有理数.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题，会分析四种命题的相互关系．

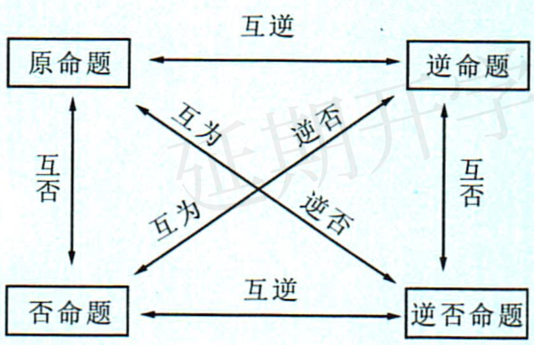
2. 理解充分条件、必要条件与充要条件的意义．

3. 理解全称量词与存在量词的意义，能正确地对含有一个量词的命题进行否定．

4. 通过数学实例，了解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义．

二、复习建议

1. 四种命题之间的关系：



一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三个关系：

(1) 原命题为真，它的逆命题不一定为真；

(2) 原命题为真，它的否命题不一定为真；

(3) 原命题为真，它的逆否命题一定为真．

由此可知，互为逆否的两个命题一定同为真或同为假．

2. 举出一些学习过的判定定理、性质定理、反映“充要条件”的定理，体会充分条件、必要条件与充要条件的意义．

注

在数学中，常有一些含有变量 x 的语句，如 $x+2=0$. 像这样含有变量的语句，可用 $p(x)$，$q(x)$…表示.

3. 同一个全称命题或特称命题，由于自然语言的不同，可以有不同的表述方法，在应用中可以灵活选择.

命题	全称命题	特称命题
表述方法	(1) 所有的 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (2) 对一切 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (3) 对每一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (4) 任意一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (5) 若 $x\in A$，则 $p(x)$ 成立	(1) 存在 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (2) 至少有一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (3) 对有些 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (4) 对某个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立； (5) 有一个 $x\in A$，使 $p(x)$ 成立

4. 否定命题时，要注意特殊的词，如“全”“都”等. 常见关键词及其否定形式如下表.

关键词	否定词	关键词	否定词
等于	不等于	大于	不大于
能	不能	小于	不小于
至少有一个	一个都没有	至多有一个	至少有两个
都是	不都是	是	不是
没有	至少有一个	属于	不属于

复习题一

A　组

1. 从“充分不必要条件”“必要不充分条件”或“充要条件”中选择一项填在下列括号内：

(1)“a 是有理数”是“a 是实数”的(　　　　　)；

(2)“$x^2-4=0$”是“$x=-2$”的(　　　　　)；

(3)“$x^2-4=0$”是“$|x|=2$”的(　　　　　)；

(4)“$A\cup B=B$”是“$A=\varnothing$”的(　　　　　).

2. “$a=1$”是“函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. “$a+b>2c$”的一个充分条件是(　　).

A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

4. “$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，试从下列各条件中，选出“a,b 都不等于 0”的必要条件，以及“a,b 都等于 0”的充要条件：

(1) $a+b=0$；　(2) $a^2+b^2>0$；　(3) $ab=0$；

(4) $ab\neq 0$；　(5) $\sqrt{a^2+b^2}=0$；　(6) $a^2+b^2=0$.

6. 写出下列各命题的否定：

(1) 1 994 与 2 000 都是 5 的倍数；

(2) 任何一个整数，都是奇数；

(3) 存在一个实数 a，能使 $a^2+1=0$ 成立；

(4) 每一个数列都是等差数列；

(5) 每个数列都有一项为“1”；

(6) 任何有理数都是实数.

7. 请用逻辑联结词“且”“或”“非”构造 3 个命题，并说出它们的真假.

B　组

1. 求证：“关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一解为 1”的充要条件是“$a+b+c=0$”.

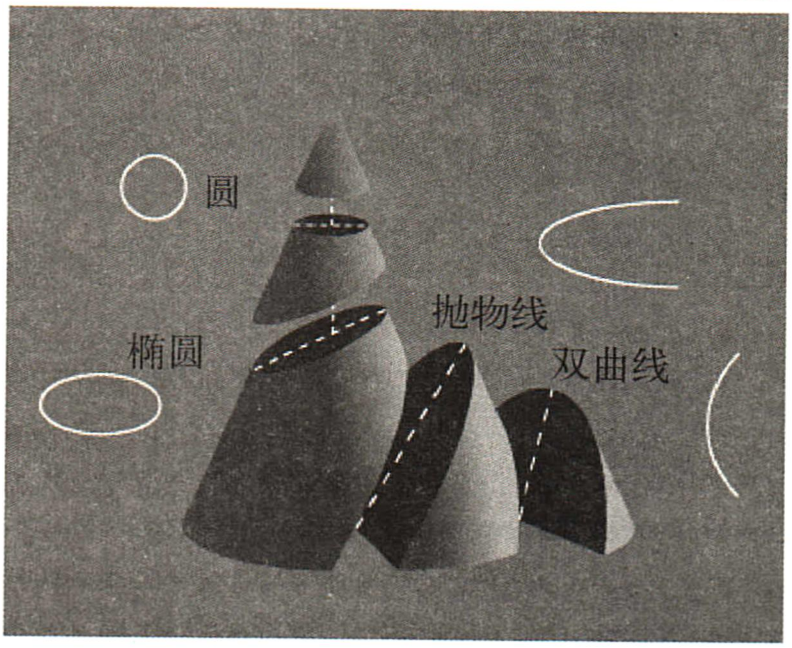
2. 写出命题“若 a,b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆命题、否命题及逆否命题，并判断它们的真假.

第二章 圆锥曲线与方程

1609 年，德国天文学家开普勒发现许多天体的运行轨道是椭圆；在这一时期，意大利物理学家伽利略发现抛掷物体的轨迹是抛物线；法国科学家买多尔日发展了圆锥曲线在光学中的应用．随着人们对圆锥曲线的进一步认识，圆锥曲线的应用越来越广泛．例如，油罐汽车装油罐的截面周界是椭圆；人造喷泉喷出的水形成抛物线；发电站的冷却塔的轴截面两侧边沿是双曲线等．

我们用平面去截圆锥，由于截面与圆锥轴的夹角不同，所得截面的周界分别是圆、椭圆、抛物线、双曲线，所以，人们通常把圆、椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**．

本章我们将对圆锥曲线及其性质做一些研究，并运用这些性质解决一些实际问题．



§1 椭圆

1.1 椭圆及其标准方程

我们对"椭圆形状"并不陌生，某些汽车徽标、盘子、镜子(图 2-1)等，以及月亮围着地球绕行的轨道、篮球在阳光下的投影(图 2-2)等.

图 2-1

图 2-2

如何确切地描述椭圆呢？通过用平面斜截圆柱所得的截面是定义椭圆的一种方式.

一、椭圆的定义

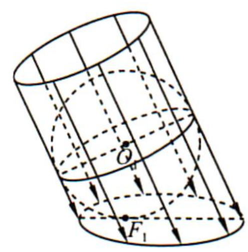


图 2-3

对于篮球在阳光下的投影，我们可以把太阳光看成一束平行光，如图 2-3 所示，照射在篮球上的平行光线可以抽象为一个斜放的圆柱，篮球面抽象为一个球面，球心记作 O_1. 篮球面与地面的接触点抽象为球与平面的切点 F_1，影子就恰是圆柱面被平面斜截的截面，截面的边界线称为椭圆.

对于图 2-3 所示的几何模型，把圆柱面延伸，在截面下面也放一个与圆柱面和截面都相切，且同样大小的球，球心记作 O_2，该球与截面的切点记为 F_2，如图 2-4 所示.

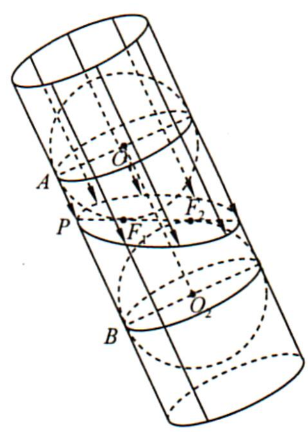


图 2-4

两个球与圆柱面的切点分别构成了两个圆，圆心分别是球心 O_1，O_2，若 P 为椭圆上一点，过点 P 作圆柱的母线，分别交$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 于 A，B 两点，则 PA，PF_1 是球 O_1 的切线段，所以 $PA=PF_1$. 同理 PB，PF_2是球 O_2 的切线段，有 $PB=PF_2$，因此，$PF_1+PF_2=AB$，又 $AB=O_1O_2$，由此可以发现椭圆上的点到两切点 F_1，F_2 的距离之和是定值 O_1O_2.

动手实践

我们已经知道用一根细绳和一支笔就可以画出圆，那么仍然使用这些简单工具你能画出椭圆吗？

将一条绳子的两端固定在同一个定点上，用笔尖勾起绳子的中点使绳子绷直，围绕定点旋转，笔尖形成的轨迹是一个圆.（图 2-5）如果我们将绳子的两端分别固定在两个定点上，用笔尖勾直绳子，使笔尖移动，得到的轨迹就是一个椭圆.（图 2-6）

注

通常我们将合乎某条件的点的集合也叫作合乎某条件的点的轨迹.

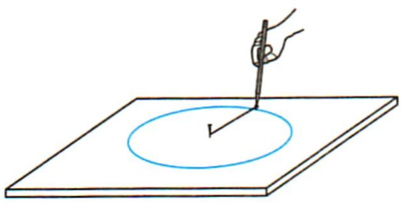


图 2-5

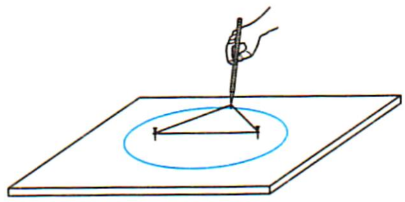


图 2-6

定义 **我们把平面内到两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的集合叫作椭圆.**

这两个定点 F_1，F_2 叫作**椭圆的焦点**，两个焦点 F_1，F_2 间的距离叫作**椭圆的焦距**.

思考交流

定义中的常数为什么要大于焦距 $|F_1F_2|$？

二、椭圆的标准方程

下面，我们根据椭圆的定义来求它的方程.

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，椭圆上任意一点到两个焦点 F_1，F_2 的距离之和为常数 $2a(a>c)$.

分析理解

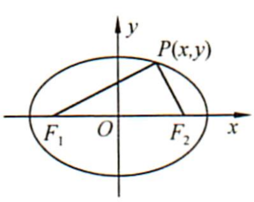


图 2-7

首先，建立平面直角坐标系.

如图 2-7，作直线 F_1F_2 和线段 F_1F_2 的垂直平分线，设 P 为椭圆上一点，根据椭圆的定义，P 关于这两条直线的对称点也都在椭圆上，即这两条直线是椭圆的对称轴. 因此，以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,0)$，$(c,0)$.

椭圆和 x 轴、y 轴分别有两个交点 A_1，A_2 和 B_1，B_2（图 2-8）.

根据椭圆的定义和椭圆的对称性，$|A_2F_1|+|A_2F_2|=2a$，且 $|A_1F_1|=|A_2F_2|$，所以 $|A_1A_2|=|A_1F_1|+|A_2F_1|=2a$，即 $|A_2O|=|OA_1|=a$.

因为 $|B_2F_1|+|B_2F_2|=2a$，且 $|B_2F_1|=|B_2F_2|$，所以 $|B_2F_2|=|B_2F_1|=a$，

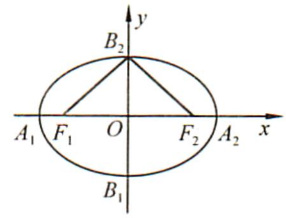


图 2-8

于是有　$|B_2O|=\sqrt{|B_2F_2|^2-|OF_2|^2}=\sqrt{a^2-c^2}$.

为方便起见，记 $|B_2O|=b$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}$，从而 $b^2=a^2-c^2$.

说　明

记 $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 可以使方程变得简单整齐.

这样，可以得到 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$.

设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，由椭圆的定义可知点 P 满足

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

因为 $|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

两边平方、整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

上式两边平方、整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2,$$

即

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2 可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0).$$

这说明椭圆上点的坐标满足这个方程. 我们还可以证明，以这个方程的每一组解为坐标的点都在椭圆上.

抽象概括

椭圆上任意一点的坐标都是方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的解；以方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的解为坐标的点都在椭圆上. 我们将方程

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)}$$

叫作**椭圆的标准方程**，焦点坐标是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$.

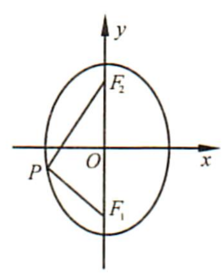


图 2-9

如果椭圆的焦点在 y 轴上，如图 2-9，其焦点坐标为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，用同样的方法也可以推出它的标准方程

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0),$$

其中 $b^2=a^2-c^2$.

思考交流

1. 当椭圆定义中的常数 $2a$ 为定值时，焦距 $2c$ 的变化与椭圆形状的变化有何关系？

2. 回顾椭圆方程的推导过程，有哪些主要步骤？

练 习 1

1. 利用定义画一个椭圆，使其焦距等于 2 cm，椭圆上的点到两焦点的距离之和等于 4 cm.
2. 已知两定点之间的距离为 5 cm，动点到两定点距离之和为 5 cm，那么动点的轨迹是椭圆吗？
3. 平面内两定点的距离为 6，一动点 M 到两定点的距离之和等于 10. 建立适当的直角坐标系，写出动点 M 满足的轨迹方程，并画出草图.
4. 一束光线垂直于一个墙面，将一块圆形纸板置于光源与墙面之间，墙面上会出现纸板的影子，转动纸板，变化纸板与光线之间的角度，影子的形状也会发生变化. 观察这些影子会出现哪些不同的形状.

例 1 已知 B，C 是两个定点，$|BC|=8$，且△ABC 的周长等于 18. 求顶点 A 满足的一个方程.

解 由已知 $|AB|+|AC|+|BC|=18$，$|BC|=8$，得

$$|AB|+|AC|=10.$$

由定义可知点 A 的轨迹是一个椭圆，且

$$2c=8,\quad 2a=10,$$

即

$$c=4,\quad a=5.$$

所以

$$b^2=a^2-c^2=9.$$

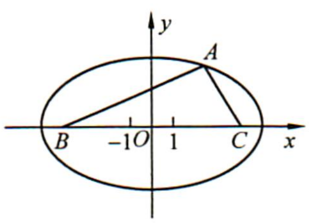


图 2-10

如图 2-10，建立平面直角坐标系，使 x 轴经过 B，C 两点，原点 O 为 BC 的中点.

当点 A 在直线 BC 上，即 $y=0$ 时，A，B，C 三点不能构成三角形. 因此，点 A 满足的一个方程是

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad (y\neq 0).$$

例 2 求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 两个焦点的坐标分别是 $(-3,0)$，$(3,0)$，椭圆上一点 P 到两焦点的距离之和等于 10；

(2) 过点 $P(-3,2)$，且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的焦点.

解　(1) 因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

因为 $2a=10$，$2c=6$，即　$a=5$，$c=3$，

所以　　　　$b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16.$

所求椭圆(图 2-11)的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

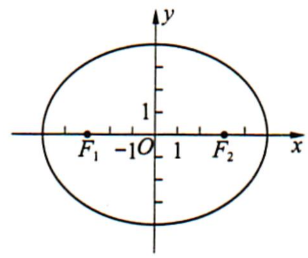


图 2-11

(2) 因为所求的椭圆与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点相同，所以其焦点在 x 轴上，且 $c^2=5$.

设所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

因为所求椭圆过点 $P(-3,2)$，

所以有　　　　$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1.$　　①

又因为　　　　$a^2-b^2=c^2=5$，　　②

由①②解得

$$a^2=15, b^2=10.$$

所求椭圆(图 2-12)的标准方程为

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1.$$

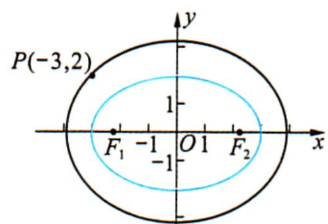


图 2-12

练　习　2

1. 如果椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 6，则点 P 到另一个焦点 F_2 的距离是______.

2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

(1) $a=\sqrt{5}$，$b=1$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦点坐标为 $(0,-4)$，$(0,4)$，$a=5$.

3. 求过点 $P(2\sqrt{5},2\sqrt{3})$，且与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 有相同焦点的椭圆的标准方程.

1.2 椭圆的简单性质

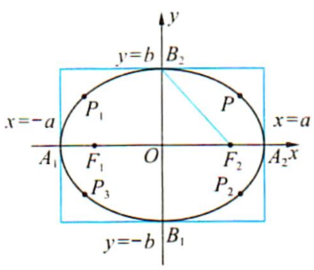


图 2-13

通过对椭圆标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和它的图像(图2-13)的研究，可得到以下性质：

1. 对称性

在上一节，由椭圆的定义及其图像认识到了椭圆的对称性．下面，我们从椭圆的方程进一步认识椭圆的对称性．

根据椭圆方程的结构特点，可以发现：若(x_0,y_0)是方程的一组解，即$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，则$(-x_0,y_0)$，$(x_0,-y_0)$，$(-x_0,-y_0)$也是方程的解，这说明若点$P(x_0,y_0)$在椭圆上，则点$P$分别关于$y$轴、$x$轴、原点$O$的对称点$P_1(-x_0,y_0)$，$P_2(x_0,-y_0)$，$P_3(-x_0,-y_0)$也在椭圆上．所以，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是关于$x$轴、$y$轴的轴对称图形，也是关于坐标原点$O$的中心对称图形．

2. 范围

椭圆上所有的点都位于直线$x=\pm a$，$y=\pm b$所围成的矩形内，所以椭圆上点的坐标满足$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$．

3. 顶点

椭圆与它的对称轴的交点叫作**椭圆的顶点**．

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的四个顶点的坐标分别为

$$A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b).$$

这四个特殊点，可以确定椭圆的具体位置．

线段A_1A_2，B_1B_2分别叫作椭圆的**长轴**和**短轴**，且

$$|A_1A_2|=2a,\ |B_1B_2|=2b.$$

a和b分别叫作椭圆的**长半轴长**和**短半轴长**．它们反映了参数a，b的几何意义．

由于$b^2=a^2-c^2$，a，b，c就是图2-13中$\mathrm{Rt}\triangle OB_2F_2$的三边长．它们从另一角度反映了参数$a$，$b$，$c$的几何意义．

4. 离心率

由参数a，b，c的关系知道：a，c的大小可反映椭圆“扁的程度”．我们规定椭圆的焦距与长轴长度的比叫作**椭圆的离心率**，用e表示，即$\frac{c}{a}=e$，显然$0<e<1$．e越接近1，椭圆就越扁．

例 3　求椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标，并用描点法画出它的图像.

解　将已知方程化为椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

则　$a=5$，$b=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是

$$2a=10,\ 2b=6;$$

离心率是

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5};$$

两个焦点分别是

$$F_1(-4,0),\ F_2(4,0);$$

椭圆的四个顶点分别是

$$A_1(-5,0),\ A_2(5,0),\ B_1(0,-3),\ B_2(0,3).$$

将方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，由 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$，在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内计算出一些点的坐标 (x,y)，如表 2-1.

表 2-1

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2.9	2.7	2.4	1.8	0

先用描点法画出椭圆在第一象限内的图像，再利用对称性画出整个椭圆.（图 2-14）

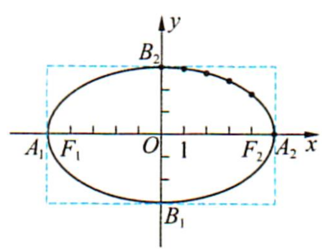


图 2-14

例 4　求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴在 x 轴上，长轴的长等于 12，离心率等于 $\frac{2}{3}$；

(2) 经过点 $P(-6,0)$ 和 $Q(0,8)$.

解　(1) 由已知　$2a=12$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，得

$$a=6,\ c=4,$$

从而

$$b^2=a^2-c^2=20.$$

所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

(2) 由椭圆的几何性质可知，以坐标轴为对称轴的椭圆与坐标轴的交点就是椭圆的顶点，所以 P，Q 分别是椭圆的短轴和长轴的一个端点，于是有

$$b=6,\ a=8,$$

且短轴、长轴分别在 x 轴和 y 轴上，所以椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{36}=1.$$

例 5 2003 年 10 月 15 日，我国自行研制的载人宇宙飞船“神舟”五号在酒泉卫星发射中心成功升空，实现了中华民族千年的飞天梦．飞船进入的是距地球表面近地点高度约 200 km，远地点约 350 km 的椭圆轨道（地球半径约为 6 370 km）．求椭圆轨道的标准方程．（精确到 0.1 km）（注：地球球心位于椭圆轨道的一个焦点）

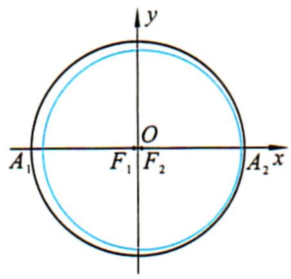


图 2-15

解 如图 2-15，地球的球心为椭圆轨道右焦点 F_2，近地点、远地点分别为 A_2，A_1，以 A_1A_2 的中点为原点，建立平面直角坐标系，使 F_2，A_1，A_2 都在 x 轴上，则

$$|F_2A_2|=a-c=200+6\ 370,$$
$$|A_1F_2|=a+c=350+6\ 370,$$

所以 $$a=6\ 645,\ c=75,$$

从而 $$b^2=a^2-c^2=6\ 645^2-75^2=44\ 150\ 400.$$

椭圆轨道的标准方程为

$$\frac{x^2}{44\ 156\ 025}+\frac{y^2}{44\ 150\ 400}=1.$$

练 习

1. 说出椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 的焦点和顶点坐标．

2. 求适合下列条件的椭圆标准方程，并画出草图：

   (1) $a=6$，$e=\frac{1}{3}$；

   (2) $c=3$，$e=\frac{3}{5}$，焦点在 y 轴上；

   (3) 长轴长是短轴长的 3 倍，椭圆经过点 $P(3,0)$；

   (4) 椭圆的一个焦点到长轴两端点的距离分别为 10 和 4．

习 题 2—1

A 组

1. 平面内两定点的距离为 6，一动点 M 到两定点的距离之和等于 10．建立适当的平面直角坐标系，写出动点 M 满足的方程，并画出草图．
2. 已知椭圆的焦点 F_1，F_2 分别为 $(-10,0)$，$(10,0)$，且椭圆上的动点 M 到两焦点 F_1，F_2 的距离之和等于 24．求椭圆的标准方程，并画出草图．
3. 求满足下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

   (1) 椭圆的一个焦点为 $(-4,0)$，且与 x 轴的交点是 $(5,0)$；

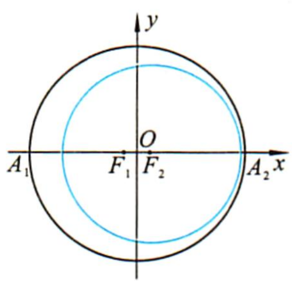
   (2) 椭圆的两个焦点分别是 $(0,-3)$，$(0,3)$，椭圆上的点到两个焦点的距离之和为 10．
4. 椭圆的两个焦点在坐标轴上，且经过点 $M(-2,\sqrt{3})$ 和 $N(1,2\sqrt{3})$．求椭圆的标准方程，并画出草图．
5. 求满足下列条件的椭圆的标准方程，并画出草图：

   (1) $a=10$，$e=\dfrac{3}{5}$，焦点在 x 轴上；

   (2) 两焦点坐标分别是 $(0,-2\sqrt{2})$，$(0,2\sqrt{2})$，并且椭圆经过点 $(-\sqrt{21},-3)$；

   (3) 长轴长是短轴长的 2 倍，椭圆经过点 $P(3,0)$．
6. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图：

   (1) $x^2+4y^2=16$； (2) $9x^2+y^2=81$．
7. $\triangle ABC$ 两个顶点 A，B 的坐标分别是 $(-6,0)$，$(6,0)$，边 AC，BC 所在直线的斜率之积等于 $-\dfrac{4}{9}$．求顶点 C 的轨迹方程，并画出草图．
8. 我国第一颗人造地球卫星的运行轨道是以地心（地球的中心）F_2 为一个焦点的椭圆（如图），已知它的近地点 A_2（离地面最近的点）距地面 439 km，远地点 A_1（离地面最远的点）距地面 2 384 km，并且 A_2，F_2，A_1 在同一直线上，地球的半径约为 6 370 km．求卫星运行轨道的方程．（精确到 1 km）



（第 8 题）

B 组

1. 分别作出下列方程表示的图形：

   (1) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$； (2) $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$．
2. 地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50\times10^8$ km，离心率 $e=0.02$ 的椭圆，太阳在这个椭圆的一个焦点上．求地球到太阳的最远距离和最近距离．（地球、太阳近似看成是点）

§2 抛物线

2.1 抛物线及其标准方程

一、抛物线的定义

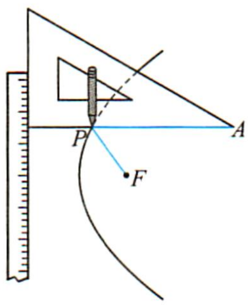


图 2-16

我们在初中学过，二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$的图像是一条抛物线.斜抛物体在没有空气阻力的情况下，其轨迹是抛物线，如铅球、足球的运行轨迹等；有些拱桥、雷达的天线等也是利用抛物线的原理制成的.

动手实践

如图 2-16，把一根直尺固定在画板上面，把一块三角板的一条直角边紧靠在直尺的边缘，取一根细绳，它的长度与另一直角边相等，细绳的一端固定在顶点 A 处，另一端固定在画板上点 F 处.

用铅笔尖扣紧绳子，靠住三角板，然后将三角板沿着直尺上下滑动，笔尖就在画板上描出了“抛物线”的一段.

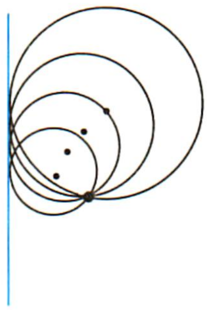


图 2-17

定义　平面内与一个定点 F 和一条直线 l(l 不过 F)的距离相等的点的集合叫作抛物线.

这个定点 F 叫作**抛物线的焦点**，这条定直线 l 叫作**抛物线的准线**.

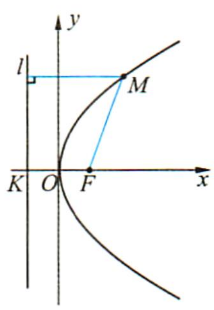


图 2-18

思考交流

观察图 2-17，如何用数学语言加以描述，请与同学交流.

二、抛物线的标准方程

根据抛物线的定义，我们建立如图 2-18 所示的平面直角坐标系，准线 l 与 x 轴垂直，垂足为 K，焦点 F 在 x 轴上，KF 的中点为坐标系的原点 O.

设 $|KF|=p\ (p>0)$，则焦点 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

设点 $M(x,\ y)$ 是抛物线上任意一点，点 M 到 l 的距离为 d. 由抛物线的定义，抛物线上的点 M 满足

$$|MF|=d.$$

因为 $\quad |MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$

所以 $$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$\boxed{y^2=2px\ (p>0).}$$

这就是说抛物线上点的坐标都满足这个方程；反之，可以证明，以这个方程的解为坐标的点都在抛物线上. 这个方程叫作**抛物线的标准方程**. 这条抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，它的准线方程是

$$x=-\frac{p}{2},$$

其中 p 是焦点到准线的距离.

例 1　根据下列条件求抛物线的标准方程：

(1) 已知抛物线的焦点坐标是 $F(2,0)$；

(2) 已知抛物线的准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

解　(1) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

其焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，根据题意有 $\frac{p}{2}=2$，故 $p=4$.

所求抛物线的标准方程为

$$y^2=8x.$$

(2) 设抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

其准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$，由题意有 $-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$，故 $p=3$.

所求抛物线的标准方程为

$$y^2=6x.$$

思考交流

初中学习的二次函数与现在研究的抛物线方程有什么关系？

练 习

1. 已知抛物线的焦点在 x 轴正半轴上，焦点到准线的距离为 3. 求抛物线的标准方程.
2. 焦点是(3,0)的抛物线的标准方程是____________；准线方程是 $x=-2$ 的抛物线的标准方程是____________.
3. 写出准线方程是 $x=-\frac{1}{2}$ 的抛物线的标准方程.
4. 求抛物线 $y^2=8\sqrt{3}x$ 的焦点坐标和准线方程.

2.2 抛物线的简单性质

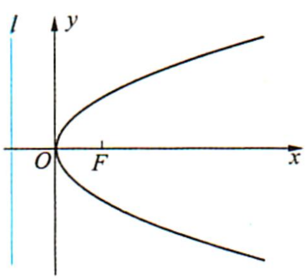


图 2-19

仿照椭圆性质的讨论方法，我们根据抛物线的图像(图 2-19)和标准方程

$$y^2=2px\ (p>0) \quad ①$$

来研究它的几何性质.

1. 对称性

观察图 2-19，不难发现抛物线关于 x 轴对称，我们把抛物线的对称轴叫作**抛物线的轴**. 抛物线只有一条对称轴.

2. 范围

观察图 2-19，我们发现，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在 y 轴的右侧，开口向右，这条抛物线上的任意一点 M 的坐标 (x,y) 满足不等式 $x\geqslant 0$；当 x 的值增大时，$|y|$ 也增大，这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸. 抛物线是无界曲线.

3. 顶点

抛物线与它的轴的交点叫作**抛物线的顶点**. 在方程①中，当 $y=0$ 时，$x=0$，因此抛物线①的顶点就是坐标原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 到焦点的距离和它到准线的距离的比，叫作**抛物线的离心率**，用 e 表示. 由抛物线的定义可知 $e=1$.

在抛物线的标准方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 中，令 $x=\frac{p}{2}$，则 $y=\pm p$.

这就是说，通过焦点而垂直于 x 轴的直线与抛物线两交点的坐标分别为 $\left(\frac{p}{2},p\right)$，$\left(\frac{p}{2},-p\right)$，连接这两点的线段叫作**抛物线的通径**，它的长为 $2p$（图 2-20）．这就是抛物线标准方程中 $2p$ 的一种几何意义．利用抛物线的几何性质及抛物线上坐标为 $\left(\frac{p}{2},p\right)$，$\left(\frac{p}{2},-p\right)$ 的两点，能够方便地画出抛物线的草图．

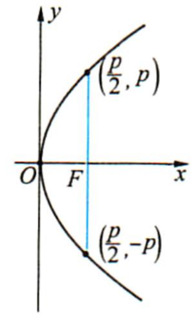
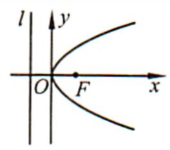
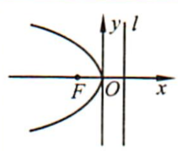
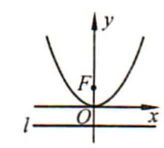
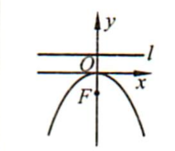


图 2-20

在直角坐标平面内，顶点在原点、轴与坐标轴重合的抛物线有四种位置情况，因此抛物线的方程相应地有四种形式，它们都叫作抛物线的标准方程．设焦点到准线的距离为 $p(p>0)$，则抛物线标准方程的四种形式如表 2-2．

表 2-2

图　像				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
对称轴	x　轴		y　轴	
顶　点	原　点			
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

例 2　点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $l:x+6=0$ 的距离小 2．求点 M 满足的方程．

解　如图 2-21，点 M 到点 F 的距离比它到直线 $l:x+6=0$ 的距离小 2，就是“点 M 到点 F 的距离等于它到直线 $x+4=0$ 的距离”，由此可知，点 M 的轨迹是以 F 为焦点，直线 $x+4=0$ 为准线的抛物线．由抛物线的定义可知：点 M 的轨迹是一条以 $F(4,0)$ 为焦点，$x=-4$ 为准线的抛物线，此时，$p=8$．故所求的点 M 满足的方程是

$$y^2=16x.$$

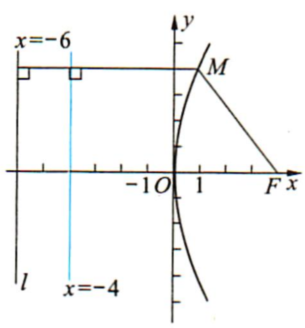


图 2-21

思考交流

平面内哪些点到直线 $l:x=-2$ 和到点 $P(2,0)$ 距离之比小于 1？

练习

1. 写出图像关于 x 轴对称，且过点 $M(4,-4)$ 的抛物线的标准方程.
2. 在同一平面直角坐标系中画出下列抛物线的草图：
   (1) $y^2=x$；　(2) $y^2=2x$；　(3) $y^2=4x$.
   比较这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数有怎样的关系.
3. 平面上动点 M 到定点 $F(3,0)$ 的距离比 M 到 y 轴的距离大 3. 求动点 M 满足的方程，并画出相应的草图.

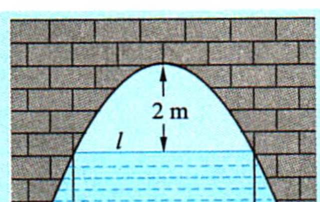
习题 2—2

A　组

1. 点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-3$ 的距离，点 M 运动的轨迹是什么图形？你能写出它的方程吗？能画出草图吗？
2. 根据下列条件求抛物线的标准方程：
   (1) 焦点在 x 轴上，焦点到准线的距离为 6；
   (2) 准线方程 $x=-\frac{5}{2}$.
3. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：
   (1) $2y^2=-\sqrt{3}x$；　(2) $y^2-6\sqrt{2}x=0$.
4. 根据下列条件，求抛物线的标准方程，并画出草图：
   (1) 对称轴是 x 轴，并且顶点与焦点的距离等于 8；
   (2) 对称轴是 x 轴，焦点在直线 $3x-4y-12=0$ 上.
5. 点 M 到点 $F(2,0)$ 的距离比它到直线 $x=-3$ 的距离小 1. 求点 M 满足的方程.
6. 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上一点 M 与焦点 F 的距离 $|MF|=2p$. 求点 M 的坐标.

B　组

1. 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线相切，则 p 的值为(　　).
   A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 4
2. 过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 焦点的一条直线和此抛物线相交，两个交点的纵坐标分别为 y_1, y_2. 求证：$y_1y_2=-p^2$.
3. 右图是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m. 水下降 1 m 后，水面宽多少？



(第 3 题)

§3 双曲线

3.1 双曲线及其标准方程

一、双曲线的定义

我们已经知道，与两定点的距离之和为常数（大于两定点的距离）的点的轨迹是椭圆．那么与两定点的距离的差为非零常数的点的轨迹是怎样的曲线呢？

动手实践

如图 2-22，取一条拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在点 F_1，F_2 上．F_1 到 F_2 的长为 $2c(c>0)$．把笔尖放在拉链开口的咬合处 M，M 与点 F_1 的距离减去 M 与点 F_2 的距离所得的差等于 $2a(c>a>0)$，随着拉链逐渐拉开或者闭拢，笔尖就画出一条曲线（图 2-22 中右边的曲线）．这条曲线上的点 M 满足下面的条件：

$$|MF_1|-|MF_2|=2a.$$

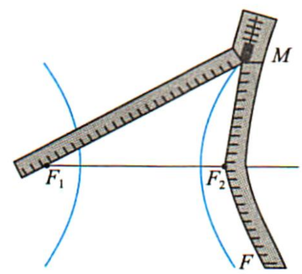


图 2-22

如果使点 M 到点 F_2 的距离减去点 M 到点 F_1 的距离所得的差等于 $2a$，就得到另一条曲线（图 2-22 中左边的曲线），这条曲线上的点 M 满足下面的条件：

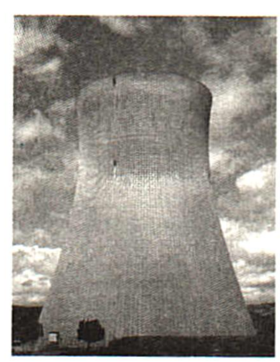
$$|MF_2|-|MF_1|=2a.$$

这两条曲线合起来叫作双曲线，每一条叫作双曲线的一支．

定义 **我们把平面内到两定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值等于常数（大于零且小于 $|F_1F_2|$）的点的集合叫作双曲线．**

定点 F_1，F_2 叫作**双曲线的焦点**，两个焦点之间的距离叫作**双曲线的焦距**．

双曲线在我们实际生活中有着十分广泛的应用，如热电厂冷却塔（如图）的外形与轴截面的交线，用于大面积照明的照明灯的反光罩与轴截面的交线等都是双曲线．



二、双曲线的标准方程

下面，我们仿照求椭圆方程的方法，根据双曲线的定义来求双曲线的标准方程.

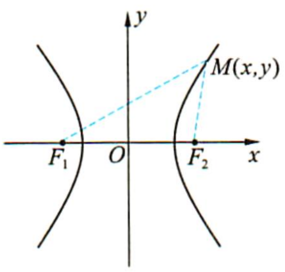


图 2-23

如图 2-23，给定双曲线，它的焦点为 F_1，F_2，焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，双曲线上任一点到两焦点的距离之差的绝对值为 $2a(0<a<c)$. 以直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 双曲线的焦点 F_1，F_2 的坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

设 $M(x,y)$ 是双曲线上任意一点，由双曲线的定义可知点 M 满足

$$||MF_1|-|MF_2||=2a.$$

因为 $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

所以 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义可知，$2c>2a>0$，所以 $c^2-a^2>0$.

> **说　明**
>
> 令 $b^2=c^2-a^2$ 可以使方程变得简单整洁，在今后讨论双曲线的几何性质时，b 还有明确的几何意义.

设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

即

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).}$$

这就是说，双曲线上点的坐标都满足这个方程；反之，可以证明，以这个方程的解为坐标的点都在双曲线上. 这个方程叫作**双曲线的标准方程**. 这条双曲线的焦点在 x 轴上(图 2-23)，其坐标为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

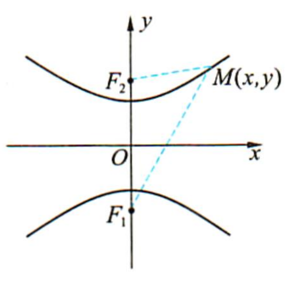


图 2-24

如果焦点 F_1，F_2 在 y 轴上(图 2-24)，利用同样的方法，可以得到双曲线的标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).}$$

例 1　双曲线的两个焦点坐标分别是 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值是 6，求双曲线的标准方程.

解　因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0).$$

又 $c=5, a=3$，故 $b=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

因此，所求双曲线的标准方程是

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

例 2　相距 2 km 的两个哨所 A，B 听到远处传来的炮弹爆炸声，在 A 哨所听到爆炸声的时间比在 B 哨所迟 4 s. 已知当时的声速为 340 m/s，试判断爆炸点在什么样的曲线上，并求出曲线的方程.

解　设爆炸点为 P，由已知得

$$|PA|-|PB|=340\times4=1\ 360\ (\text{m}).$$

因为 $|AB|=2\ \text{km}=2\ 000\ \text{m}>1\ 360\ \text{m}$，又 $|PA|>|PB|$，所以点 P 在以 A，B 为焦点的双曲线靠近 B 处的那一支上.

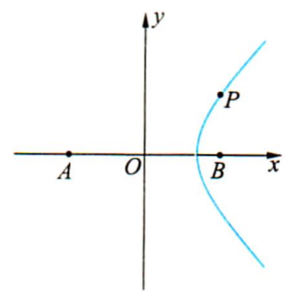


图 2-25

如图 2-25，建立平面直角坐标系 xOy，使 x 轴经过 A，B 两点，原点 O 是线段 AB 的中点.

由　$2a=1\ 360$，$2c=2\ 000$，得

$$a=680,\ c=1\ 000,$$

$$b^2=c^2-a^2=537\ 600.$$

因此，点 P 所在曲线是双曲线，它的方程是

$$\frac{x^2}{462\ 400}-\frac{y^2}{537\ 600}=1\ (x>0).$$

练　习

1. 求满足下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $a=3$，$b=4$，焦点在 x 轴上；

(2) 焦点为 $(0,-10)$，$(0,10)$，双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值是 16；

(3) 焦点为 $(0,-5)$，$(0,5)$，经过点 $\left(2,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. 证明：椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $x^2-15y^2=15$ 的焦点相同.

3.2　双曲线的简单性质

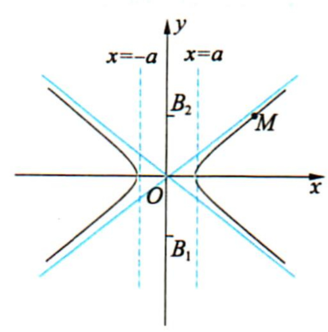


图 2-26

仿照椭圆性质的讨论方法，根据双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 和图像（图 2-26），我们来研究双曲线的简单性质.

1. 对称性

由图 2-26 可见，双曲线是以 x 轴和 y 轴为对称轴的轴对称图形，也是以原点为对称中心的中心对称图形，这个对称中心称为**双曲线的中心**.

2. 范围

由图 2-26 可见，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$都在两条平行直线 $x=-a$ 和 $x=a$ 的两侧，因此，双曲线上点的横坐标满足 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$.

3. 顶点

我们把双曲线与它的对称轴的交点 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$叫作**双曲线的顶点**. 显然顶点是双曲线两支之间距离最近的点. 两个顶点间的线段 A_1A_2 叫作双曲线的**实轴**，它的长度等于 $2a$.

设 $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$为 y 轴上的两个点，我们把线段 B_1B_2 叫作双曲线的**虚轴**，它的长度等于 $2b$.

a 叫作双曲线的**实半轴长**，b 叫作双曲线的**虚半轴长**.

4. 离心率

我们把$\frac{c}{a}=e$叫作双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$的离心率，因为 $c>a>0$，所以 $e=\frac{c}{a}>1$.

$\frac{b}{a}$决定双曲线的开口大小，$\frac{b}{a}$越大，双曲线的开口就越大. 因为 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}=\sqrt{e^2-1}$，所以$\frac{b}{a}$越大，$e$ 也越大，从而离心率 e 可以用来表示双曲线开口的程度.

*5. 渐近线

设 $M(x,y)$是双曲线在第一象限内的点，则

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x>a). \qquad ①$$

因为 $x^2-a^2<x^2$，所以

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=\frac{b}{a}x,$$

即

$$y<\frac{b}{a}x.$$

所以，双曲线在第一象限内的点都在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的下方.

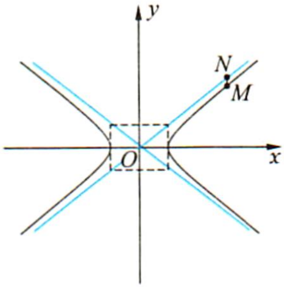


图 2-27

如图 2-27，设 $M(x,y)$，$N(x,y_1)$是第一象限内两个具有相同横坐标的点，且点 M 在双曲线上，点 N 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，则根据①得

$$|MN|=y_1-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\quad (x>a).$$

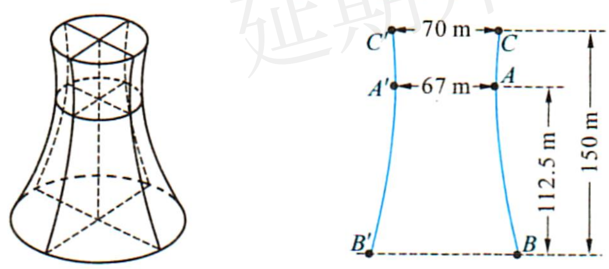
这样，当 $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 随着 x 的增大而增大时，$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$ 随着 x 的增大而减小，从而 M,N 两点间的距离 $|MN|$ 随着 x 的增大而减小，且当 x 无限增大时，$|MN|$ 无限接近于 0，即双曲线在第一象限内与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 越来越近.

由双曲线的对称性可知，当双曲线的两支在向外无限延伸时，双曲线与两条直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 和 $y=\frac{b}{a}x$ 无限逼近，但永远不会与这两条直线相交.

所以，我们把直线 $y=\frac{b}{a}x$ 和 $y=-\frac{b}{a}x$ 叫作双曲线的**渐近线**.

例 3　如图 2-28(1)，火力发电厂的冷却塔的外形是由双曲线绕其虚轴所在直线旋转所得到的曲面. 已知塔的总高度为 150 m，塔顶直径为 70 m，塔的最小直径（喉部直径）为 67 m，喉部标高 112.5 m. 求双曲线的标准方程.

解　如图 2-28(2)是冷却塔的轴截面，为了要得到双曲线的标准方程，以最小直径处所在直线为 x 轴，直径的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系（图 2-29），则点 A 坐标为(33.5，0).



(1)　　(2)

图 2-28

设双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a>0,\ b>0),$$

则 $a=33.5$.

由已知可得点 C 的坐标为(35，37.5)，代入双曲线方程有

$$\frac{35^2}{33.5^2}-\frac{37.5^2}{b^2}=1,$$

所以

$$b\approx 123.9.$$

所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{33.5^2}-\frac{y^2}{123.9^2}=1.$$

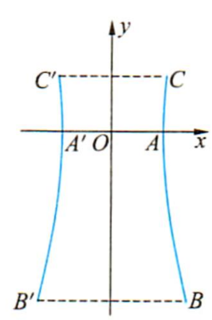


图 2-29

练 习

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、焦距和离心率：

(1) $x^2-y^2=-4$；　　(2) $9x^2-y^2=81$；

(3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$；　　(4) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$.

2. 已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$与双曲线$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，它们的离心率 e_1，e_2 是否满足等式 $e_1^{-2}+e_2^{-2}=1$？

习 题 2—3

A 组

1. 求下列双曲线的焦点坐标：

(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　　(2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$；

(3) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=-1$；　　(4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

2. 已知两定点 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，曲线上的点 P 到 F_1，F_2 的距离之差的绝对值为 6. 求曲线的方程，并画出草图.

3. 已知两定点 $F_1(0,-5)$，$F_2(0,5)$，曲线上的点 P 到 F_1，F_2 的距离之差的绝对值为 6. 求曲线的方程，并画出草图.

4. 求过点$(3,-4\sqrt{2})$，$\left(\frac{9}{4},5\right)$的双曲线的标准方程.

5. 在直角坐标系中画出下列双曲线的草图，并求实轴和虚轴的长、焦距、离心率：

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$；　　(2) $5x^2-20y^2=100$；

(3) $x^2-y^2=1$；　　(4) $16x^2-9y^2=-144$.

6. 求以椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$短轴的两个顶点为焦点，且过点 $A(4,-5)$的双曲线的标准方程.

7. 在相距 1 400 m 的 A，B 两个观察哨所测得炮弹爆炸声的时差为 3 s，已知当时声音的速度为 340 m/s，求炮弹爆炸点所在曲线的方程.

B 组

若双曲线$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$的离心率 $e\in(1,2)$，求 m 的取值范围.

阅读材料1

圆锥曲线的光学性质

在日常生活中我们经常使用手电筒，手电筒发出的光是一束平行光线，探照灯也如此. 它们的工作原理是什么呢？实际上它们用到了圆锥曲线的光学性质.

探照灯反射镜是一个抛物面，如图 2-30，它的轴截面是抛物线的一部分，如图 2-31，光源位于抛物线的焦点处. 经过抛物面反射，形成一束平行光线. 于是，光源为一个灯泡的探照灯光是一束光柱. 反过来，一束平行光线经过抛物面反射，就会聚在焦点上，太阳灶就是利用这个原理制成的.

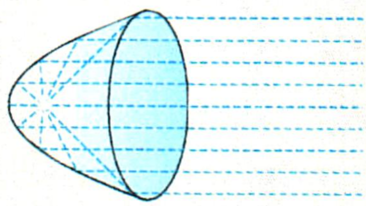


图 2-30

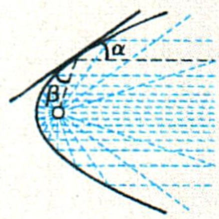


图 2-31

如果将反射镜做成椭圆面（用一个椭圆绕它的长轴旋转而成的曲面），光源放在一个焦点处，则所有的光线经过镜面反射后都聚集在另一个焦点处.

圆锥曲线的性质还有很多应用，有兴趣的同学可以阅读更多的书籍或到网上浏览.

阅读材料 2

曲线与方程

在平面直角坐标系中，我们经历了直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线等一些特殊曲线的学习，通过坐标法研究了它们的方程，通过方程探索了这些曲线的一些特性. 那么，曲线与方程到底是一种什么关系呢？

我们知道，平面直角坐标系中任意一条直线都可以用关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A,B 不同时为 0）来表示；任何关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A,B 不同时为 0）都可以表示平面直角坐标系中的一条直线.

坐标满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$（$r>0$）的点 (x,y) 都在以 (a,b) 为圆心、r 为半径的圆上；而这个圆上每一点的坐标 (x,y) 都满足方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$（$r>0$）.

坐标满足方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的点 (x,y) 都在一个椭圆上；而这个椭圆上每一点的坐标 (x,y) 都满足方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）.

一般地，在平面直角坐标系中，如果某曲线 C（看作满足某种条件的点的集合或轨迹）上的点与一个二元方程的实数解建立了如下的关系：

(1) 曲线上点的坐标都是这个方程的解；

(2) 以这个方程的解为坐标的点都在曲线上，

那么，这个方程叫作**曲线的方程**，这条曲线叫作**方程的曲线**.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 了解椭圆的实际背景，掌握椭圆的定义、标准方程和简单几何性质.

2. 了解抛物线的实际背景，掌握抛物线的定义、标准方程和简单几何性质.

3. 了解双曲线的定义、标准方程和简单几何性质.

4. 能根据具体条件利用某种工具画椭圆、抛物线和双曲线的图像，并了解圆锥曲线在实际问题中的简单应用.

5. 进一步认识坐标法.

二、复习建议

1. 这一章导出了相对于坐标轴位置不同的各种形式的椭圆、双曲线、抛物线的标准方程. 其中最重要的是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0);$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0);$$

$$y^2=2px \qquad (p>0).$$

由这三个方程可以演变出其余的方程. 学习时要抓住重点，熟悉并掌握这三种方程.

2. 认识圆、椭圆、抛物线、双曲线的统一性：

(1) 从方程形式看，在直角坐标系中，这几种曲线的方程都是二元二次的，因而统称它们为二次曲线.

(2) 从天体运行轨道看：天体运行的轨道是这四种曲线. 例如，人造卫星、行星、彗星等由于运动的速度不同，它们的轨道是圆、椭圆、抛物线或双曲线.

(3) 四种曲线又可以看作不同的平面截圆锥所得到的截线，因此，它们又统称圆锥曲线.

3. 学习本章的目的，不仅是为了掌握圆锥曲线的方程和性质，还要通过对椭圆、抛物线、双曲线的研究，进一步学习如何用代数方法(坐标法)研究几何问题，即掌握坐标法.

4. 圆锥曲线可以看作点在平面内按一定规律运动形成的轨迹，因此本章处处充满运动变化的思想. 学习这一章，要学会用运动变化的观点分析问题.

5. 坐标法将数与形紧密结合. 解决本章问题时既要运用图形的直观，观察分析图形的几何性质，又要善于把点、曲线用坐标、方程表示，读出式或方程的几何意义，将数形充分结合.

6. 圆锥曲线在生产和日常生活中有许多重要的应用，要了解实际问题转化为数学问题的过程，学会用数学解决一些实际问题.

复习题二

A　组

1. 求下列各椭圆的长轴和短轴的长、离心率、焦点坐标、顶点坐标，并画出草图：

(1) $x^2+4y^2=16$；　　(2) $9x^2+y^2=81$.

2. 根据下列条件判断方程 $\dfrac{x^2}{5-m}+\dfrac{y^2}{2-m}=1$ 表示什么曲线：

(1) $m<2$；　　(2) $2<m<5$.

3. 一个圆经过点 $F(3,0)$，且和直线 $x+3=0$ 相切. 求圆心满足的方程，并画出图形.

4. 求顶点在原点，对称轴是坐标轴，且焦点在直线 $3x-5y-36=0$ 上的抛物线方程.

5. 求双曲线方程，它与椭圆 $x^2+4y^2=64$ 有共同的焦点，且双曲线上的点到两焦点距离之差的绝对值为 1.

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作垂直于 x 轴的直线，交抛物线于 A，B 两点. 求以 F 为圆心、AB 为直径的圆的方程.

7. 设 F_1，F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且满足 $\angle F_1PF_2=90°$. 求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

8. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，求以点 $P(2,-1)$ 为中点的弦所在的直线方程.

9. 设圆过双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上. 求圆心到双曲线中心的距离.

B　组

1. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{9k^2}-\dfrac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点，求实数 k 的取值范围.

2. 已知双曲线与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 共焦点，它们的离心率之和为 $\dfrac{14}{5}$. 求双曲线方程.

第三章 变化率与导数

在报纸或电视节目中，我们有时会得到这样的信息：

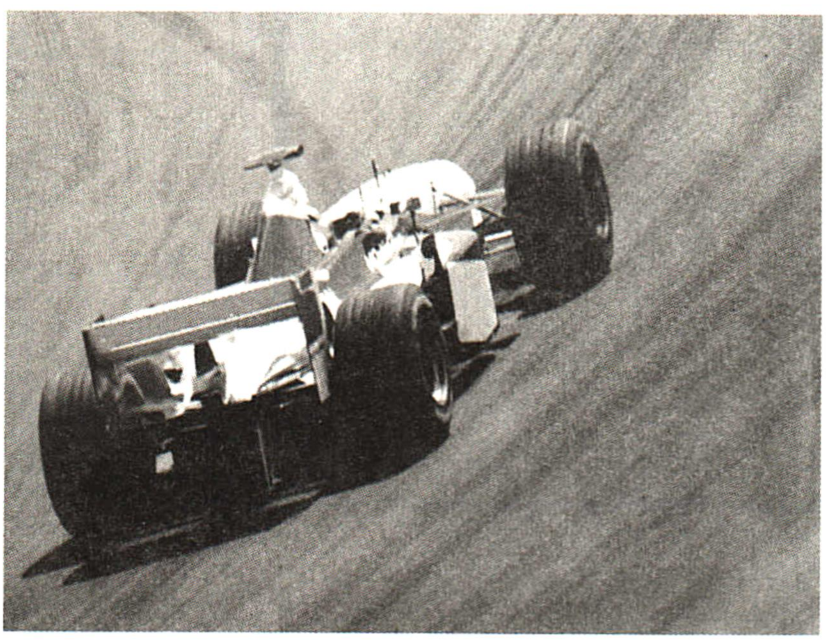
……这种新研制的战斗机最大飞行高度 18 000 米，最大冲刺速度 1 480 千米/时.

据某气象台报道，某市在 20 日凌晨 1～2 时降雨强度达 72 毫米/时；有的地方瞬间降雨强度达 99 毫米/时，被称作“白雨”(眼睛已看不清景物).

……

“冲刺速度”“降雨强度”刻画的是飞行的路程和降雨量瞬时变化的情况，都是数学中导数概念的原型. 导数是数学中一个重要的概念，它在日常生活、工作和科学研究中有着广泛的应用.

在本章，我们将讨论导数概念的产生过程，学习导数在研究函数和解决实际问题中的意义和应用.



§1　变化的快慢与变化率

问题提出

世界上，变化无处不在，人们经常关心变化的快慢问题. 如何刻画事物变化的快慢呢？

实例分析

问题 1　物体从某一时刻开始运动，设 s 表示此物体经过时间 t 走过的路程，显然 s 是时间 t 的函数，表示为 $s=s(t)$.

在运动的过程中测得了一些数据，如表 3-1.

表 3－1

t/s	0	2	5	10	13	15	…
s/m	0	6	9	20	32	44	…

物体在 0～2 s 和 10～13 s 这两段时间内，哪一段时间运动得快？如何刻画物体运动的快慢？

分析　我们通常用平均速度来比较运动的快慢.

在 0～2 s 这段时间内，物体的平均速度为：$\dfrac{6-0}{2-0}=3(\mathrm{m/s})$；

在 10～13 s 这段时间内，物体的平均速度为：$\dfrac{32-20}{13-10}=4(\mathrm{m/s})$.

显然，物体在后一段时间比前一段时间运动得快.

问题 2　某病人吃完退烧药后，他的体温变化如图 3-1 所示.

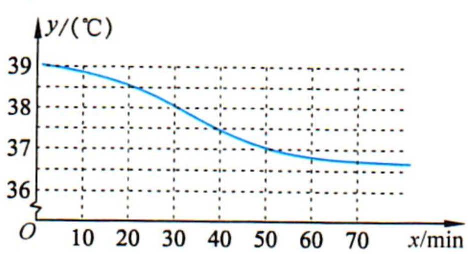


图 3-1

比较时间 x 从 0 min 到 20 min 和从 20 min 到 30 min 体温的变

化情况，哪段时间体温变化较快？如何刻画体温变化的快慢？

分析 根据图像可以看出：

当时间 x 从 0 min 到 20 min 时，体温 y 从 39 ℃变为38.5 ℃，下降了 0.5 ℃；

当时间 x 从 20 min 到 30 min 时，体温 y 从 38.5 ℃变为38 ℃，下降了 0.5 ℃.

两段时间下降相同的温度，而后一段时间比前一段短，所以后一段时间的体温比前一段时间下降得快.

我们也可以比较在这两段时间中，单位时间内体温的平均变化量，于是当时间 x 从 0 min 变到 20 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38.5-39}{20-0}=\frac{-0.5}{20}=-0.025(℃/\mathrm{min});$$

当时间 x 从 20 min 变到 30 min 时，体温 y 相对于时间 x 的平均变化率为

$$\frac{38-38.5}{30-20}=\frac{-0.5}{10}=-0.05(℃/\mathrm{min}).$$

这里出现了负号，它表示体温下降了，显然，绝对值越大，下降得越快，这里，体温从 20 min 到 30 min 这段时间下降得比 0 min 到 20 min这段时间要快.

上面的第一个问题中，我们用一段时间内物体的平均速度刻画了物体运动的快慢，当时间从 t_0 变为 t_1 时，物体所走的路程从 $s(t_0)$ 变为 $s(t_1)$，这段时间内物体的平均速度是

$$平均速度=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}.$$

第二个问题中，我们用一段时间内体温的平均变化率刻画了体温变化的快慢，当时间从 x_0 变为 x_1 时，体温从 $y(x_0)$ 变为 $y(x_1)$，

$$体温的平均变化率=\frac{y(x_1)-y(x_0)}{x_1-x_0}.$$

抽象概括

对一般的函数 $y=f(x)$ 来说，当自变量 x 从 x_1 变为 x_2 时，函数值从 $f(x_1)$ 变为 $f(x_2)$，它的平均变化率为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

通常我们把自变量的变化 x_2-x_1 称作自变量的改变量，记作 Δx，函数值的变化 $f(x_2)-f(x_1)$ 称作函数值的改变量，记作 Δy. 这

样，函数的平均变化率就可以表示为函数值的改变量与自变量的改变量之比，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

我们用它来刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢.

练　习　1

某人服药后，人体吸收药物的情况可以用血液中药物的质量浓度 c(单位：mg/mL) 来表示，它是时间 t(单位：min) 的函数，表示为 $c=c(t)$. 下表给出了 $c(t)$ 的一些函数值：

t/min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$c(t)$/(mg/mL)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.41

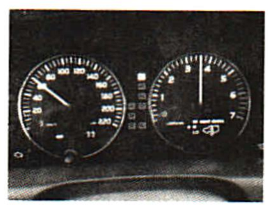
(1) 求服药后 30 min 内，30～40 min，80～90 min 这 3 段时间内，药物质量浓度的平均变化率，并回答：哪段时间血液中药物的质量浓度变化最快？

(2) 如何刻画药物质量浓度变化的快慢？

问题提出

上面我们用平均速度刻画了物体在一段时间内运动的快慢.

在实际中，还常常要考虑物体在某一瞬间的速度. 比如我们看到汽车在行驶过程中不断变化的速度表，每个时刻指针指向的就是汽车在该时刻的瞬时速度.



如何理解瞬时速度？它与平均速度有何关系呢？

实例分析

例 1　一个小球从高空自由下落，其走过的路程 s(单位：m) 与时间 t(单位：s) 的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 为重力加速度($g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$). 试估计小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

分析　当时间 t 从 t_0 变到 t_1 时，根据平均速度公式

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0},$$

可以求出 5～6 s 这段时间内小球的平均速度

$$\frac{s(6)-s(5)}{6-5}=\frac{176.4-122.5}{1}=53.9(\mathrm{m/s}).$$

我们有时用它来近似表示 $t=5$ s 时的瞬时速度. 为了提高精确度，可以缩短时间间隔，如求出 5～5.1 s 这段时间内的平均速度

$$\frac{s(5.1)-s(5)}{5.1-5}\approx\frac{127.45-122.5}{0.1}=49.5(\mathrm{m/s}),$$

用它来近似表示 $t=5$ s 时的瞬时速度.

如果时间间隔进一步缩短，那么可以想象，平均速度就更接近小球在 $t=5$ s 这个时刻的瞬时速度.

解 我们将时间间隔每次缩短为前面的 $\frac{1}{10}$，计算出相应的平均速度得到表 3-2.

表 3-2

t_0/s	t_1/s	时间的改变量 (Δt)/s	路程的改变量 (Δs)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$/(m/s)
5	5.1	0.1	4.95	49.5
5	5.01	0.01	0.49	49.049
5	5.001	0.001	0.049	49.004 9
5	5.000 1	0.000 1	0.004 9	49.000 49
5	…	…	…	…

可以看出，当时间 t_1 趋于 $t_0=5$ s 时，平均速度趋于 49 m/s，因此，可以认为小球在 $t_0=5$ s 时的瞬时速度为 49 m/s. 从上面的分析和计算可以看出，瞬时速度为 49 m/s 的物理意义是，如果小球保持这一时刻的速度进行运动的话，每秒将要运动 49 m.

动手实践

根据 $s=\frac{1}{2}gt^2$，解决下面的问题：

填写表 3-3，估计 $t=5$ s 时小球的瞬时速度.

表 3-3

t_0/s	t_1/s	时间的改变量 (Δt)/s	路程的改变量 (Δs)/m	平均速度 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$/(m/s)
4.9	5			
4.99	5			
4.999	5			
4.999 9	5			

例 2　如图 3-2 所示，一根质量分布不均匀的合金棒，长为10 m. x(单位:m)表示 OX 这段棒的长，y(单位:kg)表示 OX 这段棒的质量，它们满足以下函数关系：

$$y=f(x)=2\sqrt{x}.$$

估计该合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

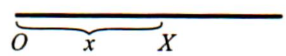


图 3-2

分析　我们还是从一段合金棒的平均线密度开始考虑，一段合金棒的质量除以这段合金棒的长度，就是这段合金棒的平均线密度.

我们用 $x_0=2$ m 到 $x_1=3$ m 的一段合金棒的平均线密度估计 $x=2$ m 处合金棒的线密度.

求出 $x_0=2$ m 到 $x_1=3$ m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}\approx\frac{3.464-2.828}{3-2}=0.636(\text{kg/m}),$$

它可以近似表示 $x_0=2$ m 处合金棒的线密度.

像例 1 那样，为了提高精确度，可以取原长度的 $\frac{1}{10}$，即求出 2～2.1 m 这段合金棒的平均线密度

$$\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}\approx\frac{2.898-2.828}{0.1}=0.70(\text{kg/m}),$$

用它来近似表示合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

如果合金棒的长度进一步缩小，那么可以想象，平均线密度就会更接近合金棒在 $x=2$ m 处的线密度.

解　由 $y=f(x)=2\sqrt{x}$，我们可以按下表计算出相应的平均线密度得到表 3-4.

表 3-4

x_0/m	x_1/m	长度 x 的改变量 (Δx)/m	质量 y 的改变量 (Δy)/kg	平均线密度 $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$/(kg/m)
2	2.1	0.1	0.070	0.70
2	2.01	0.01	0.007 1	0.71
2	2.001	0.001	0.000 71	0.71
2	2.000 1	0.000 1	0.000 071	0.71
2	…	…	…	…

可以看出，当 x_1 趋于 $x_0=2$ m 时，平均线密度趋于 0.71 kg/m，因此，可以认为合金棒在 $x_0=2$ m 处的线密度为 0.71 kg/m. 从上面的分析和计算可以看出，线密度为 0.71 kg/m 的物理意义是，如果有 1 m 长的这种线密度的合金棒，其质量将为 0.71 kg.

抽象概括

在前面的两个问题中，我们通过减小自变量的改变量，用平均变化率“逼近”瞬时变化率.

由前可知，对于一般的函数 $y=f(x)$，在自变量 x 从 x_0 变到 x_1 的过程中，若设 $\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$，则函数的平均变化率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

而当 Δx 趋于 0 时，平均变化率就趋于函数在 x_0 点的瞬时变化率，瞬时变化率刻画的是函数在一点处变化的快慢.

练 习 2

1. 在自由落体运动中，根据 $s=\frac{1}{2}gt^2$，仿照例 1，估计 $t=2$ s 时的瞬时速度.

2. 已知函数 $y=\frac{1}{x}$，求自变量 x 在以下的变化过程中，函数值的平均变化率：

   自变量 x 从 1 变到 1.1；

   自变量 x 从 1 变到 1.01；

   自变量 x 从 1 变到 1.001.

   估计当 $x=1$ 时，函数的瞬时变化率是多少？

习 题 3—1

A 组

1. 下表为 3 名运动员 1 500 m 跑的分段成绩：

运动员	0～800 m	0～1 000 m	0～1 200 m	最后 300 m
1	1′57.92″❶	2′28.32″	2′57.96″	39.83″
2	1′58.24″	2′28.56″	2′58.12″	39.69″
3	1′58.76″	2′29.08″	2′58.12″	39.74″

❶表示 1 分 57.92 秒.

(1) 这 3 名运动员谁全程跑得最快？

(2) 这 3 名运动员谁在最后 300 m 的冲刺阶段跑得最快？

2. 已知函数 $y=f(x)=-2x+1$.

(1) 当 x 从 1 变为 2 时，函数值 y 改变了多少？此时函数值 y 关于 x 的平均变化率是多少？

(2) 当 x 从 -1 变为 1 时，函数值改变了多少？此时函数值 y 关于 x 的平均变化率是多少？

(3) 这个函数变化的快慢有何特点？求这个函数在 $x=1$，$x=3$ 处的瞬时变化率.

3. 某个物体走过的路程 s(单位：m)是时间 t(单位：s)的函数：$s=t^2-1$，通过平均速度估计物体在下列各时刻的瞬时速度：

(1) $t=0$；　　(2) $t=2$；　　(3) $t=4$.

4. 通过平均变化率估计函数 $y=2x^2$ 在下列各点的瞬时变化率：

(1) $x=1$；　　(2) $x=-1$；　　(3) $x=0$.

5. 通过平均变化率估计函数 $y=\frac{1}{x}+2$ 在下列各点的瞬时变化率：

(1) $x=-1$；　　(2) $x=1$；　　(3) $x=2$.

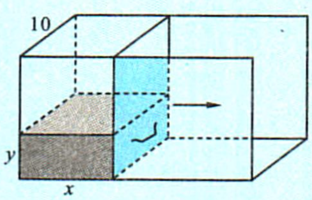
B　组

1. 有一个长方体的容器，如下图所示，它的宽为 10 cm，高为 100 cm. 右侧面为一活塞，容器中装有 1 000 mL 的水. 活塞的初始位置(距左侧面)为 $x_0=1$ cm，水面高度为 100 cm. 当活塞位于距左侧面 x cm 的位置时，水面高度为 y cm.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 活塞的位置 x 从 1 cm 变为 2 cm，水面高度改变了多少？活塞位置 x 从 8 cm 变为 10 cm，水面高度改变了多少？以上哪个过程水面高度的变化较快？

(3) 试估计当 $x=10$ cm 时，水面高度 y 关于活塞位置 x 的瞬时变化率.



(第 1 题)

2. 圆的面积 S 随着半径 r 的变化而变化. 试分析圆的面积随半径 r 增大而增大的快慢情况.

§2　导数的概念及其几何意义

2.1　导数的概念

前面我们讨论了平均变化率与瞬时变化率的关系，下面我们进一步讨论函数的瞬时变化率问题.

设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时，函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_1)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 x_1 趋于 x_0，即 Δx 趋于 0 时，如果平均变化率趋于一个固定的值❶，那么这个值就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的瞬时变化率. 在数学中，称瞬时变化率为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的**导数**，通常用符号 $f'(x_0)$ 表示，记作

$$f'(x_0)=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

❶这个值称为：当 x_1 趋于 x_0 时，平均变化率的极限.

例 1　一条水管中流过的水量 y（单位：m^3）是时间 x（单位：s）的函数 $y=f(x)=3x$. 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数 $f'(2)$，并解释它的实际意义.

解　当 x 从 2 变到 $2+\Delta x$ 时，函数值从 3×2 变到 $3(2+\Delta x)$，函数值 y 关于 x 的平均变化率为

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{3(2+\Delta x)-3\times 2}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3(\mathrm{m}^3/\mathrm{s}).$$

当 x 趋于 2，即 Δx 趋于 0 时，平均变化率趋于 3，所以

$$f'(2)=3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}.$$

导数 $f'(2)$ 表示当 $x=2$ s 时水量的瞬时变化率，即水流的瞬时速度. 也就是如果水管中的水以 $x=2$ s 时的瞬时速度流动的话，每经过 1 s，水管中流过的水量为 3 m^3.

例 2　一名食品加工厂的工人上班后开始连续工作，生产的食品量 y（单位：kg）是其工作时间 x（单位：h）的函数 $y=f(x)$. 假设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的导数分别为 $f'(1)=4$ 和 $f'(3)=3.5$，试解释它们的实际意义.

解　$f'(1)=4$ 表示该工人上班后工作 1 h 的时候，其生产速度(即工作效率)为 4 kg/h. 也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每小时可以生产 4 kg 的食品.

$f'(3)=3.5$ 表示该工人上班后工作 3 h 的时候，其生产速度为 3.5 kg/h. 也就是说，如果保持这一生产速度，那么他每小时可以生产 3.5 kg 的食品.

例 3　服药后，人体血液中药物的质量浓度 y(单位：μg/mL)是时间 t(单位：min)的函数 $y=f(t)$，假设函数 $y=f(t)$ 在 $t=10$ 和 $t=100$ 处的导数分别为 $f'(10)=1.5$ 和 $f'(100)=-0.6$，试解释它们的实际意义.

解　$f'(10)=1.5$ 表示服药后 10 min 时，血液中药物的质量浓度上升的速度为 1.5 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过1 min，血液中药物的质量浓度将上升 1.5 μg/mL.

$f'(100)=-0.6$ 表示服药后 100 min 时，血液中药物的质量浓度下降的速度为 0.6 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将下降 0.6 μg/mL.

思考交流

举出生活中 2 个函数的实例，结合具体问题讨论它们在某一点处导数的实际意义.

练　习

1. 根据例 1 中的函数 $y=f(x)=3x$，求 $f'(4)$，并解释它的实际意义.
2. 设 x(单位：km)表示从一条河流的某一处到其源头的距离，y(单位：km)表示这一点的海拔高度，y 是 x 的函数 $y=f(x)$. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=100$ 处的导数 $f'(100)=-0.1$，试解释它的实际意义.

2.2　导数的几何意义

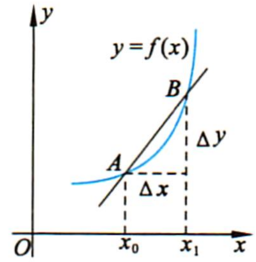


图 3-3

函数 $y=f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如图 3-3，它是过 $A(x_0, f(x_0))$ 和 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 两点的直线的斜率. 这条直线称为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的一条割线.

如图 3-4，设函数 $y=f(x)$ 的图像是一条光滑的曲线，从图像上

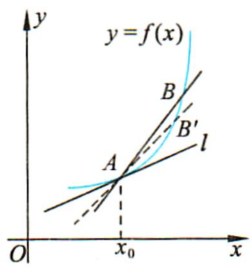


图 3-4

信息技术建议

可以利用信息技术动态呈现由割线到切线的变化过程，具体操作见本节后的“信息技术应用”栏目.

可以看出：当 Δx 取不同的值时，可以得到不同的割线；当 Δx 趋于零时，点 B 将沿着曲线 $y=f(x)$ 趋于点 A，割线 AB 将绕点 A 转动最后趋于直线 l. 直线 l 和曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处“相切”，称直线 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线. 该切线的斜率就是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

抽象概括

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率反映了导数的几何意义.

例 4 已知函数 $y=f(x)=x^2$，$x_0=-2$.

(1) 分别对 $\Delta x=2, 1, 0.5$ 求 $y=x^2$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，并画出过点 $(x_0, f(x_0))$ 的相应割线；

(2) 求函数 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的导数，并画出曲线 $y=x^2$ 在点 $(-2, 4)$ 处的切线.

解 (1) $\Delta x=2, 1, 0.5$ 时，区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 相应为 $[-2, 0]$，$[-2, -1]$，$[-2, -1.5]$. $y=x^2$ 在这些区间上的平均变化率分别为

$$\frac{f(0)-f(-2)}{2}=\frac{0^2-(-2)^2}{2}=-2,$$

$$\frac{f(-1)-f(-2)}{1}=\frac{(-1)^2-(-2)^2}{1}=-3,$$

$$\frac{f(-1.5)-f(-2)}{0.5}=\frac{(-1.5)^2-(-2)^2}{0.5}=-3.5.$$

其相应割线，如图 3-5，分别是过点 $(-2, 4)$ 和点 $(0, 0)$ 的直线 l_1，过点 $(-2, 4)$ 和点 $(-1, 1)$ 的直线 l_2，过点 $(-2, 4)$ 和点 $(-1.5, 2.25)$ 的直线 l_3.

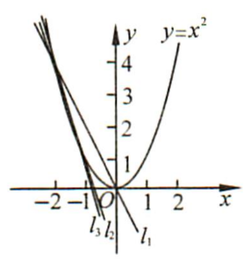


图 3-5

(2) $y=x^2$ 在区间 $[-2, -2+\Delta x]$ 上的平均变化率为

$$\frac{(-2+\Delta x)^2-(-2)^2}{\Delta x}=\frac{-4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=-4+\Delta x.$$

令 Δx 趋于零，知函数 $y=x^2$ 在 $x_0=-2$ 处的导数为 -4.

曲线 $y=x^2$ 在点 $(-2, 4)$ 处的切线为 l，如图 3-6.

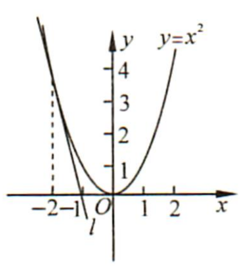


图 3-6

例 5 求函数 $y=f(x)=2x^3$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解 先求 $y=2x^3$ 在 $x=1$ 处的导数：

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^3-2\times 1^3}{\Delta x}$$

$$=\frac{2[1+3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]-2}{\Delta x}$$

$$=6+6\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

令 Δx 趋于零，可知 $y=2x^3$ 在 $x=1$ 处的导数为 $f'(1)=6$.

这样，函数 $y=2x^3$ 在点 $(1,f(1))=(1,2)$ 处的切线斜率为 6. 即该切线经过点 $(1,2)$，斜率为 6(图 3-7).

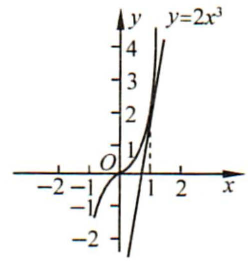


图 3-7

因此切线方程为

$$y-2=6(x-1).$$

即

$$y=6x-4.$$

信息技术应用

用割线逼近切线

在函数 $y=0.3x^2-1.3x+3.4$ 的图像上任取两点 P,Q，则割线 PQ 的斜率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$(图 3-8). 利用几何画板可以动态地展现出用割线逼近切线的过程.

如图 3-8，拖动点 Q 沿着曲线逐渐靠近点 P，割线 PQ 将绕着点 P 逐渐转动. 当点 Q 沿着曲线趋于点 P，即 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 就趋于过点 P 的切线.

观察、比较割线 PQ 在点 Q 的变化下，斜率值的变化情况(图 3-9，图 3-10).

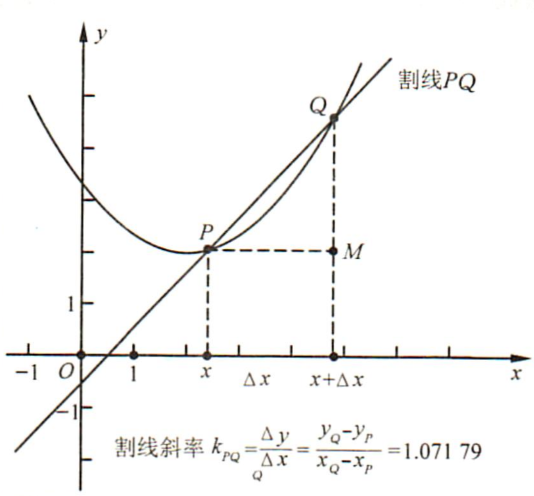


图 3-8

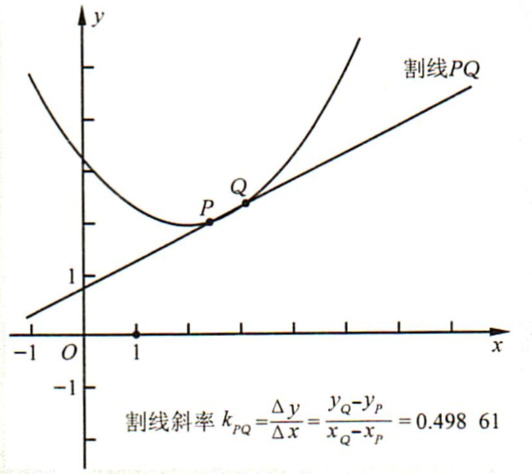


图 3-9

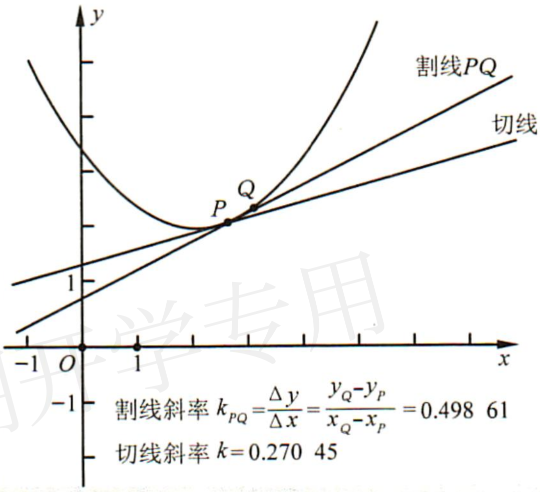


图 3-10

练 习

1. 求 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 处的切线斜率，并求出过该点的切线方程.

2. 求 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程.

习题 3—2

A 组

1. 物体走过的路程 s(单位:m)是时间 t(单位:s)的函数,可以表示为 $s=2t+1$. 求函数在下列各点的导数,并解释它们的实际意义:

   (1) $t=1$;　　(2) $t=2$;　　(3) $t=5$.

2. 已知圆的面积 S 是半径 r 的函数 $S=\pi r^2$,用定义求 S 在 $r=5$ 处的导数,并对 $S'(5)$ 的意义进行解释.

3. 求函数 $f(x)=-2x^2$ 在下列各点的导数,并说明它们的几何意义:

   (1) $x=-1$;　　(2) $x=0$;　　(3) $x=2$.

4. 求函数 $y=\dfrac{5}{x}$ 在下列各点的导数:

   (1) $x=-1$;　　(2) $x=1$;　　(3) $x=5$.

5. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+2x$ 在 $x=1$ 处切线的斜率,并求该切线的切线方程.

B 组

1. 根据导数的几何意义求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $x=1$ 处的导数.

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{2-x}$ 在 $x=-1$ 处的导数,并求曲线在该处的切线方程.

§3 计算导数

例 1 一个运动物体走过的路程 s(单位:m)是时间 t(单位:s)的函数 $s=f(t)=2t^2$. 求 $f'(5)$,并解释它的实际意义.

解 首先,对 $t=5$ 给出自变量 t 的改变量 Δt,得到相应的函数值的改变量

$$\Delta s=f(5+\Delta t)-f(5)=2(5+\Delta t)^2-2\times5^2=2[10\Delta t+(\Delta t)^2].$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2[10\Delta t+(\Delta t)^2]}{\Delta t}=2(10+\Delta t).$$

当 Δt 趋于 0 时,可以得到导数

$$f'(5)=\lim_{\Delta t\to0}2(10+\Delta t)=20(\mathrm{m/s}).$$

导数 $f'(5)$ 表示的是物体在第 5 s 时的瞬时速度,也就是物体在第 5 s 时的瞬时速度为 20 m/s.

计算函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的步骤如下:

(1) 通过自变量在 x_0 处的改变量 Δx 确定函数在 x_0 处的改变量:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

(2) 确定函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的平均变化率:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) 当 Δx 趋于 0 时,得到导数:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例 2 求函数 $y=f(x)=\frac{2}{x}+x$ 在下列各点的导数:

(1) $x=1$;　　(2) $x=-2$;　　(3) $x=x_0$.

解 (1) 首先,对 $x=1$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx,得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(1+\Delta x)-f(1)\\&=\frac{2}{1+\Delta x}+(1+\Delta x)-\left(\frac{2}{1}+1\right)\\&=\frac{(\Delta x)^2-\Delta x}{1+\Delta x}.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{(\Delta x)^2-\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x-1}{1+\Delta x}=\frac{1+\Delta x-2}{1+\Delta x}=1-\frac{2}{1+\Delta x}.$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得出导数

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1-\frac{2}{1+\Delta x}\right)=-1.$$

(2) 首先，对 $x=-2$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx，得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(-2+\Delta x)-f(-2)\\&=\frac{2}{-2+\Delta x}+(-2+\Delta x)-\left[\frac{2}{-2}+(-2)\right]\\&=\frac{\Delta x}{-2+\Delta x}+\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta x}{-2+\Delta x}+\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{-2+\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导数

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{-2+\Delta x}+1\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(3) 首先，对 $x=x_0$ 给定自变量 x 的一个改变量 Δx，得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=\frac{2}{x_0+\Delta x}+(x_0+\Delta x)-\left(\frac{2}{x_0}+x_0\right)\\&=-\frac{2\Delta x}{x_0^2+x_0\Delta x}+\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\dfrac{2\Delta x}{x_0^2+x_0\Delta x}+\Delta x}{\Delta x}=-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1.$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得出导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{2}{x_0^2+x_0\Delta x}+1\right)=-\frac{2}{x_0^2}+1.$$

抽象概括

例 2 中的函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+x$ 对于定义域中的任一点 x_0，函数都有一个导数值 $f'(x_0)=-\dfrac{2}{x_0^2}+1$ 与之对应，所以，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+1$ 是 x 的函数.

一般地，如果一个函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的每一点 x 处都有导数，导数值记为 $f'(x)$：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

则 $f'(x)$ 是关于 x 的函数，称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**导函数**，通常也简称为**导数**.

比如，函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+x$ 的导函数为

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+1.$$

显然，前面求 $f(x)=\dfrac{2}{x}+x$ 在 $x=1, -2$ 各点的导数就是导函数 $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+1$ 在各点的值.

例 3 求 $y=f(x)=3x^2-x$ 的导函数 $f'(x)$，并利用导函数 $f'(x)$ 求 $f'(1)$，$f'(-2)$，$f'(0)$.

解 首先给自变量 x 一个改变量 Δx，得到相应函数值的改变量

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=3(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-(3x^2-x)\\&=3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x.\end{aligned}$$

再计算相应的平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3(\Delta x)^2+6x\Delta x-\Delta x}{\Delta x}=3\Delta x+6x-1.$$

当 Δx 趋于 0 时，可以得出导函数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3\Delta x+6x-1)=6x-1.$$

分别将 $x=1$，$x=-2$，$x=0$ 代入 $f'(x)$，可得

$$\begin{aligned}f'(1)&=6\times 1-1=5,\\f'(-2)&=6\times(-2)-1=-13,\\f'(0)&=6\times 0-1=-1.\end{aligned}$$

练 习

1. 已知自由下落的物体下落的距离 s（单位：m）是时间 t（单位：s）的函数 $s=f(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，取 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$. 求函数在 $t=2$ 处的导数 $f'(2)$，并解释它的实际意义.
2. 求函数 $y=\dfrac{100}{x}$ 的导函数 $f'(x)$，并利用 $f'(x)$ 求 $f'(1)$，$f'(2)$，$f'(3)$.

上面通过导数的定义求出了一些简单函数的导数. 如何系统地求函数的导数要用到更进一步的数学知识,中学阶段不作系统讨论. 对我们来说,重要的是理解导数概念及其实际意义,并利用它们去思考、分析和理解一些问题.

为了解决可能遇到的导数计算问题,在本节中,我们给出了一个简单的导数公式表,列出了学过的基本初等函数的导数. 以后,遇到求这些函数导数的问题时,可以直接查表.

表 3-5　导数公式表(其中三角函数的自变量单位是弧度)

函数	导函数	函数	导函数
$y=c$(c 是常数)	$y'=0$	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=x^{\alpha}$(α 为实数)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=a^x$($a>0,a\neq1$)	$y'=a^x\ln a$ 特别地$(e^x)'=e^x$	$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=\log_a x$($a>0,a\neq1$)	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ 特别地$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

习 题 3—3

A　组

1. 求 $f(x)=3x^2+x$ 的导函数 $f'(x)$,并利用 $f'(x)$求 $f'(2)$,$f'(-2)$,$f'(3)$.
2. 求 $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$ 的导函数 $f'(x)$,并利用 $f'(x)$求 $f'(1)$,$f'(-1)$,$f'(5)$.
3. 求 $f(x)=2x-3$ 的导函数 $f'(x)$,并利用 $f'(x)$求 $f'(0)$,$f'(-1)$,$f'(3)$.
4. 求曲线 $f(x)=x^2$ 的一条与直线 $y=2x+1$ 平行的切线方程.
5. 分别求出函数 $f(x)=-2x$ 与 $g(x)=-2x+1$ 的导函数,并画出导函数的图像.

B　组

求函数 $y=x^3$ 的导函数.

§4　导数的四则运算法则

4.1　导数的加法与减法法则

问题提出

如果已知两个函数的导数，如何求这两个函数的和、差、积、商的导数呢？

我们先来通过一个具体的例子分析两函数之和的情况.

实例分析

求函数 $y=f(x)=x+x^2$ 的导函数.

给定自变量 x 的一个改变量 Δx，则函数值 y 的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x+\Delta x)-f(x)\\&=(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2-(x+x^2)\\&=\Delta x+2x\Delta x+(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

相应的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=1+2x+\Delta x.$$

当 Δx 趋于 0 时，得到导函数

$$f'(x)=1+2x.$$

可以看出：

$$(x+x^2)'=x'+(x^2)'.$$

抽象概括

两个函数和(差)的导数等于这两个函数导数的和(差)，即

$$\boxed{\begin{aligned}&[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),\\&[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x).\end{aligned}}$$

例 1　求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2^x$；　　(2) $y=\sqrt{x}-\ln x$.

解　(1) 函数 $y=x^2+2^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=2^x$ 的和，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=2^x\ln 2.$$

利用函数和的求导法则可得

$$\begin{aligned}(x^2+2^x)'&=f'(x)+g'(x)\\&=2x+2^x\ln 2.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}-\ln x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\ln x$ 的差，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

利用函数差的求导法则可得

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-\ln x)'&=f'(x)-g'(x)\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

例 2　求曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

解　首先求出函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 是函数 $f(x)=x^3$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 的差，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=3x^2,\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

根据函数差的求导法则可得

$$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=f'(x)-g'(x)=3x^2-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2+\frac{1}{x^2}.$$

将 $x=1$ 代入导函数得

$$3\times 1+\frac{1}{1}=4.$$

即曲线 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 4，从而其切线方程为

$$y-0=4(x-1),$$

即

$$y=4(x-1).$$

练 习

1. 查导数公式表求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　(2) $y=3^x$；　(3) $y=\tan x$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2+2x$；　(2) $y=3^x-x^3$；　(3) $y=x^{\frac{1}{3}}+\ln x$；　(4) $y=e^x-\dfrac{1}{x}+x^{\frac{1}{3}}$.

4.2 导数的乘法与除法法则

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)$，$g(x)=x^2$. 我们来求 $y=f(x)g(x)=x^2f(x)$ 在 x_0 处的导数.

给定自变量 x_0 的一个改变量 Δx，可以得到函数值的改变量

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2f(x_0+\Delta x)-x_0^2f(x_0),$$

相应的平均变化率可写成

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(x_0+\Delta x)^2f(x_0+\Delta x)-x_0^2f(x_0)}{\Delta x}\\&=\frac{(x_0+\Delta x)^2[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]+[(x_0+\Delta x)^2-x_0^2]f(x_0)}{\Delta x}\\&=(x_0+\Delta x)^2\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}f(x_0),\end{aligned}$$

令 $\Delta x\to 0$，由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x_0+\Delta x)^2=x_0^2$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0,$$

知 $f(x)g(x)=x^2f(x)$ 在 x_0 处的导数值为 $x_0^2f'(x_0)+2x_0f(x_0)$.

因此，$x^2f(x)$ 的导数为 $x^2f'(x)+(x^2)'f(x)$.

一般地，若两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导数分别是 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，我们有

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

特别地，当 $g(x)=k$ 时，有

$$[kf(x)]'=kf'(x).$$

思考交流

设 $f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$，试说明：

$$[f(x)g(x)]'\neq f'(x)g'(x),\quad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'\neq\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 3　求下列函数的导数：

(1) $y=x^2\mathrm{e}^x$；　　(2) $y=\sqrt{x}\sin x$；　　(3) $y=x\ln x$.

解　(1) 函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 之积，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\mathrm{e}^x.$$

根据两函数之积的求导法则，可得

$$(x^2\mathrm{e}^x)'=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x.$$

(2) 函数 $y=\sqrt{x}\sin x$ 是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=\sin x$ 之积，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\cos x.$$

根据两个函数之积的求导法则，可得

$$(\sqrt{x}\sin x)'=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x.$$

(3) 函数 $y=x\ln x$ 是函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\ln x$ 之积，由导数公式表分别得出

$$f'(x)=1,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

根据函数之积的求导法则，可得

$$(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

例 4　求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

解　(1) 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)=\sin x$ 和函数 $g(x)=x$ 之商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=\cos x,\quad g'(x)=1.$$

由求导的除法法则得

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

(2) 函数 $y=\frac{x^2}{\ln x}$是函数 $f(x)=x^2$ 和函数 $g(x)=\ln x$ 之商，根据导数公式表分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}.$$

由求导的除法法则得

$$\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)'=\frac{2x\cdot\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

练 习 1

求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\sin x$； (2) $y=\sqrt{x}\ln x$； (3) $y=\frac{x+1}{x-1}$； (4) $y=\frac{x^2}{\cos x}$.

例 5 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2(\ln x+\sin x)$； (2) $y=\frac{\cos x-x}{x^2}$.

解 (1) 函数 $y=x^2(\ln x+\sin x)$是函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\ln x+\sin x$ 的积.

由导数公式表及和函数的求导法则分别得出

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=\frac{1}{x}+\cos x.$$

由求导的乘法法则可得

$$\begin{aligned}&[x^2(\ln x+\sin x)]'\\&=2x(\ln x+\sin x)+x^2\left(\frac{1}{x}+\cos x\right)\\&=x+2x\ln x+2x\sin x+x^2\cos x.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=\frac{\cos x-x}{x^2}$可以看成是函数 $f(x)=\cos x-x$ 与 $g(x)=x^2$的商.

由导数公式表及差函数的求导法则分别得出

$$f'(x)=-\sin x-1,\quad g'(x)=2x.$$

由求导的除法法则可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos x-x}{x^2}\right)'\\&=\frac{(-\sin x-1)\cdot x^2-(\cos x-x)\cdot 2x}{(x^2)^2}\end{aligned}$$

$$=-\frac{(1+\sin x)x+2\cos x-2x}{x^{3}}$$

$$=-\frac{x\sin x+2\cos x-x}{x^{3}}.$$

例 6　求曲线 $f(x)=x+2^{x}\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

解　首先求出函数 $f(x)=x+2^{x}\ln x$ 的导函数.

根据导数公式表和导数的四则运算法则可得

$$f'(x)=x'+(2^{x})'\ln x+2^{x}(\ln x)'$$

$$=1+(2^{x}\ln 2)\ln x+\frac{2^{x}}{x}$$

$$=1+2^{x}\ln 2\ln x+\frac{2^{x}}{x}.$$

将 $x=1$ 代入 $f'(x)$，得所求切线斜率

$$f'(1)=1+2^{1}\cdot\ln 2\ln 1+\frac{2^{1}}{1}=3.$$

曲线 $f(x)=x+2^{x}\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=3(x-1)\text{，即 } y=3x-2.$$

练习 2

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x\cos x-(\ln x)\sin x$；　　(2) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^{2}+1}+\frac{\cos x+x}{\ln x}$.

2. 求曲线 $y=\frac{2\ln x+1}{x^{2}}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

习题 3—4

A 组

1. 已知 $f(1)=1$，$f'(1)=2$，$g(1)=-2$，$g'(1)=1$，求下列函数在 $x=1$ 处的导数值：

(1) $f(x)+g(x)$；　　(2) $f(x)-g(x)$；

(3) $-2f(x)$ ；　　(4) $3g(x)$；

(5) $f(x)g(x)$；　　(6) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

2. 求下列函数的导函数：

(1) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$； (2) $y=\tan x+\ln x$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$； (4) $y=2^x-\cos x+4$.

3. 求曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在点(1,0)处的切线方程.

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3\cos x$； (2) $y=\sqrt{x}\sin x$；

(3) $y=x\tan x-2\ln x$； (4) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$；

(5) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$； (6) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$；

(7) $y=\dfrac{x\sin x}{\ln x}$； (8) $y=\dfrac{e^x\cos x}{x}$.

5. 求下列各函数在给定点的导数值：

(1) $y=\sin x\cos x$，$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$，$x=2$，$x=4$；

(3) $f(x)=x\ln x+3x^2-1$，$x=1$，$x=2$.

B 组

1. 以初速度 10 m/s 向上抛出一个物体，其上升的高度 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的关系为 $s=10t-5t^2$(取重力加速度 $g=10\ \text{m/s}^2$)，求：

(1) 物体被抛出 t s 后的速度；

(2) 物体在 $t=2$ s 时的速度.

2. 求曲线 $y=x^3+x-2$ 的一条与直线 $y=4x-1$ 平行的切线方程.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 导数概念

通过具体情境，感受在现实世界和实际生活中存在着大量的变化率问题，体会由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数的实际意义，理解导数的几何意义.

2. 导数运算

(1) 会用导数定义计算一些简单函数的导数；

(2) 会利用导数公式表求出给定函数的导数；

(3) 掌握求导的四则运算法则，并会利用导数的四则运算法则求出函数的导函数.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想和方法，使知识有层次、有条理地呈现.

2. 按照学习要求的两个部分，以适当形式做出本章小结.

3. 复习本章时可供参考的思考题：

(1) 实际生活中经常会涉及变化快慢的问题，你是否有体会？

(2) 什么是导数？如何利用定义求函数的导数？怎样解释导数的实际意义？能否举例说明？

(3) 是否会用导数的四则运算法则求函数的导数？

4. 请同学们相互交流学习本章的感受与体会.

复习题三

A 组

1. 下表为某水库存水量 y(单位:万 m^3)与水深 x(单位:m)的对照表:

水深 x/m	0	5	10	15	20	25	30	35
存水量 y/万 m^3	0	20	40	90	160	275	437.5	650

(1) 当 x 从 5 m 变到 10 m 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少?解释它的实际意义;

(2) 当 x 从 25 m 变到 30 m 时,存水量 y 关于 x 的平均变化率为多少?解释它的实际意义;

(3) 比较(1)与(2)的数值的大小,并联系实际情况解释意义.

2. 长方形的周长为 10,一边长为 x,其面积为 S.

(1) 写出 S 与 x 之间的函数关系;

(2) 当 x 从 1 增加到 $1+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少?此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少?解释它的实际意义;

(3) 当 x 增加到 $x+\Delta x$ 时,面积 S 改变了多少?此时,面积 S 关于 x 的平均变化率是多少?

(4) 在 $x=1$ 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少?解释它的实际意义;

(5) 在 x 处,面积 S 关于 x 的瞬时变化率是多少?解释它的实际意义.

3. 利用导数定义求下列各函数的导数:

(1) $y=x+5$;　(2) $y=2x+3$;　(3) $y=x^2-1$;　(4) $y=x^2-3x$;

(5) $y=x^2-x+1$;　(6) $y=x^2+2x-1$;　(7) $y=2x^2+1$;　(8) $y=x^3+2$.

4. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$;　(2) $y=x\sin x-\sqrt{x}\ln x$;　(3) $y=\frac{\sin x\ln x}{x}$;

(4) $y=\sqrt{x}(x-1)\left(\frac{1}{x}+1\right)$;　(5) $y=e^x\tan x$;　(6) $y=\frac{x^2-1}{x+\ln x}$;

(7) $y=x\sin x+e^x\ln x-2$;　(8) $y=\frac{\sqrt{x}-x^2}{x\ln x}$.

5. 求下列函数在给定位置的切线的斜率:

(1) $y=x^3+2x$, $x=0$;　(2) $y=\sqrt{x}+\ln x$, $x=1$;　(3) $y=x^2\ln x$, $x=1$;　(4) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x=1$.

B 组

1. 一个小球被以 10 m/s 的初速度向上抛出.($g=10\ m/s^2$)

(1) 写出抛出 t s 后,小球距抛出点的高度 s 关于 t 的函数解析式;

(2) 求当 t 从 0 s 变到 1 s 时,s 关于 t 的平均变化率,解释它的实际意义;

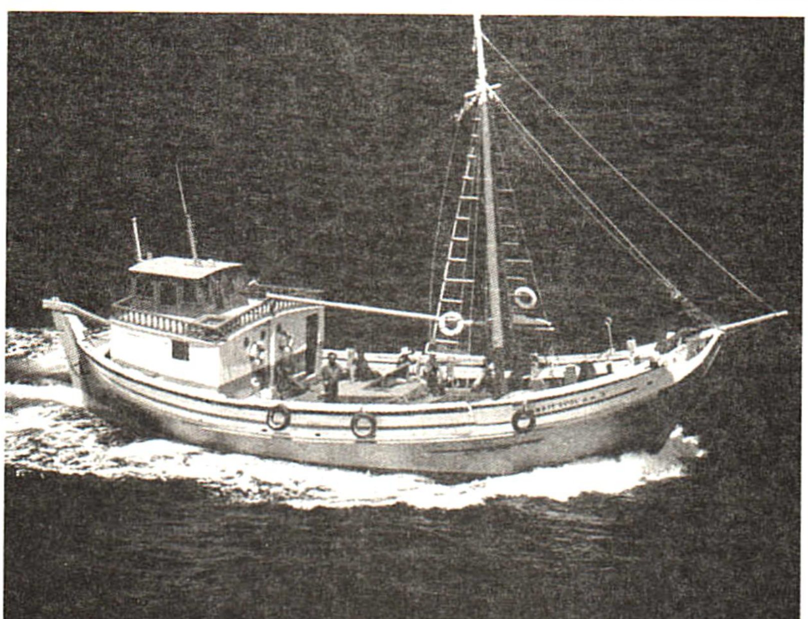
(3) 求当 t 从 1 s 变到 1.5 s 时,s 关于 t 的平均变化率,解释它的实际意义;

(4) 求 $s'(1.5)$,并解释它的实际意义.

2. 求曲线 $y=2x-\frac{1}{x}+1$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

第四章 导数应用

导数是数学中一个重要的概念，它在日常生活、工作和科学研究中有着广泛的应用. 在本章，我们将应用导数来研究函数，并用它来解决一些简单的实际问题.



§1　函数的单调性与极值

1.1　导数与函数的单调性

问题提出

我们知道，对于函数 $y=f(x)$ 来说，导数 $f'(x)$ 刻画的是 y 在 x 点的瞬时变化率，函数的单调性描述的是 y 随 x 的增加而增加，或 y 随 x 的增加而减少. 两者都是刻画函数的变化. 那么，导数与函数的单调性之间有何关系呢？

实例分析

先来看下面几个函数的导数及其单调性.

(1) $y=f(x)=x, f'(x)=1$；

(2) $y=f(x)=2x+5, f'(x)=2$；

(3) $y=f(x)=-3x+4, f'(x)=-3$.

函数的图像如图 4-1.

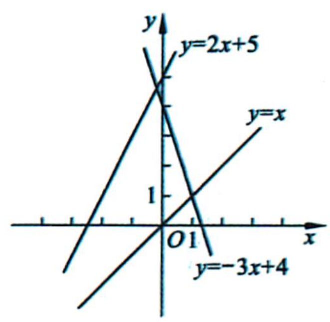


图 4-1

函数(1)(2)的导数都是正的，而函数(1)(2)在定义域上都是增加的，函数(3)的导数是负的，这个函数在定义域上是减少的.

再来看指数函数、对数函数的导数及其单调性.

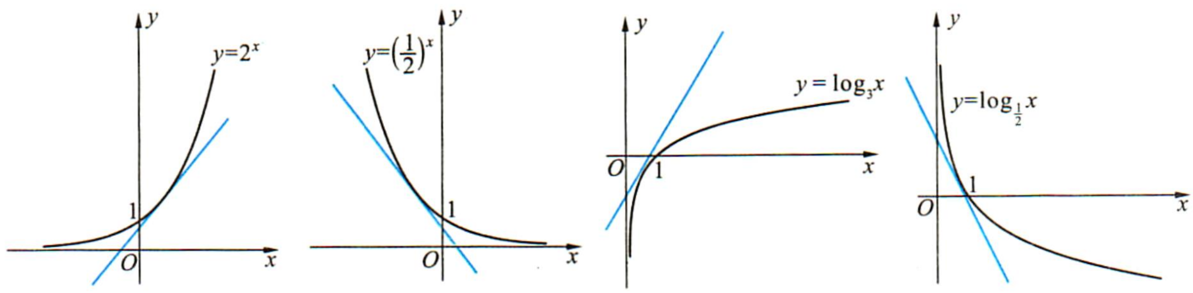
(1) $y=f(x)=2^x, f'(x)=2^x\ln 2$；

(2) $y=f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}$；

(3) $y=f(x)=\log_3 x, f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$；

(4) $y=f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x, f'(x)=\dfrac{1}{x\ln\dfrac{1}{2}}$.

对函数(1)和(3)，无论 x 取定义域内的什么实数都有 $f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 在定义域上是增加的；对于函数(2)和(4)，无论 x 取定义域内的什么实数都有 $f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 在定义域上是减少的，如图 4-2 所示.



(1) (2) (3) (4)

图 4-2

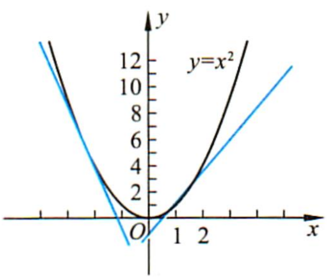


图 4-3

最后再看函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数及其单调性.

函数 $y=f(x)=x^2$ 的导函数是 $f'(x)=2x$，其图像如图 4-3 所示.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)=2x>0$，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增加的；

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)=2x<0$，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是减少的.

抽象概括

通过以上的实例可以看出，导函数的符号与函数的单调性之间具有如下的关系：

如果在某个区间内，都有函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)>0$，则在这个区间上，函数 $y=f(x)$ 是增加的；

如果在某个区间内，都有函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)<0$，则在这个区间上，函数 $y=f(x)$ 是减少的.

例 1 求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的递增性与递减区间.

分析 根据上面的结论，我们知道函数的单调性与函数导数的符号有关，因此，可以通过分析导数的符号求出函数的单调区间.

解 由导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

当 $x\in(-\infty,-2)$ 或 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，因此，在这两个区间上，函数是增加的；当 $x\in(-2,3)$ 时，$f'(x)<0$，因此，在这个区间上，函数是减少的.

所以，函数 $y=2x^3-3x^2-36x+16$ 的递增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(3,+\infty)$；递减区间为 $(-2,3)$.

函数的单调性决定了函数图像的大致形状.因此,当确定了函数的单调区间后,再通过描出一些特殊的点,就可以画出一个函数的大致图像.图 4-4 即为 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的大致图像.

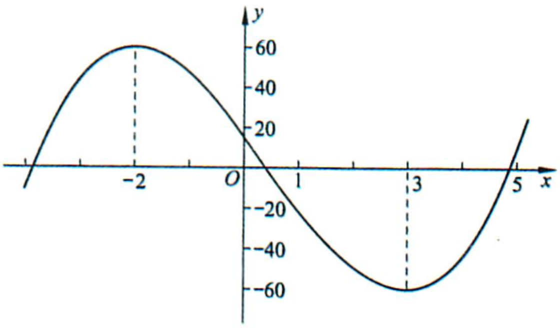


图 4-4

练　习

1. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^2-5x+4$;　　　　(2) $y=3x-x^3$.

2. 讨论函数 $y=2x-\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 上的单调性.

1.2　函数的极值

如图 4-5(1),在包含 x_0 的一个区间 (a,b) 内,函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都小于或等于 x_0 点的函数值,则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的**极大值点**,其函数值 $f(x_0)$ 为函数的**极大值**.

如图 4-5(2),在包含 x_0 的一个区间 (a,b) 内,函数 $y=f(x)$ 在任何一点的函数值都大于或等于 x_0 点的函数值,则称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的**极小值点**,其函数值 $f(x_0)$ 为函数的**极小值**.

函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**,极大值点与极小值点统称为**极值点**.

极值是函数在一个适当区间内的局部性质,如图 4-6 中,x_1,x_3,x_5 都是函数 $y=f(x)$ 的极大值点,x_2,x_4 都是函数 $y=f(x)$ 的极小值点.从图中可以看出,函数的某些极大值有时候比其他极大值小,如 $f(x_1)<f(x_3)$,甚至可能比一些极小值还小,如 $f(x_1)<f(x_4)$.

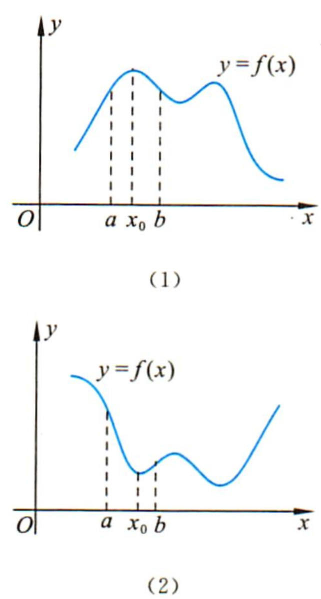


图 4-5

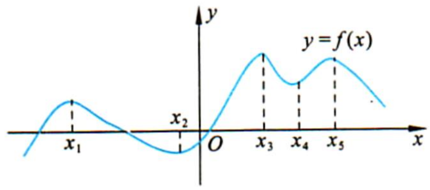


图 4-6

抽象概括

我们不难得出以下结论：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 上是增加的，在区间 (x_0,b) 上是减少的，则 x_0 是极大值点，$f(x_0)$ 是极大值.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,x_0) 上是减少的，在区间 (x_0,b) 上是增加的，则 x_0 是极小值点，$f(x_0)$ 是极小值.

利用前面得出的导数与函数单调性的关系，我们可以把极大值的问题通过表 4-1 和图 4-7 表示出来，极小值的问题通过表 4-2 和图 4-8 表示出来.

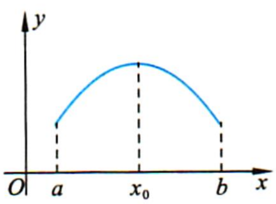


图 4-7

表 4-1

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	+	0	−
$y=f(x)$	↗	极大值	↘

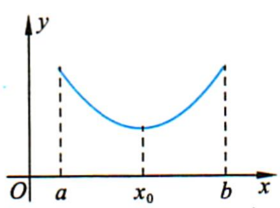


图 4-8

表 4-2

x	(a,x_0)	x_0	(x_0,b)
$f'(x)$	−	0	+
$y=f(x)$	↘	极小值	↗

例 2 求函数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+16$ 的极值点.

解 在例 1 中我们已经求出了这个函数的导函数

$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3).$$

通过解方程 $f'(x)=0$ 得到了两个解 $x_1=-2$ 和 $x_2=3$.

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，函数在 $(-\infty,-2)$ 上是增加的；当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数在 $(-2,3)$ 上是减少的，所以 $x_1=-2$ 是函数的极大值点.

当 $-2<x<3$ 时，$f'(x)<0$，函数在 $(-2,3)$ 上是减少的；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，函数在 $(3,+\infty)$ 上是增加的，所以 $x_2=3$ 是函数的极小值点.

这个判断过程可以通过表 4-3 直观地反映出来.

表 4-3

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

抽象概括

一般情况下,我们可以通过如下步骤求出函数 $y=f(x)$ 的极值点:

1. 确定函数 $f(x)$ 的定义域,并求出导数 $f'(x)$.
2. 解方程 $f'(x)=0$.
3. 对于方程 $f'(x)=0$ 的每一个解 x_0,分析 $f'(x)$ 在 x_0 左、右两侧的符号(即 $f(x)$ 的单调性),确定极值点:

(1) 若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧的符号"左正右负",则 x_0 为极大值点;

(2) 若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧的符号"左负右正",则 x_0 为极小值点;

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧的符号相同,则 x_0 不是极值点.

例 3 求函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极值.

解 首先求导函数,由导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=9x^2-3.$$

解方程

$$f'(x)=0,$$

得

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

根据 x_1,x_2 列出表 4-4,分析 $f'(x)$ 的符号、$f(x)$ 的单调性和极值点.

表 4-4

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大值	↘	极小值	↗

根据表 4-4 可知 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极大值点,函数在该点的极大值为

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极小值点,函数在该点的极

小值为

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

函数的图像如图 4-9 所示.

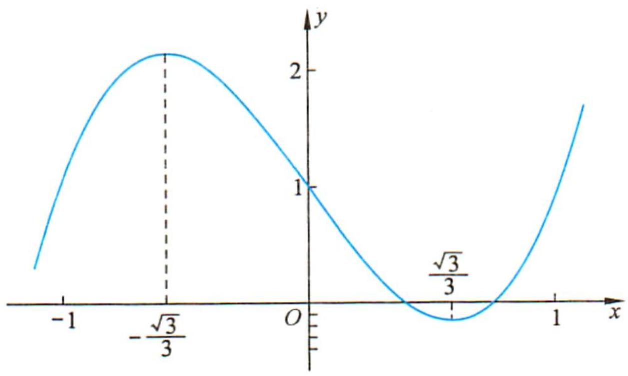


图 4-9

练 习

求下列函数的极值:

(1) $y=3x-x^3$;　　(2) $y=x^4-8x^3+18x^2-1$.

习 题 4—1

A 组

1. 求下列函数的单调区间:

(1) $y=-x^3-2x^2-4x+5$;　(2) $y=(x+1)(x^2-1)$;　(3) $y=4x^2+\frac{1}{x}$;　(4) $y=x\ln x$.

2. 讨论函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的单调性.

3. 讨论下列函数的单调性与极值:

(1) $y=6x^2-x-2$;　(2) $y=2-x-x^2$;　(3) $y=x^3-3x^2$;　(4) $y=2x^3+12x-5$.

4. 下列函数中,随着自变量的变化,函数值是怎样变化的?

(1) $s(t)=2t^3-5t^2$;　(2) $y=x+\sqrt{2+x}$.

B 组

已知数 a_1,a_2,a_3,a_4,求 x 的值,使得函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+(x-a_4)^2$ 的值最小.

§2　导数在实际问题中的应用

2.1　实际问题中导数的意义

例 1　功与功率　如图 4-10 所示，某人拉动一个物体前进，他所做的功 W(单位:J)是时间 t(单位:s)的函数，设这个函数可以表示为

$$W=W(t)=t^3-6t^2+16t.$$

(1) 求 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $W'(1)$，$W'(2)$，并解释它们的实际意义.

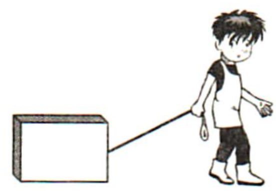


图 4-10

解　(1) 当 t 从 1 s 变到 3 s 时，功 W 从 $W(1)=11$ J 变到 $W(3)=21$ J，此时功 W 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{W(3)-W(1)}{3-1}=\frac{21-11}{3-1}=5\ (\text{J/s}).$$

它表示从 $t=1$ s 到 $t=3$ s 这段时间，这个人平均每秒做功 5 J.

(2) 首先求 $W'(t)$. 根据导数公式和求导法则可得

$$W'(t)=3t^2-12t+16,$$

于是

$$W'(1)=7\ \text{J/s},W'(2)=4\ \text{J/s}.$$

$W'(1)$ 和 $W'(2)$ 分别表示 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时，这个人每秒做的功为 7 J 和 4 J.

在物理学中，通常称力在单位时间内做的功为功率，它的单位是瓦特.

例 2　降雨强度　表 4-5 为一次降雨过程中一段时间内记录下的降雨量的数据：

表 4－5

时间 t/min	0	10	20	30	40	50	60
降雨量 y/mm	0	10	14	17	20	22	24

显然，降雨量 y 是时间 t 的函数，用 $y=f(t)$ 表示.

(1) 分别计算当 t 从 0 min 变到 10 min，从 50 min 变到 60 min 时，降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率，比较它们的大小，并解释它们的实际意义；

(2) 假设得到降雨量 y 关于时间 t 的函数的近似表达式为 $f(t)=\sqrt{10t}$，求 $f'(40)$ 并解释它的实际意义.

解 (1) 当 t 从 0 min 变到 10 min 时，降雨量 y 从 0 mm 变到 10 mm，此时降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(10)-y(0)}{10-0}=\frac{10-0}{10-0}=1(\text{mm/min}).$$

它表示从 0 min 到 10 min 这段时间内，平均每分降雨量为1 mm.

当 t 从 50 min 变到 60 min 时，降雨量 y 从 22 mm 变到 24 mm，此时降雨量 y 关于时间 t 的平均变化率为

$$\frac{y(60)-y(50)}{60-50}=\frac{24-22}{60-50}=0.2(\text{mm/min}).$$

它表示从 50 min 到 60 min 这段时间内，平均每分降雨量为 0.2 mm.

$1>0.2$，说明这次降雨过程中，刚开始的 10 min 比后10 min的雨下得大.

在气象学中，通常把在单位时间(如 1 h，1 d 等)内的降雨量称作降雨强度，它是反映一次降雨大小的一个重要指标. 因此用气象学的知识解释，0～10 min 这段时间的平均降雨强度是 1 mm/min，而 50～60 min这段时间的平均降雨强度为 0.2 mm/min.

(2) 首先求导函数，根据导数公式表可得

$$f'(t)=\frac{5}{\sqrt{10t}}.$$

将 $t=40$ 代入 $f'(t)$，得到

$$f'(40)=\frac{5}{20}=0.25(\text{mm/min}).$$

它表示的是 $t=40$ min 时降雨量 y 关于时间 t 的瞬时变化率，即降雨强度.

$f'(40)=0.25$ 就是说 $t=40$ min 这个时刻的降雨强度为 0.25 mm/min.

例 3 建造一幢面积为 x m² 的房屋需要成本 y 万元，y 是 x 的函数：$y=f(x)=\frac{x}{10}+\frac{\sqrt{x}}{10}+0.3$.

(1) 当 x 从 100 m² 变到 120 m² 时，建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率是多少？它代表什么实际意义？

(2) 求 $f'(100)$ 并解释它的实际意义.

解 (1) 当 x 从 100 m² 变到 120 m² 时，建筑成本 y 关于建筑面积 x 的平均变化率为

$$\frac{f(120)-f(100)}{120-100}$$

$$=\frac{\left(12+\frac{\sqrt{120}}{10}+0.3\right)-\left(10+\frac{\sqrt{100}}{10}+0.3\right)}{20}$$

$$\approx 0.105(\text{万元}/\text{m}^2).$$

它表示在建筑面积从 100 m^2 增加到 120 m^2 的过程中，每增加 1 m^2 的建筑面积，建筑成本平均约增加 1 050 元.

(2) 首先求 $f'(x)$，利用导数公式表和导数的运算法则可得

$$f'(x)=\frac{1}{10}+\frac{1}{20\sqrt{x}},$$

于是 $$f'(100)=\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=0.105(\text{万元}/\text{m}^2).$$

$f'(100)$ 表示当建筑面积为 100 m^2 时，成本增加的速度为 1 050 元/m^2，也就是说当建筑面积为 100 m^2 时，每增加 1 m^2 的建筑面积，成本就要增加 1 050 元.

说　明

在经济学中，通常把生产成本 y 关于产量 x 的函数 $y=f(x)$ 的导函数称为**边际成本**. 边际成本 $f'(x_0)$ 指的是当产量为 x_0 时，生产成本的增加速度，也就是当产量为 x_0 时，每增加一个单位的产量，需要增加 $f'(x_0)$ 个单位的成本.

思考交流

在日常生活和科学领域中，有许多需要用导数概念来理解的量. 以中学物理为例，速度是路程关于时间的导数，线密度是质量关于长度的导数，功率是功关于时间的导数等. 请再举出 3 个实例，体会导数的实际意义并与同学交流.

练　习

一辆正在加速的汽车在 5 s 内速度从 0 km/h 提高到了 90 km/h，下表给出了它在不同时刻的速度，为了方便起见，已将速度单位转化成了 m/s，时间单位为 s.

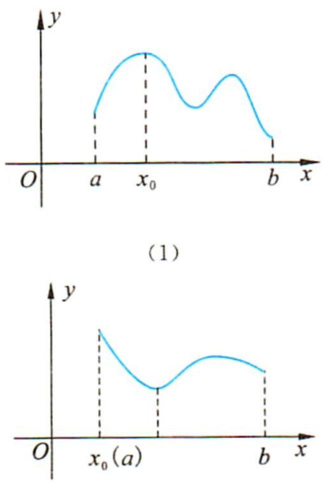
时间 t/s	0	1	2	3	4	5
速度 v/(m/s)	0	9	15	21	23	25

(1) 分别计算当 t 从 0 s 变到 1 s、从 3 s 变到 5 s 时，速度 v 关于时间 t 的平均变化率，并解释它们的实际意义；

(2) 根据上面的数据，可以得到速度 v 关于时间 t 的函数近似表示式为 $v=f(t)=-t^2+10t$，求 $f'(1)$，并解释它的实际意义.

2.2 最大值、最小值问题

最大值与最小值问题



(1)

(2)

图 4-11

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值点 x_0 指的是：函数在这个区间上所有点的函数值都不超过 $f(x_0)$（图 4-11）.

可以看出，最大值或者在极大值点取得，或者在区间的端点取得. 因此，要想求函数的最大值，应首先求出函数的极大值点，然后将所有极大值点与区间端点的函数值进行比较，其中最大的值即为函数的最大值. 在实际问题中，一般可以通过函数的单调性和问题的实际意义确定最大值.

函数的最小值点也具有类似的意义和求法. 函数的最大值和最小值统称为**最值**.

例 4 求函数 $y=f(x)=x^3-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解 首先求导函数. 根据导数公式表和求导法则可得

$$f'(x)=3x^2-4x.$$

解方程

$$f'(x)=0,$$

得

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{4}{3}.$$

根据 x_1，x_2 列表，分析 y' 的符号和函数的单调性.（如表 4-6）

表 4-6

x	-2	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$	2
$f'(x)$	20	+	0	−	0	+	4
$y=f(x)$	−11	↗	极大值	↘	极小值	↗	5

由上表得，$x_1=0$ 是函数的极大值点，$x_2=\frac{4}{3}$ 是函数的极小值点.

计算函数在极大值点 $x_1=0$、极小值点 $x_2=\frac{4}{3}$、区间端点 $x_3=-2$ 和 $x_4=2$ 处的值：

$$f(0)=5,\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{103}{27},\ f(-2)=-11,\ f(2)=5.$$

比较这 4 个数的大小，可知：

函数 $y=x^3-2x^2+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值是 5，最小值是 -11.

函数 $y=x^3-2x^2+5\ (x\in[-2,2])$ 的图像如图 4-12 所示.

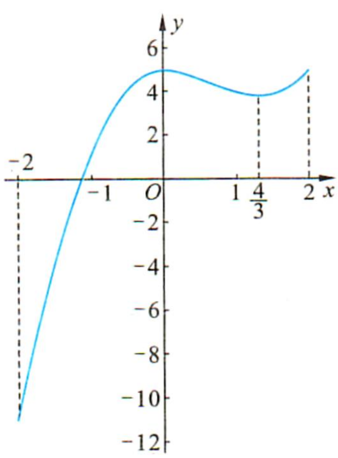


图 4-12

例 5　如图 4-13 所示，一边长为 48 cm 的正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后折起，可以做成一个无盖长方体容器. 所得容器的容积 V（单位：cm^3）是关于截去的小正方形的边长 x（单位：cm）的函数.

（1）随着 x 的变化，容积 V 是如何变化的？

（2）截去的小正方形的边长为多少时，容器的容积最大？最大容积是多少？

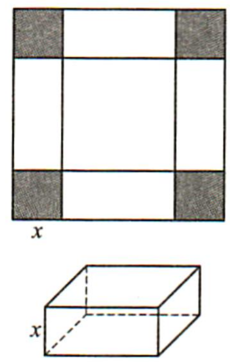


图 4-13

解　（1）首先写出 V 关于 x 的函数解析式. 根据题意可得

$$V=f(x)=(48-2x)^2x.$$

由实际情况可知函数的定义域为 $\{x|0<x<24\}$.

根据导数公式表及求导法则，可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=-4x(48-2x)+(48-2x)^2\\&=(48-2x)(-6x+48)\\&=12(x-24)(x-8).\end{aligned}$$

解方程　　　$V'(x)=0$，

得　　　$x_1=8$，　$x_2=24$.

根据 $x_1=8$，$x_2=24$ 列出表 4-7，分析导函数的符号得到函数的单调性与极值点.

表 4-7

x	$(0,8)$	8	$(8,24)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$V=f(x)$	↗	极大值	↘

$x=8$ 是函数的极大值点，相应极大值为

$$V=f(8)=(48-16)^2\times 8=8\ 192(cm^3).$$

$V=(48-2x)^2x$ 的图像如图 4-14 所示.

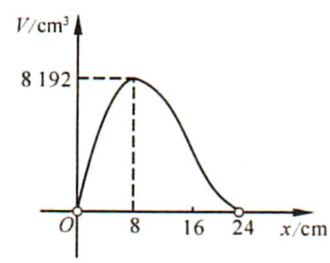


图 4-14

根据对函数变化规律的讨论可知：

当 $0<x\leqslant 8$ 时，函数 $V=f(x)$ 是增加的；当 $8\leqslant x<24$ 时，函数 $V=f(x)$ 是减少的.

（2）区间 $(0,24)$ 上任意点的函数值都不超过 $f(8)$，因此 $x=8$ 是函数的最大值点. 此时

$$V=f(8)=8\ 192(cm^3).$$

即当截去的小正方形的边长为 8 cm 时，得到的容器容积最大，最大容积为 8 192 cm^3.

练　习　1

求函数 $y=x^3-12x^2+45x-10$ 在区间 $[0,10]$ 上的最大值和最小值.

例 6　产量与利润　对于企业来说，生产成本、销售收入和利润之间的关系是个重要的问题. 对一家药品生产企业的研究表明，该企业的生产成本 y（单位：万元）和生产收入 z（单位：万元）都是产量 x（单位：t）的函数，分别为

$$y=x^3-24x^2+225x+10,$$
$$z=180x.$$

(1) 试写出该企业获得的生产利润 w（单位：万元）与产量 x 之间的函数关系式；

(2) 当产量为多少时，该企业可获得最大利润？最大利润为多少？

解　(1) 因为总利润＝总收入－总成本，即 $w=z-y$，所以

$$w=w(x)=180x-(x^3-24x^2+225x+10),$$

即
$$w=-x^3+24x^2-45x-10\ (x\geqslant 0).$$

(2) 求 $w=w(x)$ 的导函数

$$w'(x)=-3x^2+48x-45.$$

解方程
$$w'(x)=0,$$
得
$$x_1=1,\quad x_2=15.$$

根据 x_1，x_2 列出表 4-8，分析导函数的符号、函数的单调性与极值点.

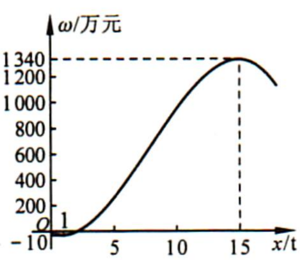


图 4-15

表 4-8

x	$(0,1)$	1	$(1,15)$	15	$(15,+\infty)$
$w'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$w(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

由上表可得 $x=15$ 是函数的极大值点，比较 $x=0$ 和 $x=15$ 的函数值

$$w(0)=-10,\quad w(15)=1\ 340,$$

可知，函数 $w=w(x)$ 在 $x=15$ 处取得最大值，最大值为 1 340，即该企业的产量为 15 t 时，可获得最大利润，最大利润为 1 340 万元.

练习 2

要设计一种圆柱形、容积为 500 mL 的一体化易拉罐金属包装，如何设计才能使得总成本最低？

习 题 4—2

A 组

1. 实验表明，将 1 kg 铁从 0 ℃加热到 t ℃需要的热量为 Q（单位：J）：

$$Q(t)=0.000\ 297t^2+0.440\ 9t.$$

(1) 当 t 从 10 ℃变到 20 ℃时，函数值 Q 关于 t 的平均变化率是多少？它的实际意义是什么？

(2) 求 $Q'(10)$，$Q'(100)$，并解释它们的实际意义.

2. 求下列函数在给定范围内的最大值、最小值：

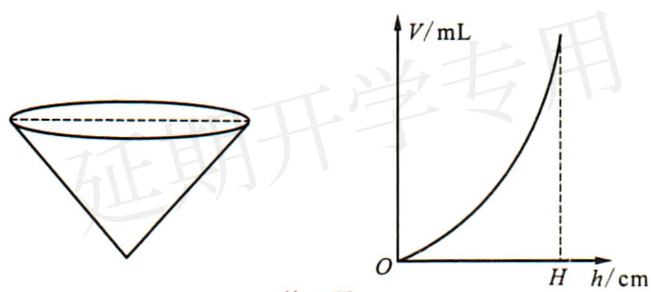
(1) $f(x)=x^2+(1-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 2$；

(2) $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$，$-2\leqslant x\leqslant 2$.

3. 如下左图为一个圆锥形酒杯，圆锥的顶角（即过圆锥轴的平面截圆锥所得等腰三角形的顶角）为 60°，向酒杯中注水.

(1) 写出注入杯中的水量 V（单位：mL）关于水面高度 h（单位：cm）的函数关系式 $V=f(h)$；

(2) 右图所示图像是否能反映这一函数关系？请说明理由.



（第 3 题）

4. 工厂需要围建一个面积为 512 m² 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁. 我们知道，砌起的新墙的总长度 y（单位：m）是利用原有墙壁长度 x（单位：m）的函数.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式，确定 x 的取值范围；

(2) 随着 x 的变化，y 的变化有何规律？

(3) 堆料场的长、宽比为多少时，需要砌起的新墙用的材料最省？

B 组

对一名工人的研究表明，工作 t h 后生产出的产品量 Q（单位：t）可以近似表示为 $Q=f(t)=-t^3+15t^2+12t$，该工人每天工作 8 h.

(1) 求当 t 从 2 h 变到 4 h，该工人生产的产品量 Q 关于时间 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $f'(2)$，$f'(4)$，并解释它们的实际意义.

阅读材料

恩格斯

(Friedrich Von Engels, 1820－1895)国际无产阶级的伟大导师、近代共产主义的奠基人

数学史上的丰碑——微积分

在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了，如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里.

——恩格斯

一、为什么说微积分是“数学史上的丰碑”

人们通过在一个时刻附近用匀速变化刻画非匀速变化，通过在一点附近用切线代替曲线，人类第一次对经验中的速度概念、切线及其斜率给出了确切的定义，得到了求速度、曲线斜率、函数最大—最小值等问题的一般方法. 这样发明了微分学.

人们通过用匀速运动刻画非匀速运动速度的思想，得到了求变速直线运动物体走过的路程的一般方法；通过以直代曲，对经验中的曲线形面积概念给出了确切定义，并得到了通过矩形面积求得曲边梯形面积的一般思想. 这样发明了积分学.

特别重要的是，牛顿和莱布尼茨发现了微分学与积分学间的深刻联系——微积分基本定理，标志着微积分学的创立. 通过这一联系，使得过去少数大数学家潜心研究的需要特殊方法才能解决的许多问题，今天一个接受过微积分基本训练的学生就能轻易解决.

微积分所具有的将复杂的非线性问题归纳为简单的线性问题加以研究的思想和方法，使得自从300年前微积分建立以来的每一个世纪，数学家的许多重要工作都是围绕着微积分的应用、发展和完善进行的，微积分成了现代数学的基础理论和方法之一，也使得数学在解决物理科学、工程学、生物科学，甚至是社会科学方面问题的强大威力得到了越来越充分的体现，所以说，微积分不愧是数学发展史上的一座丰碑，是人类智慧最伟大的成就之一.

伊萨克·牛顿

(Isaac Newton, 1643—1727)英国数学家、物理学家、天文学家和自然哲学家

二、微积分的创立者——站在巨人肩膀上的巨人

牛顿和莱布尼茨各自独立创立了微积分，单凭这一项成就，就足以奠定两人科学史上的伟大地位，何况他们的成就都远不止于此. 莱布尼茨评价道：“在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过了一半.”

莱布尼茨

(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)

德国哲学家、数学家

但是微积分的创立并不只是这两人的功劳,而是那个时代一批科学大师共同努力的结果,牛顿和莱布尼茨只是微积分学的最终创立者.对此,牛顿曾有这样一句名言:“如果说我比别人看得远些,那是因为我站在了巨人的肩上.”实际上,积分的思想可以追溯到古希腊时期以及中国古代,如阿基米得和刘徽及祖冲之父子导出球体积公式的过程.在牛顿和莱布尼茨发明微积分之前,文艺复兴带来的思想解放使得欧洲有一批先进人物继承和发扬了希腊的文化传统,提倡数学和科学,并将它们用于实际.这一时期,文化、商业、航海和其他生产活动得到了快速发展,发展过程中提出了需要研究物体运动的路程与速度、加速度的关系,求曲线的切线,求极大、极小值以及求体积和求曲线弧长等许多迫切需要解决的问题.在17世纪上半叶,这些问题吸引了当时几乎所有科学大师如伽利略、开普勒、笛卡儿、费马、巴罗(牛顿的老师)等的兴趣,他们提出了许多求曲线形面积、曲线切线、极值的问题的方法,甚至也有人意识到了在某些特殊情形下这两类问题的互逆关系.因此,应该说,微积分的发明是半个世纪酝酿的必然结果,牛顿和莱布尼茨是站在巨人肩膀上的巨人.

当然,牛顿是人类历史上罕见的科学天才,爱因斯坦说:“在牛顿面前,我感觉自己很渺小.”牛顿天生具有怀疑精神和长时间聚精会神思考问题的能力,即使是对别人司空见惯的事情,他也要追问到底,直到把问题的秘密揭穿.像他的许多重要成果一样,微积分是牛顿在1665年秋季到1667年春季提出的,当时,伦敦市区瘟疫流行,牛顿回到农村老家躲避瘟疫,正是在这穷乡僻壤隐居的18个月,他的头脑掀起了科学革命的巨浪,这段时间也成为牛顿一生,乃至科学史上的划时代岁月.

牛顿一生追求完美,他始终努力探求大自然存在和运行的根本原因.临终前,他给自己的一生评价道:“我不知道世上的人对我怎样评价.我却这样认为:我好像是一个在海边玩耍的孩子,时而拾到几块晶莹的石子,时而拾到几片美丽的贝壳并为之欢欣,而在我面前仍是未被发现的真理的大海.”直到今天,他的科学成果和科学精神仍在持续影响着我们的物质生活和精神生活.

◆ 本章小结建议

一、学习要求

1. 导数对于研究函数的意义

(1) 认识导数对于研究函数的变化规律的作用；

(2) 会用导数的符号来判断函数的单调性；

(3) 会利用导数确定函数的极值点和最值点.

2. 导数在实际问题中的应用

(1) 进一步体会函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型；

(2) 联系实际生活和其他学科，进一步体会导数的意义；

(3) 从实际情境中抽象出一些基本的用导数刻画的问题，并加以解决.

二、复习建议

1. 依据课本、笔记及作业总结本章的基本知识，掌握本章的基本思想方法，使知识有条理、有层次地呈现.

2. 按照学习要求中的两个部分，做出本章小结.

3. 用框图呈现用导数解决实际问题的基本思路、步骤与方法.

4. 复习本章，思考下列问题：

(1) 如何用导数的符号解决函数的单调性问题？

(2) 函数的极值点有何特点和意义？如何利用导数求函数的极值？

(3) 函数的极值和最值有何不同？如何利用导数求函数的最值？如何用框图形式画出确定最值的步骤？

(4) 如何从实际问题中抽象出数学问题用导数解决？

(5) 有哪些物理量或者其他学科的知识与导数有关？

5. 请同学们相互交流学习本章的感受与思考.

复习题四

A　组

1. 求下列函数的单调区间和极值点：

(1) $y=2x^3-3x^2$；　(2) $y=x+\sqrt{x}$；

(3) $y=x-\ln x$；　(4) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$；

(5) $y=\tan x-\sin x$；　(6) $y=x+\sin x$；

(7) $y=x^3-x+6$；　(8) $y=\sin x+\cos x$.

2. 求下列函数在给定范围内的最大值、最小值：

(1) $y=x^3-3x$，$0\leqslant x\leqslant 10$；　(2) $y=x^2+(2-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 2$.

3. 某体育馆要建造一个长方形游泳池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果建造池底的单价是池壁单价的 1.5 倍，怎样设计水池能使总造价最低？最低造价是多少？

4. 一辆家庭轿车在 x 年的使用过程中需要如下支出：购买时的费用 12 万元；保险费、养路费、燃油费等各种费用每年 1 万元；维修费用 $(0.1x^2+0.1x)$ 万元；使用 x 年后，汽车的价值为 $(10-0.8x)$ 万元. 显然，在这辆汽车上的年平均支出 y(单位：万元)是使用时间 x(单位：年)的函数.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 随着 x 的增加，函数值 y 的变化有何规律？

5. 某地区原来的电价为 0.8 元/(kW・h)，年用电量为 1 亿 kW・h. 今年，电力部门计划下调电价以提高用电量、增加收益. 根据调查，下调电价后新增的用电量与实际电价和原电价的差的平方成正比，比例系数为 50. 该地区电力的成本价为 0.5 元/(kW・h).

(1) 写出电力部门的收益 y 与实际电价 x 间的函数关系式；

(2) 随着 x 的变化，y 的变化有何规律？

(3) 电力部门将电价定为多少，能获得最大的收益？

B　组

1. 一个电路中，流过的电荷量 Q(单位：C)关于时间 t(单位：s)的函数为

$$Q(t)=3t^2-\ln t.$$

(1) 求当 t 从 1 s 变到 2 s 时，电路中流过的电荷量 Q 关于 t 的平均变化率，并解释它的实际意义；

(2) 求 $Q'(2)$，$Q'(3)$，并解释它们的实际意义；

(3) 求 $Q'(t)$，并讨论 $Q'(t)$ 的变化规律；

(4) 当 t 为何值时 $Q'(t)$ 取得最大值？何时取得最小值？

2. 为了安全起见，高速公路同一车道上行驶的前后两辆汽车之间的距离不得小于 kx^2(单位：m)，其中 x(单位：km/h)是车速，k 为比例系数. 经测定，当车速为 60 km/h 时，安全车距为 40 m. 假设每辆车的平均车长为 5 m.

(1) 写出在安全许可的情况下，某路口同一车道的车流量 y(单位：辆/min)关于车速 x 的函数；

(2) 如果只考虑车流量，规定怎样的车速可以使得高速公路上的车流量最大？这种规定可行吗？

附录 1

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
命题	proposition
充分条件	sufficient condition
必要条件	necessary condition
充分必要条件	sufficient and necessary condition
量词	quantifier
存在量词	existential quantifier
全称量词	universal quantifier
逆命题	converse proposition
否命题	negative proposition
逆否命题	converse-negative proposition
椭圆	ellipse
抛物线	parabola
双曲线	hyperbola
初等函数	elementary function
极值	extremum
极大值	maximum
极小值	minimum
微积分	calculus
导数	derivative
单调函数	monotone funciton