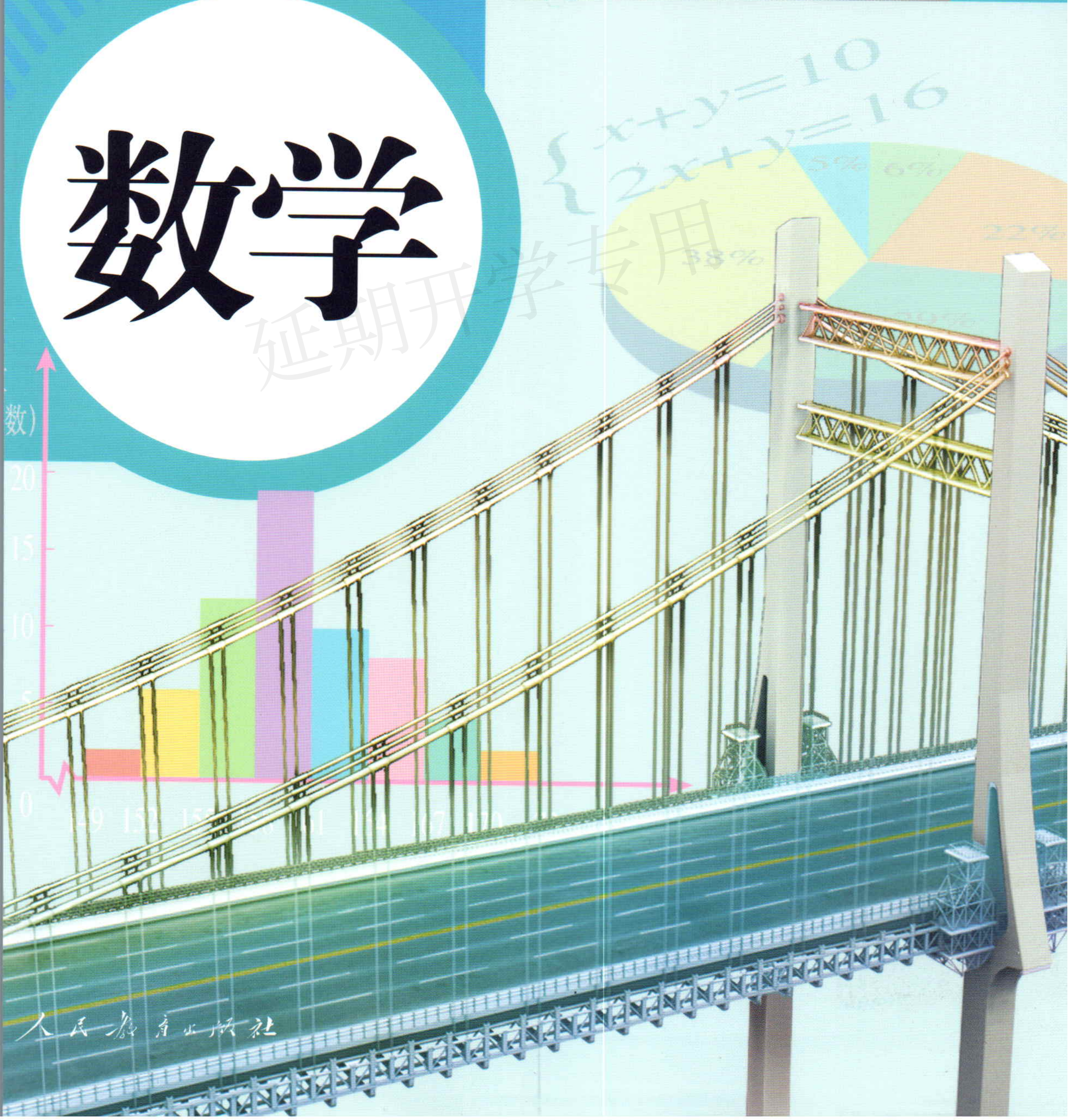
教育部审定 2012

义务教育教科书

七年级

下册

数学



人民教育出版社

义务教育教科书

数学

七年级

下册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东
本册主编：薛　彬

主要编写人员：李海东　李龙才　薛　彬　张劲松　王　嵘　张唯一　吴晓燕
张玉梅　鞠秀华　宫　颖　沈秀玉　陈　艳　张一樵　雷晓莉
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏
版式设计：王俊宏
插　　图：王俊宏　金　葆
文鲁工作室（封面）

义务教育教科书　数学　七年级　下册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn
重　　印　江西教材经营有限公司
发　　行　江西新华发行集团有限公司
印　　刷　江西新华印刷发展集团有限公司
版　　次　2012 年 10 月第 1 版
印　　次　2019 年 11 月第 8 次印刷
开　　本　787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张　10.75
字　　数　182 千字
书　　号　ISBN 978-7-107-24620-3
定　　价　10.55 元

如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与印厂联系调换。电话：0791-86237940、87583880
江西教材经营有限公司教材印制质量投诉电话：0791-85897213

本册导引

亲爱的同学，新学期开始了。

你将要学习的这本书是我们根据《义务教育数学课程标准（2011 年版）》编写的教科书，这是你在七～九年级要学习的六册数学教科书中的第二册。

我们首先学习**“相交线与平行线”**，在那里我们将对“相交”“垂直”“平行”等有更深入的了解。你会发现，生活中许多问题都可以用这些知识来分析与解决。通过“平移”你会得到美丽的图案，许多好看的动画也是用它实现的。

面积为 2 dm^2 的正方形的边长是多少？体积为 3 dm^3 的正方体的棱长是多少？解决这些问题，会遇到一个新朋友——无理数。它的到来使数扩充到新的领域，**“实数”**会使我们对数的认识大开眼界。

如果将校园的建筑物用点来表示，在绘制校园的平面图时，你能用什么方法确定各个建筑物的位置？**“平面直角坐标系”**可以帮助你。平面直角坐标系是一种重要的数学工具，它不仅可以帮助我们确定地理位置，而且能成功地架起数与形之间的桥梁。掌握了它，你会发现许多问题的解决变得直观而简明。

“二元一次方程组”提供了许多实际问题情境，引导你分析问题中的数量关系，利用其中的相等关系列出二元一次方程组，解方程组得到问题的答案。这样的过程将使你进一步感受方程是解决实际问题的重要数学工具。

在现实生活中存在着大量的需要研究不等关系的问题，例如，比较两个同学的身高，就是要研究身高的不等关系。在**“不等式与不等式组”**中，你会学到列、解不等式的方法，你将看到如同方程可以解决具有相等关系的问题一样，不等式可以解决具有不等关系的问题。

“数据的收集、整理与描述”将带你走进统计的世界，在这里，你将学会收集和整理数据的常用方法，还将接触到几种常见的统计图表，学会如何用图表直观地描述数据，并初步体验合理地进行推断和预测。

数学伴着我们成长，数学伴着我们进步，数学伴着我们成功。让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目　　录

第五章　相交线与平行线

第六章　实数

第七章 平面直角坐标系

第八章 二元一次方程组

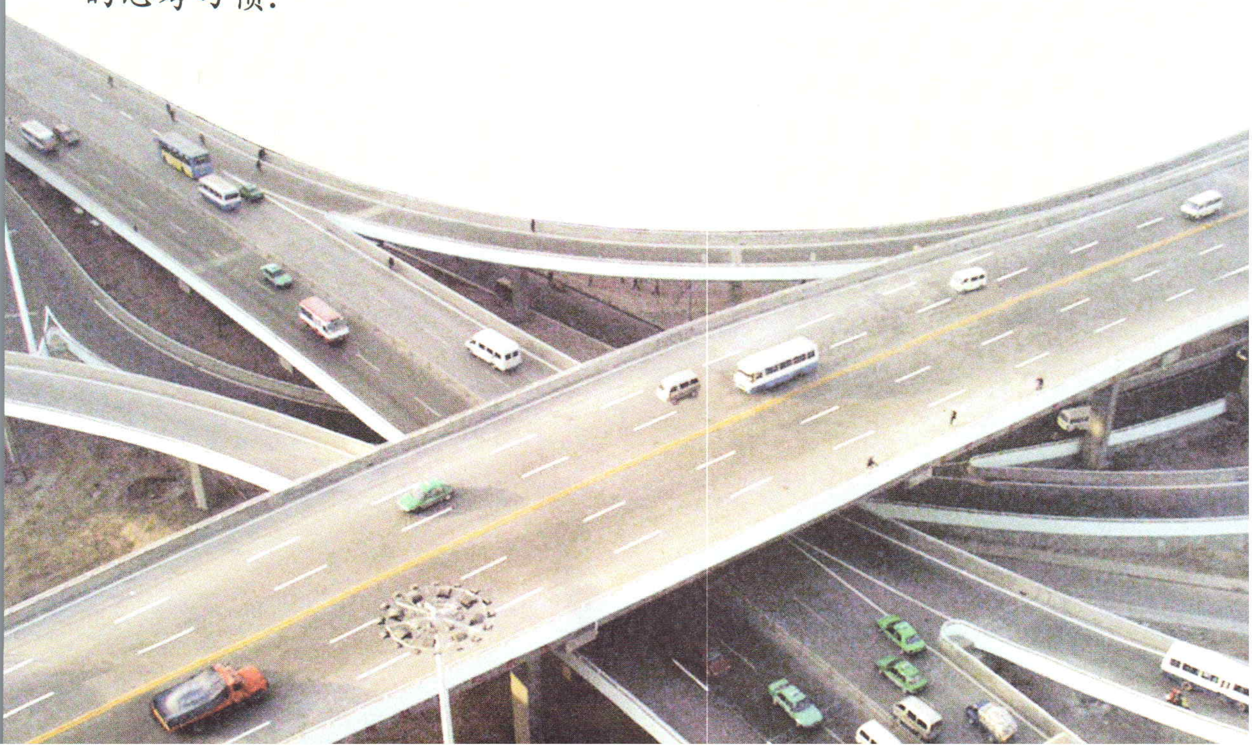
第九章　不等式与不等式组

第十章　数据的收集、整理与描述

第五章　相交线与平行线

同学们对两条直线相交、平行一定不陌生吧！纵横交错的道路，棋盘中的横线和竖线，操场上的双杠，教室中的课桌面、黑板面相邻的两条边与相对的两条边……都给我们以相交线或平行线的形象．你能再举出一些相交线和平行线的实例吗？

上一章我们认识了几何图形，并学习了一些基本的平面图形——直线、射线、线段和角．本章将研究平面内不重合的两条直线的位置关系：相交与平行．对于相交，我们要研究两条直线相交所成的角的位置关系和数量关系；对于平行，我们要借助于一条直线与另外两条直线相交所成的角，研究平行线的判定和性质．在此基础上，再学习平移的有关知识．本章我们还将学习通过简单的推理得出数学结论的方法，培养言之有据的思考习惯．



5.1 相交线

5.1.1 相交线

如图 5.1-1，观察剪刀剪开布片过程中有关角的变化. 可以发现，握紧剪刀的把手时，随着两个把手之间的角逐渐变小，剪刀刃之间的角也相应变小，直到剪开布片. 如果把剪刀的构造看作两条相交的直线，这就关系到两条相交直线所成的角的问题.

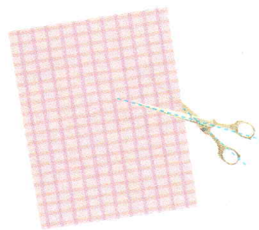


图 5.1-1

探究

任意画两条相交的直线，形成四个角(图 5.1-2)，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有怎样的位置关系？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢？

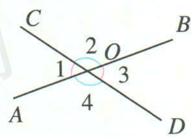


图 5.1-2

分别量一下各个角的度数，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数有什么关系？$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢？在图 5.1-1 剪刀把手之间的角变化的过程中，这个关系还保持吗？为什么？

$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有一条公共边 OC，它们的另一边互为反向延长线（$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互补），具有这种关系的两个角，互为**邻补角**(adjacent angles on a straight line).

图 5.1-2 中还有没有其他的邻补角与对顶角？

$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O，并且 $\angle 1$ 的两边分别是 $\angle 3$ 的两边的反向延长线，具有这种位置关系的两个角，互为**对顶角**（opposite angles).

在图 5.1-2 中，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补，由“同角的补角相等”，可以得出 $\angle 1=\angle 3$. 类似地，$\angle 2=\angle 4$. 这样，我们得到对顶角的性质：

对顶角相等.

上面推出“对顶角相等”这个结论的过程，可以写成下面的形式：

因为　$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补，$\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补（邻补角的定义），

所以　$\angle 1=\angle 3$（同角的补角相等）.

例 1　如图5.1-3，直线 a，b 相交，$\angle 1=40^\circ$，求$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

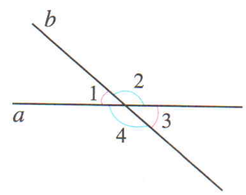


图 5.1-3

解：由邻补角的定义，得

$$\angle 2=180^\circ-\angle 1=180^\circ-40^\circ=140^\circ;$$

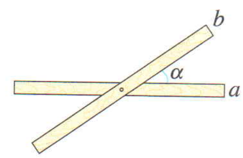
由对顶角相等，得

$$\angle 3=\angle 1=40^\circ,$$

$$\angle 4=\angle 2=140^\circ.$$

练习

如图，取两根木条 a，b，将它们钉在一起，并把它们想象成两条直线，就得到一个相交线的模型．你能说出其中的一些邻补角与对顶角吗？两根木条所成的角中，如果$\angle\alpha=35^\circ$，其他三个角各等于多少度？如果$\angle\alpha$ 等于 90°，115°，m°呢？



5.1.2　垂线

在相交线的模型(上面练习插图)中，固定木条 a，转动木条 b．当 b 的位置变化时，a，b 所成的$\angle\alpha$ 也会发生变化．当 $\angle\alpha=90^\circ$时（图 5.1-4），我们说 a 与 b 互相**垂直**（perpendicular），记作 $a\perp b$.

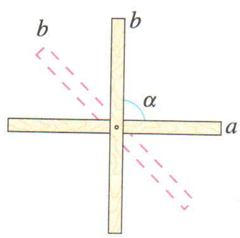


图 5.1-4

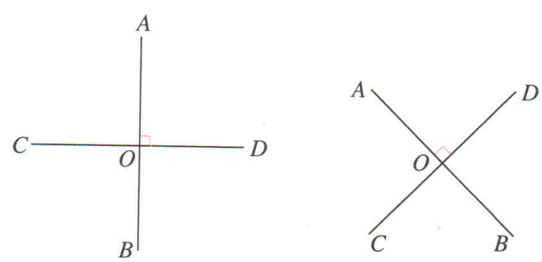


图 5.1-5

垂直是相交的一种特殊情形，两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的**垂线**（perpendicular line），它们的交点叫做**垂足**（foot of a perpendicular）．在图 5.1-5 中，$AB\perp CD$，垂足为 O.

根据两条直线垂直的定义可知，如果两条直线相交所成的四个角中的任意一个角等于 90°，那么这两条直线垂直．图 5.1-5 中，如果直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOD=90^\circ$，那么 $AB\perp CD$．这个推理过程可以写成下面的形式：

反过来，如果 $AB\perp CD$，那么 $\angle AOC$ 是多少度？

因为　$\angle AOD=90^\circ$，

所以　$AB\perp CD$（垂直的定义）．

日常生活中，两条直线互相垂直的情形很常见，说出图 5.1-6 中的一些互相垂直的木条．你能再举出其他例子吗？

图 5.1-6

探究

如图 5.1-7．

(1) 用三角尺或量角器画已知直线 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

(2) 经过直线 l 上一点 A 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

(3) 经过直线 l 外一点 B 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

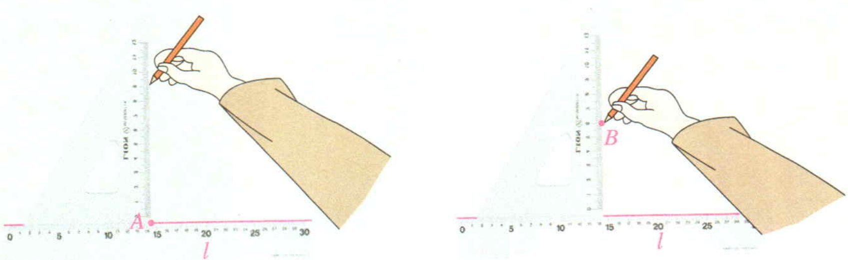


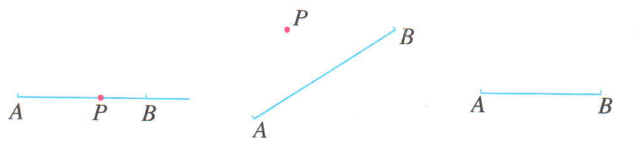
图 5.1-7

经过一点（已知直线上或直线外），能画出已知直线的一条垂线，并且只能画出一条垂线．即

在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直．

练习

1. 当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线有什么位置关系？为什么？
2. 画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线．如图，请你过点 P 画出射线 AB 或线段 AB 的垂线．



（1）　（2）　（3）

（第 2 题）

思考

如图 5.1-8，在灌溉时，要把河中的水引到农田 P 处，如何挖渠能使渠道最短？

图 5.1-8

探究

如图 5.1-9，连接直线 l 外一点 P 与直线 l 上各点 O，A_1，A_2，A_3，…，其中 $PO\perp l$（我们称 PO 为点 P 到直线 l 的垂线段）．比较线段 PO，PA_1，PA_2，PA_3，…的长短，这些线段中，哪一条最短？

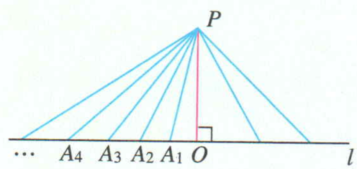


图 5.1-9

连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短．

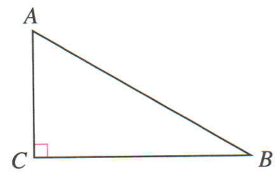
简单说成：**垂线段最短．**

直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做**点到直线的距离**．

现在，你知道水渠该怎么挖了吗？在图 5.1-8 中画出来．如果图中比例尺为1∶100 000，水渠大约要挖多长？

练习

如图，三角形 ABC 中，$\angle C=90°$.



(1) 分别指出点 A 到直线 BC，点 B 到直线 AC 的距离是哪些线段的长；

(2) 三条边 AB，AC，BC 中哪条边最长？为什么？

5.1.3　同位角、内错角、同旁内角

前面我们研究了一条直线与另一条直线相交的情形，接下来，我们进一步研究一条直线与两条直线分别相交的情形．

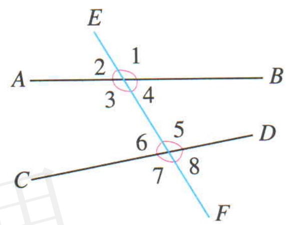


图 5.1-10

如图 5.1-10，直线 AB，CD 与 EF 相交（也可以说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截），构成八个角．我们看那些没有公共顶点的两个角的关系．

先看图中的$\angle 1$ 和$\angle 5$，这两个角分别在直线 AB，CD 的同一方（上方），并且都在直线 EF 的同侧（右侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）.

再看$\angle 3$ 和$\angle 5$，这两个角都在直线 AB，CD 之间，并且分别在直线 EF 两侧（$\angle 3$ 在直线 EF 左侧，$\angle 5$ 在直线 EF 右侧），具有这种位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）．图中$\angle 3$ 和$\angle 6$ 也都在直线 AB，CD 之间，但它们在直线 EF 的同一旁（左侧），具有这种位置关系的一对角叫做**同旁内角**（interior angles on the same side）.

$\angle 2$ 和$\angle 6$ 是同位角吗？图中还有没有其他的同位角？若有，标记出它们.

图中还有没有其他的内错角与同旁内角？若有，标记出它们.

例 2 如图5.1-11，直线 DE，BC 被直线 AB 所截.

(1) $\angle1$ 和 $\angle2$，$\angle1$ 和 $\angle3$，$\angle1$ 和 $\angle4$ 各是什么位置关系的角？

(2) 如果 $\angle1=\angle4$，那么 $\angle1$ 和 $\angle2$ 相等吗？$\angle1$ 和 $\angle3$ 互补吗？为什么？

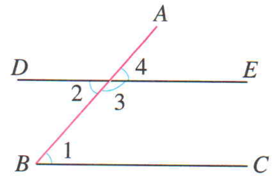


图 5.1-11

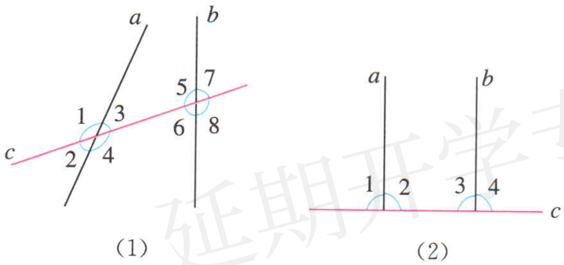
答：(1) $\angle1$ 和 $\angle2$ 是内错角，$\angle1$ 和 $\angle3$ 是同旁内角，$\angle1$ 和 $\angle4$ 是同位角.

(2) 如果 $\angle1=\angle4$，由对顶角相等，得 $\angle2=\angle4$，那么 $\angle1=\angle2$.

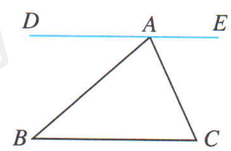
因为 $\angle4$ 和 $\angle3$ 互补，即 $\angle4+\angle3=180°$，又因为 $\angle1=\angle4$，所以 $\angle1+\angle3=180°$，即 $\angle1$ 和 $\angle3$ 互补.

练习

1. 分别指出下列图中的同位角、内错角、同旁内角.



（第 1 题）



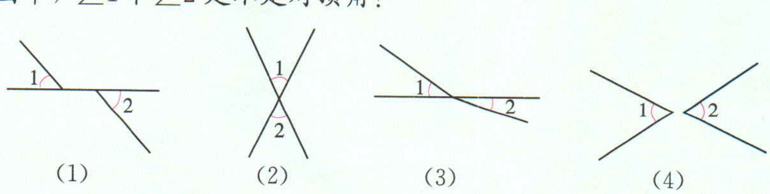
（第 2 题）

2. 如图，$\angle B$ 与哪个角是内错角，与哪个角是同旁内角？它们分别是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？对 $\angle C$ 进行同样的讨论.

习题 5.1

复习巩固

1. 下列各图中，$\angle1$ 和 $\angle2$ 是不是对顶角？



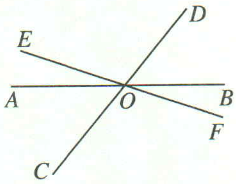
（第 1 题）

2. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O.

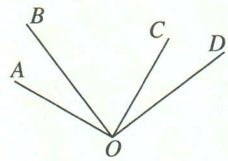
(1) 写出 $\angle AOC$，$\angle BOE$ 的邻补角；

(2) 写出 $\angle DOA$，$\angle EOC$ 的对顶角；

(3) 如果 $\angle AOC=50^\circ$，求 $\angle BOD$，$\angle COB$ 的度数.



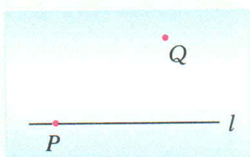
（第 2 题）



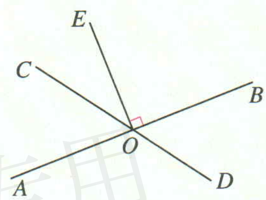
（第 3 题）

3. 找出图中互相垂直的线段，并用三角尺检验.

4. 如图，在一张半透明的纸上画一条直线 l，在 l 上任取一点 P，在 l 外任取一点 Q，折出过点 P 且与 l 垂直的直线. 这样的直线能折出几条？为什么？过点 Q 呢？



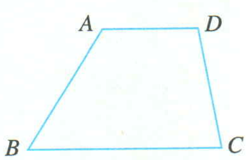
（第 4 题）



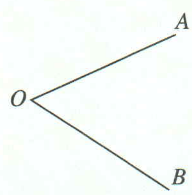
（第 5 题）

5. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$EO\perp AB$，垂足为 O，$\angle EOC=35^\circ$. 求 $\angle AOD$ 的度数.

6. 如图，画 $AE\perp BC$，$CF\perp AD$，垂足分别为 E，F.



（第 6 题）



（第 7 题）

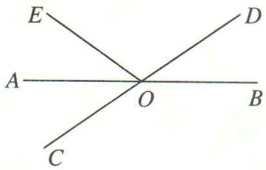
7. 如图，用量角器画 $\angle AOB$ 的平分线 OC，在 OC 上任取一点 P，比较点 P 到 OA，OB 的距离的大小.

综合运用

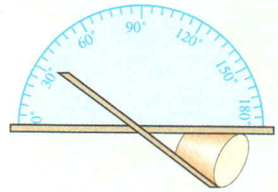
8. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，OA 平分 $\angle EOC$.

(1) 若 $\angle EOC=70^\circ$，求 $\angle BOD$ 的度数；

(2) 若 $\angle EOC:\angle EOD=2:3$，求 $\angle BOD$ 的度数.



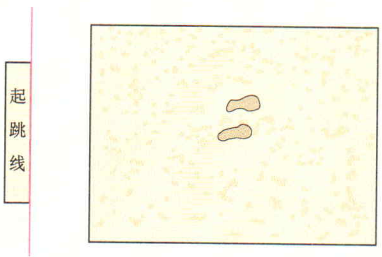
（第 8 题）



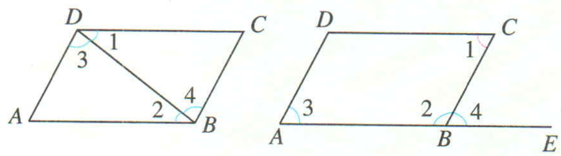
（第 9 题）

9. 图中是对顶角量角器，你能说出用它测量角的原理吗？

10. 如图，这是小明同学在体育课上跳远后留下的脚印，他的跳远成绩是多少（比例尺为 1∶150）？



（第 10 题）



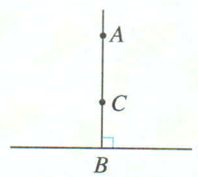
（1）　　（2）

（第 11 题）

11. 如图，$\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各是哪两条直线被哪一条直线所截形成的？它们各是什么位置关系的角？

拓广探索

12. 如图，$AB \perp l$，$BC \perp l$，B 为垂足，那么 A，B，C 三点在同一条直线上吗？



（第 12 题）

13. 直线 AB，CD 相交于点 O.

（1）OE，OF 分别是 $\angle AOC$，$\angle BOD$ 的平分线．画出这个图形.

（2）射线 OE，OF 在同一条直线上吗？

（3）画 $\angle AOD$ 的平分线 OG．OE 与 OG 有什么位置关系？

观察与猜想

看图时的错觉

观察以下图形，并回答所提的问题.

1. 图 1 中的线段 a 与 b 哪一条长？

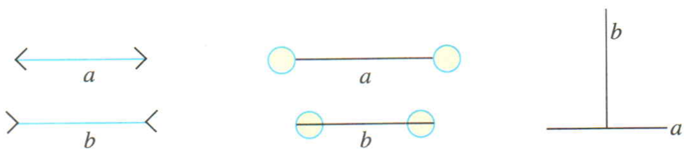


图 1

2. 图 2 中的圆 A 大还是圆 B 大？

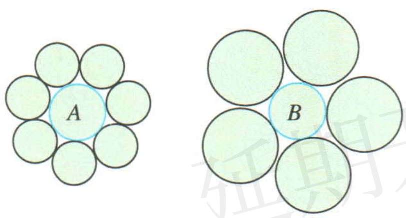


图 2

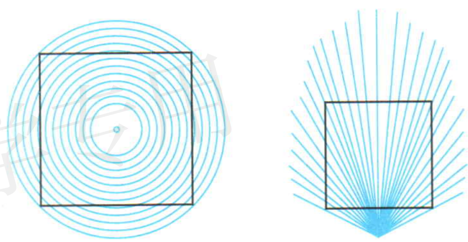


图 3

3. 图 3 中的四边形是正方形吗？

你对自己的结论有把握吗？利用刻度尺和三角尺量一量、测一测，这时你的答案是什么？

要对事物作出某种判断，总是基于对这个事物的观察、实验与思考，其中观察和实验是作出判断的重要依据. 所以，观察必须认真、仔细，不能粗枝大叶、马马虎虎. 有时观察得出的猜想不一定正确，还要借助于实验进行检验.

图 4 中的线 a 与 b 互相平行吗？如何检验？学习了后面的知识后，你的检验方法会更多.

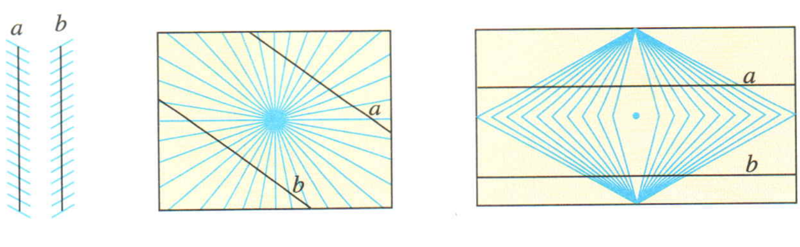


图 4

5.2 平行线及其判定

5.2.1 平行线

思考

如图 5.2-1，分别将木条 a，b 与木条 c 钉在一起，并把它们想象成在同一平面内两端可以无限延伸的三条直线．转动 a，直线 a 从在 c 的左侧与直线 b 相交逐步变为在 c 的右侧与 b 相交．想象一下，在这个过程中，有没有直线 a 与直线 b 不相交的位置呢？

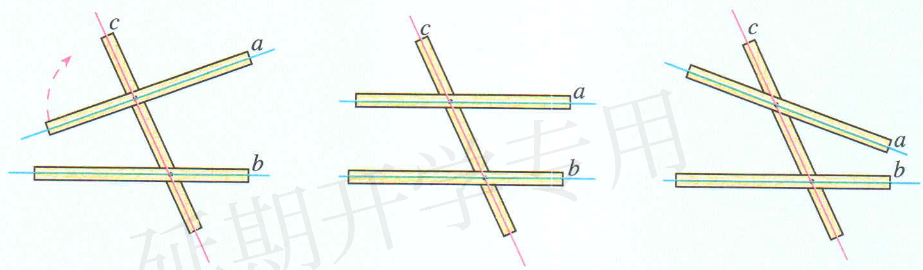


图 5.2-1

可以发现，在木条转动过程中，存在直线 a 与 b 不相交的情形，这时我们说直线 a 与 b 互相**平行**（parallel），记作 $a/\!/b$．

平行线在生活中是很常见的（图 5.2-2），你还能举出其他一些例子吗？

在同一平面内，不重合的两条直线只有两种位置关系：相交和平行．

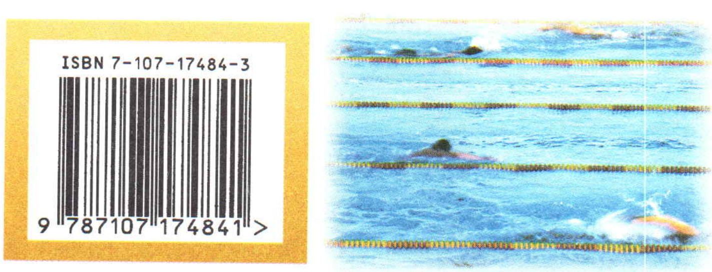


图 5.2-2

思考

在图 5.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？如图 5.2-3，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？再过点 C 画直线 a 的平行线，它和前面过点 B 画出的直线平行吗？

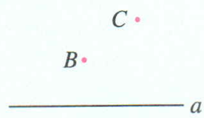


图 5.2-3

通过观察和画图，可以发现一个基本事实（平行公理）：

经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

由平行公理，进一步可以得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

也就是说：如果 $b/\!/a$，$c/\!/a$，那么 $b/\!/c$(图 5.2-4).

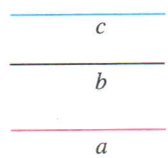


图 5.2-4

练习

读下列语句，并画出图形：

(1) 点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，且与直线 AB 平行；

(2) 直线 AB，CD 是相交直线，点 P 是直线 AB，CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 E.

5.2.2 平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行. 但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行. 那么，有没有其他判定方法呢?

思考

我们以前已学过用直尺和三角尺画平行线(图 5.2-5). 在这一过程中，三角尺起着什么样的作用?

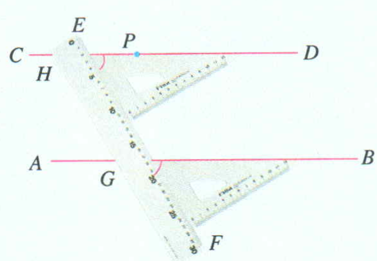


图 5.2-5

简化图 5.2-5 得到图 5.2-6. 可以看出，画直线 AB 的平行线 CD，实际上就是过点 P 画与$\angle 2$ 相等的$\angle 1$，而$\angle 2$ 和$\angle 1$ 正是直线 AB，CD 被直线 EF 截得的同位角. 这说明，如果同位角相等，那么 $AB /\!/ CD$.

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的方法：

判定方法 1 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简单说成：同位角相等，两直线平行.

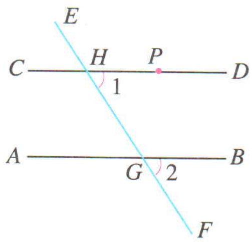


图 5.2-6

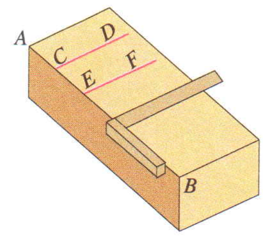


图 5.2-7

如图 5.2-7，你能说出木工用图中的角尺画平行线的道理吗？

思考

两条直线被第三条直线所截，同时得到同位角、内错角和同旁内角. 由同位角相等，可以判定两条直线平行，那么能否利用内错角，或同旁内角来判定两条直线平行呢？

如图 5.2-8，如果$\angle 2=\angle 3$，能得出 $a /\!/ b$ 吗？

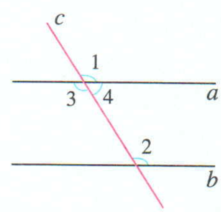


图 5.2-8

因为$\angle 2=\angle 3$，而$\angle 3=\angle 1$（为什么?），所以$\angle 1=\angle 2$，即同位角相等，从而 $a /\!/ b$. 这样，由判定方法 1，可以得出利用内错角判定两条直线平行的方法：

判定方法 2 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单说成：内错角相等，两直线平行.

利用同旁内角，有判定两条直线平行的第三种方法：

判定方法 3 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行.

简单说成：**同旁内角互补，两直线平行.**

探究

遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题. 这一节中，我们是怎样利用“同位角相等，两直线平行”得到“内错角相等，两直线平行”的？你能利用“同位角相等，两直线平行”或“内错角相等，两直线平行”得到“同旁内角互补，两直线平行”吗？

例 在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？为什么？

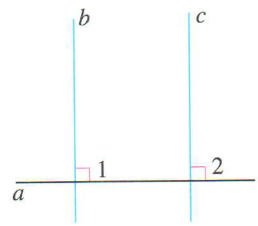


图 5.2-9

分析： 垂直总与直角联系在一起，进而用判断两条直线平行的方法进行判定.

答： 这两条直线平行. 理由如下：

如图 5.2-9.

∵ $b\perp a$，

∴ $\angle 1=90^\circ$.

同理 $\angle 2=90^\circ$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角，

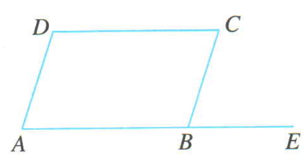
∴ $b/\!/c$（同位角相等，两直线平行）.

> 此处符号“∵”表示“因为”，符号“∴”表示“所以”.

你还能利用其他方法说明 $b/\!/c$ 吗？

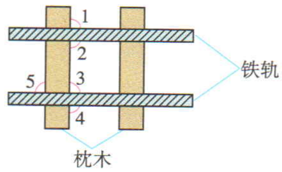
练习

1. 如图，BE 是 AB 的延长线.
   (1) 由 $\angle CBE=\angle A$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？
   (2) 由 $\angle CBE=\angle C$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？



（第 1 题）

2. 在铺设铁轨时，两条直轨必须是互相平行的. 如图，已经知道 $\angle 2$ 是直角，那么再度量图中已标出的哪个角，就可以判断两条直轨是否平行？为什么？



（第 2 题）

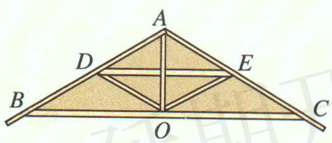
（第 3 题）

3. 如图，这是小明同学自己制作的英语抄写纸的一部分. 其中的横格线互相平行吗？你有多少种判别方法？

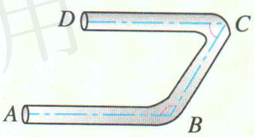
习题 5.2

复习巩固

1. 如图，为了加固房屋，要在屋架上加一根横梁 DE，使 $DE/\!/BC$. 如果 $\angle ABC=31^\circ$，$\angle ADE$ 应为多少度？



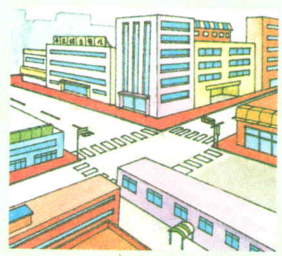
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一个弯形管道 $ABCD$ 的拐角 $\angle ABC=120^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，这时说管道 $AB/\!/CD$ 对吗？为什么？

3. 如图，这是两条道路互相垂直的交叉路口，你能画出它的平面示意图吗？类似地，你能画出两条道路成 75° 角的交叉路口的示意图吗？



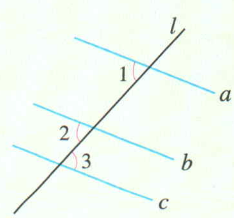
（第 3 题）

4. 如图，直线 a，b，c 被直线 l 所截，量得 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

(1) 从 $\angle 1=\angle 2$ 可以得出哪两条直线平行？根据是什么？

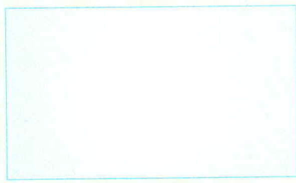
(2) 从 $\angle 1=\angle 3$ 可以得出哪两条直线平行？根据是什么？

(3) 直线 a，b，c 互相平行吗？根据是什么？

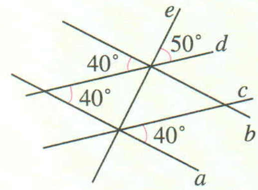


（第 4 题）

5. 如图，有一块方形玻璃，用什么方法可以检验它相对的两条边是否平行？



（第 5 题）

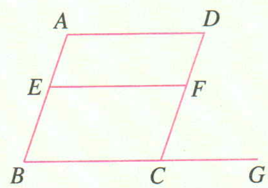


（第 6 题）

6. 根据图中所给出的条件，找出互相平行的直线和互相垂直的直线.

综合运用

7. 如图，E 是 AB 上一点，F 是 DC 上一点，G 是 BC 延长线上一点.



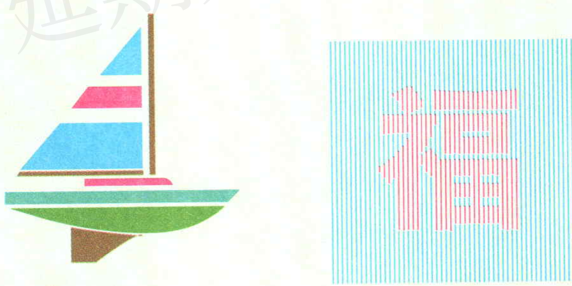
（第 7 题）

(1) 如果 $\angle B = \angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

(2) 如果 $\angle D = \angle DCG$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

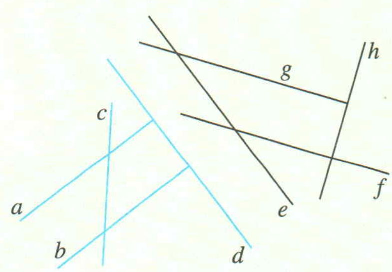
(3) 如果 $\angle D + \angle DFE = 180°$，可以判断哪两条直线平行？为什么？

8. 如图，这些图案中有一些平行条纹，请你设计一些类似图案，并把你的设计与同学们交流一下.



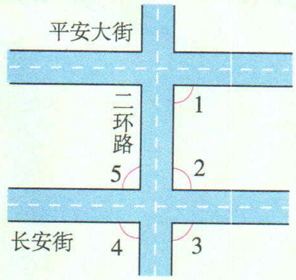
（第 8 题）

9. 借助直尺、三角尺和量角器，在图中找出互相平行的直线和互相垂直的直线.



（第 9 题）

10. 如图，为了说明示意图中的平安大街与长安街是互相平行的，在地图上量得$\angle 1=90^\circ$，你能通过度量图中已标出的其他的角来验证这个结论吗？说出你的理由.

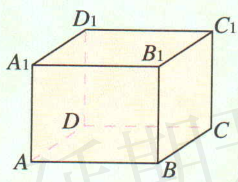


（第 10 题）

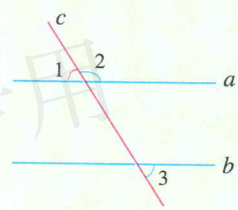
拓广探索

11. 观察如图所示的长方体，用符号表示下列两棱的位置关系：A_1B_1 ______ AB，AA_1 ______ AB，A_1D_1 ______ C_1D_1，AD ______ BC.

你能在教室里找到这些位置关系的实例吗？与同学们讨论一下.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，当$\angle 1=\angle 3$时，直线a，b平行吗？当$\angle 2+\angle 3=180^\circ$时，直线$a$，$b$平行吗？为什么？

5.3 平行线的性质

5.3.1 平行线的性质

利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？这就是我们下面要学习的平行线的性质.

类似于研究平行线的判定，我们先来研究两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同位角的关系.

探究

如图 5.3-1，利用坐标纸上的直线，或者用直尺和三角尺画两条平行线 $a/\!/b$，然后，画一条截线 c 与这两条平行线相交，度量所形成的八个角的度数，把结果填入下表：

角	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
度数				
角	$\angle 5$	$\angle 6$	$\angle 7$	$\angle 8$
度数				

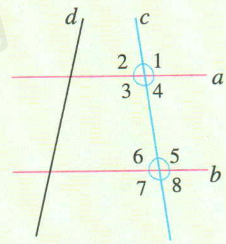


图 5.3-1

$\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle 8$ 中，哪些是同位角？它们的度数之间有什么关系？由此猜想两条平行线被第三条直线截得的同位角有什么关系.

再任意画一条截线 d，同样度量并比较各对同位角的度数，你的猜想还成立吗？

一般地，平行线具有性质：

性质 1 两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.

简单说成：两直线平行，同位角相等.

思考

上一节，我们利用“同位角相等，两直线平行”推出了“内错角相等，两直线平行”．类似地，你能由性质 1，推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗？

如图 5.3-2，直线 $a /\!/ b$，c 是截线．根据“两直线平行，同位角相等”，可得 $\angle 2=\angle 3$．而 $\angle 3$ 和 $\angle 1$ 互为对顶角，所以 $\angle 3=\angle 1$．所以 $\angle 1=\angle 2$．这样，我们就得到了平行线的另一个性质：

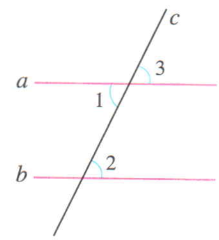


图 5.3-2

性质 2　两条平行线被第三条直线所截，内错角相等．

简单说成：两直线平行，内错角相等．

类似地，由“两直线平行，同位角相等”，我们可以推出平行线关于同旁内角的性质（请你自己完成推理过程）：

性质 3　两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补．

简单说成：两直线平行，同旁内角互补．

例 1　图5.3-3 是一块梯形铁片的残余部分，量得 $\angle A=100°$，$\angle B=115°$，梯形的另外两个角分别是多少度？

解： 因为梯形上、下两底 AB 与 DC 互相平行，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可得 $\angle A$ 与 $\angle D$ 互补，$\angle B$ 与 $\angle C$ 互补．

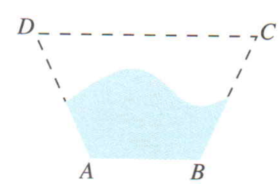


图 5.3-3

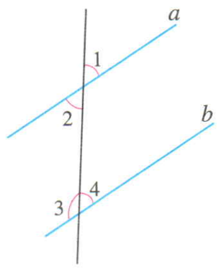
于是

$$\angle D=180°-\angle A=180°-100°=80°,$$
$$\angle C=180°-\angle B=180°-115°=65°.$$

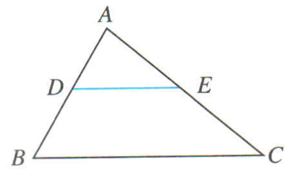
所以梯形的另外两个角分别是 80°，65°．

练习

1. 如图，直线$a//b$，$\angle 1=54°$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 各是多少度？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，三角形 ABC 中，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，$\angle ADE=60°$，$\angle B=60°$，$\angle AED=40°$.

   (1) DE 和 BC 平行吗？为什么？

   (2) $\angle C$ 是多少度？为什么？

5.3.2　命题、定理、证明

前面，我们学过一些对某一件事情作出判断的语句，例如：

(1) 如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；

(2) 两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补；

(3) 对顶角相等；

(4) 等式两边加同一个数，结果仍是等式.

像这样判断一件事情的语句，叫做**命题**（proposition）. 命题由题设和结论两部分组成. 题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项.

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论. 例如，上面命题（1）中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论.

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出题设和结论，从而将它们写成“如果……那么……”的形式. 例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

> 请你将命题（2）（4）改写成“如果……那么……”的形式.

上面所举出的命题都是正确的．就是说，如果题设成立，那么结论一定成立，这样的命题叫做**真命题**．还有一些命题，如“如果两个角互补，那么它们是邻补角”“如果一个数能被 2 整除，那么它也能被 4 整除”等，这些命题中，题设成立时，不能保证结论一定成立，这样的命题叫做**假命题**．

练习

1. 指出下列命题的题设和结论：

   (1) 如果 $AB \perp CD$，垂足为 O，那么 $\angle AOC=90^\circ$；

   (2) 如果 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，那么 $\angle 1=\angle 3$；

   (3) 两直线平行，同位角相等．

2. 举出学过的 2～3 个真命题．

在前面，我们学过的一些图形的性质，都是真命题．其中有些命题是基本事实，如“两点确定一条直线”“经过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”等．还有一些命题，如“对顶角相等”“内错角相等，两直线平行”等，它们的正确性是经过推理证实的，这样得到的真命题叫做**定理**（theorem）．定理也可以作为继续推理的依据．

在很多情况下，一个命题的正确性需要经过推理才能作出判断，这个推理过程叫做**证明**（proof）．下面，我们以证明命题“在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条”为例，来说明什么是证明．

例 2 如图5.3-4，已知直线 $b \parallel c$，$a \perp b$．求证 $a \perp c$．

证明： ∵ $a \perp b$（已知），

∴ $\angle 1=90^\circ$（垂直的定义）．

∵ $b \parallel c$（已知），

∴ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）．

∴ $\angle 2=\angle 1=90^\circ$（等量代换）．

∴ $a \perp c$（垂直的定义）．

证明中的每一步推理都要有根据，不能“想当然”．这些根据，可以是已知条件，也可以是学过的定义、基本事实、定理等．

判断一个命题是假命题，只要举出一个例子（反例），它符合命题的题设，但不满足结论就可以了．

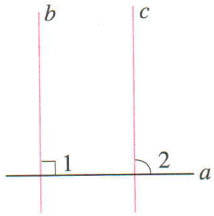


图 5.3-4

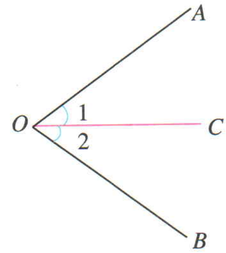
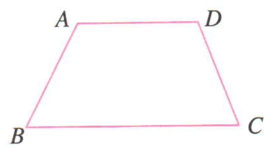


图 5.3-5

例如，要判定命题“相等的角是对顶角”是假命题，可以举出如下反例：图 5.3-5 中，OC 是$\angle AOB$ 的平分线，$\angle 1=\angle 2$，但它们不是对顶角.

练习



（第 1 题）

1. 在下面的括号内，填上推理的根据.

   如图，$\angle A+\angle B=180^{\circ}$，求证$\angle C+\angle D=180^{\circ}$.

   证明：∵ $\angle A+\angle B=180^{\circ}$，

   ∴ $AD /\!/ BC$（____________________）.

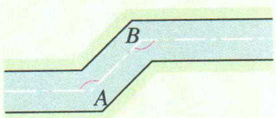
   ∴ $\angle C+\angle D=180^{\circ}$（____________________）.

2. 命题“同位角相等”是真命题吗？如果是，说出理由；如果不是，请举出反例.

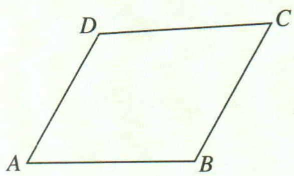
习题 5.3

复习巩固

1. 如图，一条公路两次转弯后，和原来的方向相同. 如果第一次的拐角$\angle A$ 是 135°，第二次的拐角$\angle B$ 是多少度？为什么？



（第 1 题）



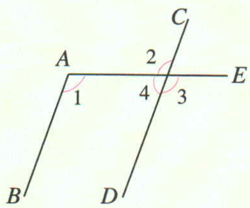
（第 2 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AD /\!/ BC$，$\angle A=60^{\circ}$，求$\angle B$ 的度数. 不用度量的方法，能否求得$\angle D$ 的度数？
3. 如图，平行线 AB，CD 被直线 AE 所截.

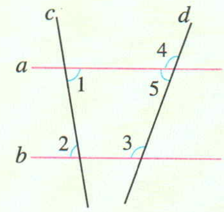
   (1) 从$\angle 1=110^{\circ}$ 可以知道$\angle 2$ 是多少度？为什么？

(2) 从$\angle 1=110^\circ$可以知道$\angle 3$是多少度？为什么？

(3) 从$\angle 1=110^\circ$可以知道$\angle 4$是多少度？为什么？



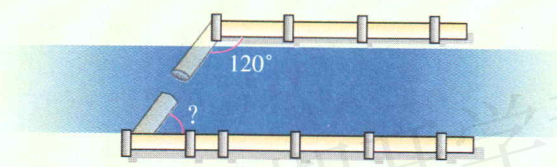
（第 3 题）



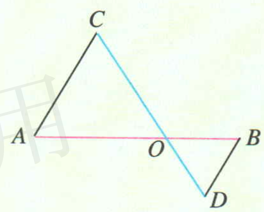
（第 4 题）

4. 如图，$a//b$，c，d是截线，$\angle 1=80^\circ$，$\angle 5=70^\circ$. $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$各是多少度？为什么？

5. 如图，一条公路的两侧铺设了两条平行管道，如果公路一侧铺设的管道与纵向连通管道的角度为120°，那么，为了使管道对接，另一侧应以什么角度铺设纵向连通管道？为什么？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 在下面的括号内，填上推理的根据.

如图，AB和CD相交于点O，$\angle A=\angle B$. 求证$\angle C=\angle D$.

证明：∵ $\angle A=\angle B$，

∴ $AC//BD$（________________________）.

∴ $\angle C=\angle D$（________________________）.

综合运用

7. 选择题.

(1) 如图 (1)，由$AB//CD$，可以得到（　　）.

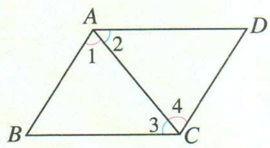
(A) $\angle 1=\angle 2$　　(B) $\angle 2=\angle 3$

(C) $\angle 1=\angle 4$　　(D) $\angle 3=\angle 4$

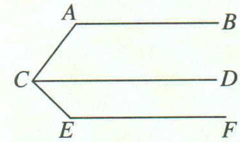
(2) 如图 (2)，如果$AB//CD//EF$，那么$\angle BAC+\angle ACE+\angle CEF=$（　　）.

(A) 180°　　(B) 270°

(C) 360°　　(D) 540°



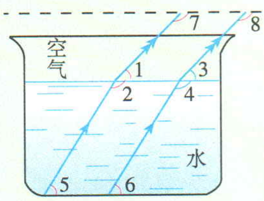
(1)



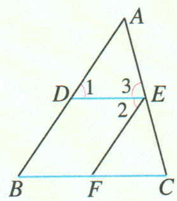
(2)

（第 7 题）

8. 光线在不同介质中的传播速度是不同的，因此当光线从水中射向空气时，要发生折射. 由于折射率相同，所以在水中平行的光线，在空气中也是平行的. 如图，$\angle 1=45°$，$\angle 2=122°$，求图中其他角的度数.



（第 8 题）



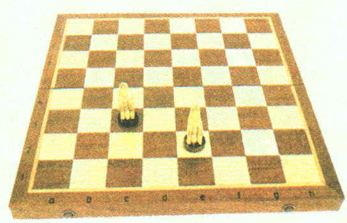
（第 9 题）

9. 如图，用式子表示下列句子：

(1) 因为$\angle 1$和$\angle 2$相等，根据“内错角相等，两直线平行”，所以 AB 和 EF 平行；

(2) 因为 DE 和 BC 平行，根据“两直线平行，同位角相等”，所以$\angle 1=\angle B$，$\angle 3=\angle C$.

10. 如图，这是一个国际象棋棋盘的示意图，它共有 8 行 8 列，仿照它做出一张国际象棋的棋盘纸. 类似地，你还能做出一张中国象棋的棋盘纸吗？



（第 10 题）

11. 操场中的相交线与平行线.

(1) 举出操场中一些相交线、垂线、平行线的例子；

(2) 如果要你画出一个篮球场地，你怎样做才能保证相应的线垂直或平行呢？不妨在纸上试一试.

12. 判断下列命题是真命题还是假命题，如果是假命题，举出一个反例.

(1) 两个锐角的和是锐角；

(2) 邻补角是互补的角；

(3) 同旁内角互补.

13. 完成下面的证明.

(1) 如图 (1)，$AB /\!/ CD$，$CB /\!/ DE$. 求证$\angle B+\angle D=180°$.

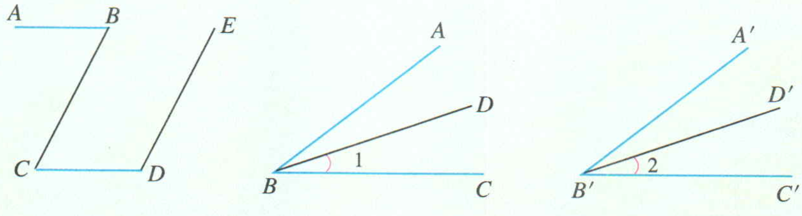
证明：$\because$ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle B=$________（___________________________）.

∵ $CB /\!/ DE$,

∴ $\angle C+\angle D=180^\circ$（___________________________）.

∴ $\angle B+\angle D=180^\circ$.



（1）　　　　　　（2）

（第 13 题）

（2）如图（2），$\angle ABC=\angle A'B'C'$，BD，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线．求证$\angle 1=\angle 2$.

证明：∵ BD，$B'D'$分别是$\angle ABC$，$\angle A'B'C'$的平分线，

∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=$________（___________________________）.

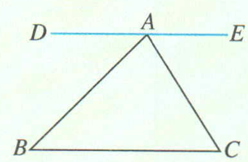
又 $\angle ABC=\angle A'B'C'$，

∴ $\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle A'B'C'$.

∴ $\angle 1=\angle 2$（___________________________）.

拓广探索

14. 如图，直线 DE 经过点 A，$DE /\!/ BC$，$\angle B=44^\circ$，$\angle C=57^\circ$.



（第 14 题）

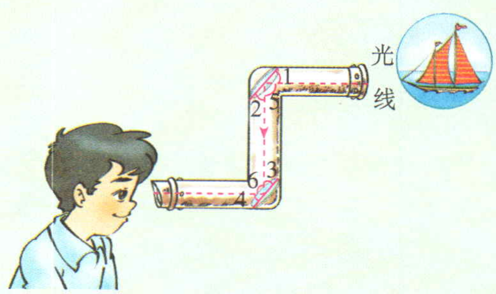
（1）$\angle DAB$ 等于多少度？为什么？

（2）$\angle EAC$ 等于多少度？为什么？

（3）$\angle BAC$ 等于多少度？

（通过这道题，你能说明为什么三角形的内角和是 180°吗？）

15. 如图，潜望镜中的两面镜子是互相平行放置的，光线经过镜子反射时，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 2$ 和$\angle 3$ 有什么关系？为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的？（提示：分析这两条光线被哪条直线所截．）



（第 15 题）

信息技术应用

探索两条直线的位置关系

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以很方便、直观地探索两条直线的位置关系. 下面，我们以《几何画板》软件为例说明.

1. 探索邻补角、对顶角的关系

画两条相交直线 AB，CD（图 1），在它们所成的四个角中，哪些互为邻补角？哪些互为对顶角？度量这四个角的度数，它们的大小有什么关系？拖动点 B 或点 C，改变角的大小，这个关系还保持吗？

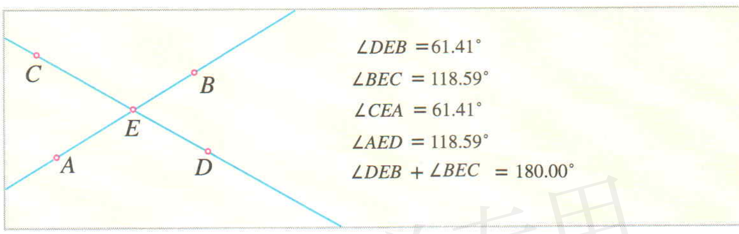


图 1

2. 探索垂线段的性质

如图 2，$PO\perp l$，点 A 在直线 l 上运动，度量并观察线段 PO 和 PA 的长度，你能发现什么结论？

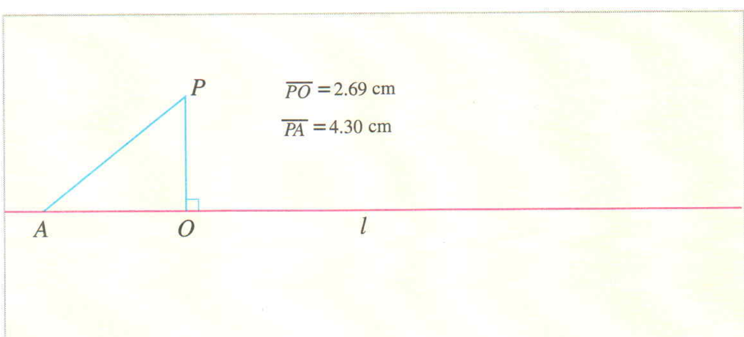


图 2

3. 探索平行线的性质

如图 3，过点 C 画直线 AB 的平行线，度量所形成的八个角的度数，其中的同位角、内错角、同旁内角有什么关系？拖动点 A、点 B 或直线 CA，这个关系还成立吗？

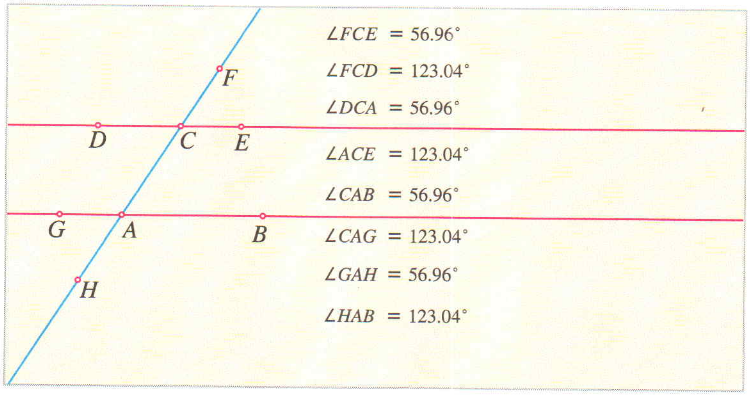


图 3

如图 4，再任意画两条直线以及它们的截线，它们所形成的八个角的度数还存在上述关系吗？拖动点 B 或点 D，观察这些角的度数，什么时候直线 AB 和 CD 平行？

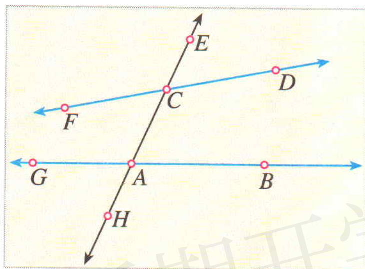


图 4

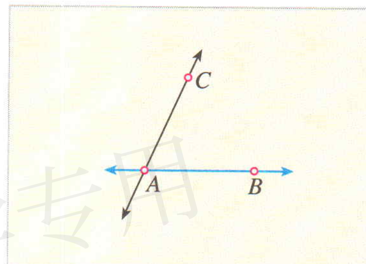


图 5

利用上面的规律，你能过点 C 画直线 AB 的平行线吗（图 5）？你有几种方法？利用软件的画角功能试一试.

5.4 平移

仔细观察下面一些美丽的图案（图 5.4-1），它们有什么共同的特点？能否根据其中的一部分绘制出整个图案？

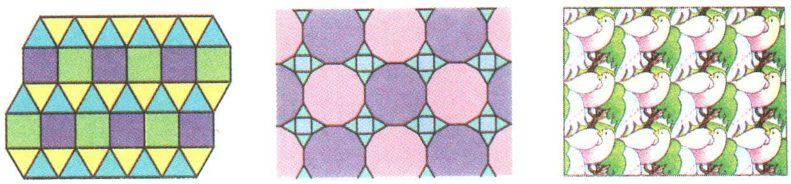


图 5.4-1

探究

如何在一张半透明的纸上，画出一排形状和大小如图 5.4-2的雪人呢？

图 5.4-2

图 5.4-3

可以把半透明的纸盖在图 5.4-2 上，先描出一个雪人，然后按同一方向陆续移动这张纸，再描出第二个、第三个……（图 5.4-3）.

思考

如图 5.4-4，在所画出的相邻两个雪人中，找出三组对应点（例如，它们的鼻尖 A 与 A'，帽顶 B 与 B'，纽扣 C 与 C'），连接这些对应点，观察得出的线段，它们的位置、长短有什么关系？

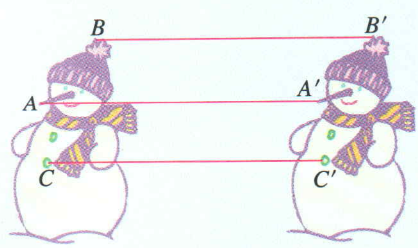


图 5.4-4

可以发现，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$，并且 $AA' = BB' = CC'$.

再画出一些连接其他对应点的线段，它们是否仍有前面的关系？

归纳

1. 把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同.

2. 新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行（或在同一条直线上）且相等.

图形的这种移动，叫做平移（translation）.

图形平移的方向，不限于是水平的，如图 5.4-5.

平移在我们日常生活中是很常见的，利用平移也可以制作很多美丽的图案. 你能举出生活中一些利用平移的例子吗？

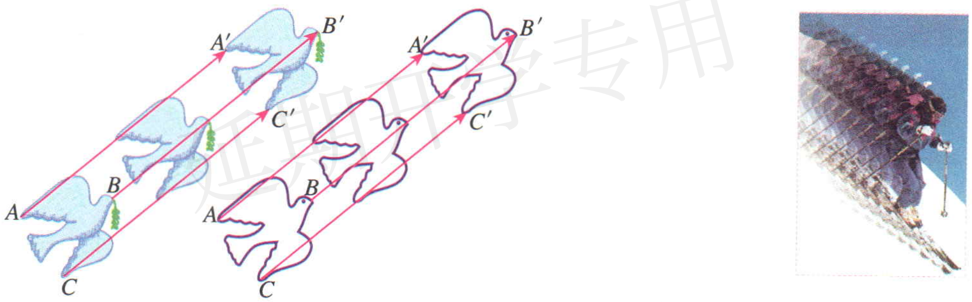
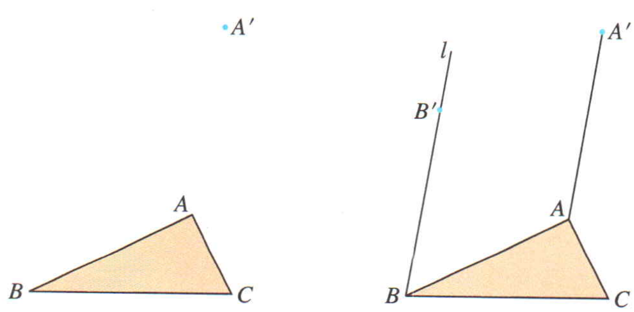


图 5.4-5

例 如图5.4-6（1），平移三角形 ABC，使点 A 移动到点 A'，画出平移后的三角形 $A'B'C'$.



（1）　　　　（2）

图 5.4-6

分析： 图形平移后的对应点有什么特征？作出点 B 和点 C 的对应点 B'，C'，能确定三角形 $A'B'C'$ 吗？

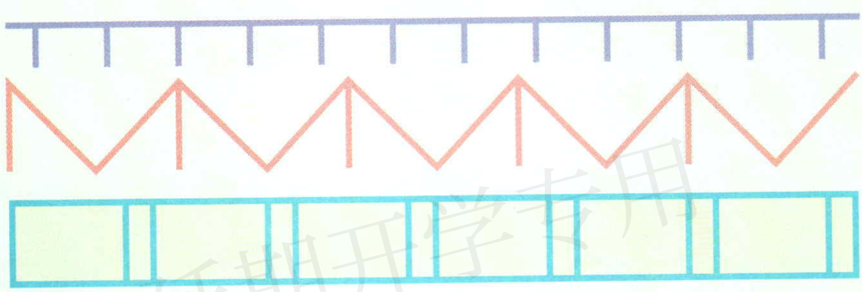
解： 如图5.4-6（2），连接 AA'，过点 B 作 AA' 的平行线 l，在 l 上截取 $BB'=AA'$，则点 B' 就是点 B 的对应点.

类似地，你能作出点 C 的对应点 C'，并进一步得到平移后的三角形 $A'B'C'$ 吗？动手试一试.

习题 5.4

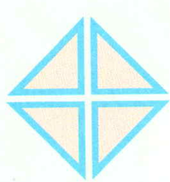
复习巩固

1. 下列图案可以由什么图形平移形成？

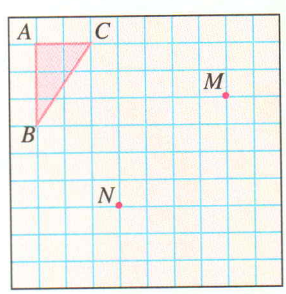


（第 1 题）

2. 如图，有一个由 4 个三角形组成的图形，通过平移，你能用它组成什么图案？试一试，把你的图案与同学们交流一下.



（第 2 题）

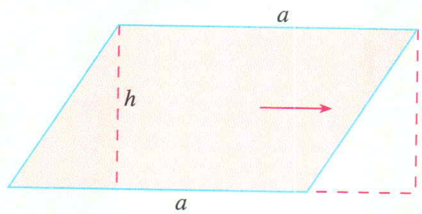


（第 3 题）

3. 如图，在方格纸中平移三角形 ABC，使点 A 移到点 M，点 B 和点 C 应移到什么位置？再将点 A 由点 M 移到点 N，分别画出两次平移后的三角形. 如果直接平移三角形 ABC，使点 A 移到点 N，它和我们前面得到的三角形位置相同吗？

综合运用

4. 如图，用平移方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



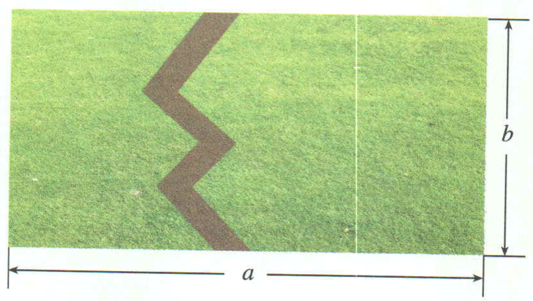
（第 4 题）

5. 许多美丽的图案都是用平移的方法绘制而成的. 观察下面图案的绘制规律，你能类似地设计一些图案吗？

（第 5 题）

拓广探索

6. 如图，在一块长为 a m，宽为 b m 的长方形草地上，有一条弯曲的小路，小路的左边线向右平移 1 m 就是它的右边线. 求这块草地的绿地面积.



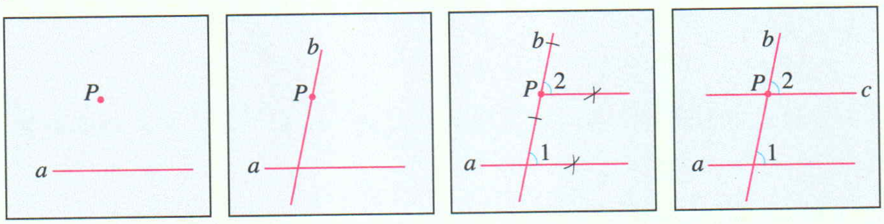
（第 6 题）

数学活动

活动1　你有多少种画平行线的方法？

学习了平行线后，李强、张明、王玲三位同学分别想出了过一点画一条直线的平行线的新的方法，他们分别是这样做的：

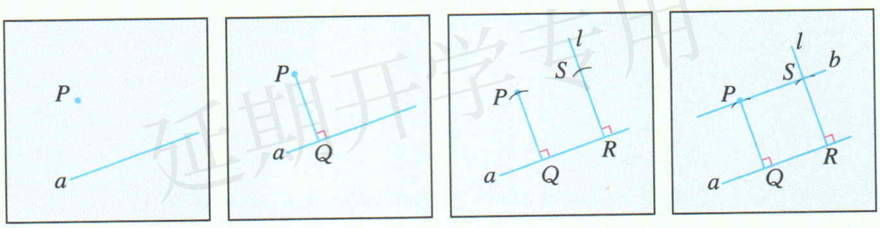
李强



过点P作直线b　　作$\angle 2=\angle 1$　　则$c/\!/a$

(1)　(2)　(3)　(4)

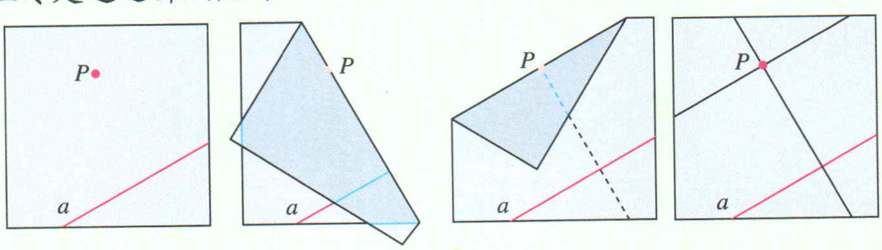
张明



作$PQ\perp a$　　作$l\perp a$，取$RS=PQ$　　连接PS，则$b/\!/a$

(1)　(2)　(3)　(4)

王玲是通过折纸做的



(1)　(2)　(3)　(4)

你还有其他方法吗？动手试一试，与同学们交流一下.

活动2 设计美丽的图案

利用平移，可以设计非常美丽的图案，例如图 1 中每一匹马都可以由正方形上的平移得到，如图 2 所示.

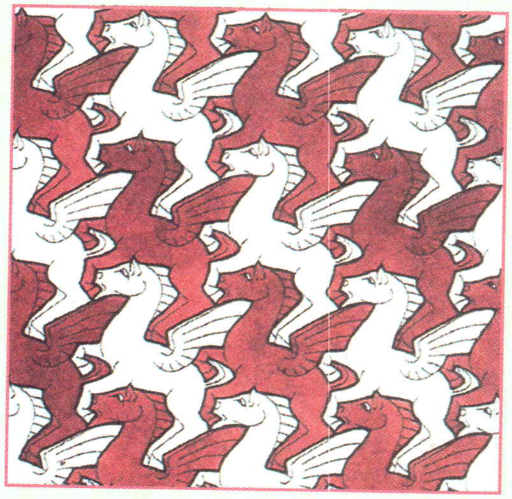


图 1

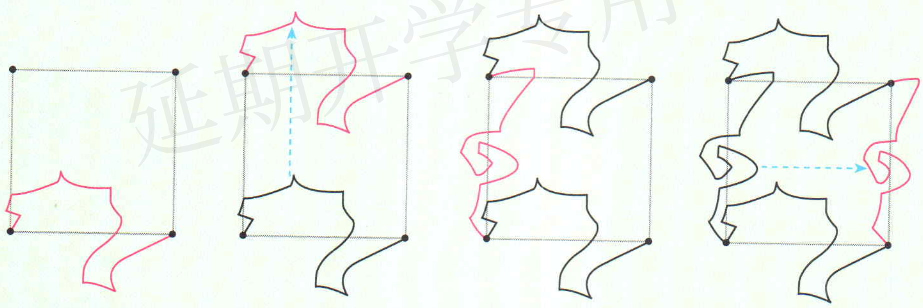
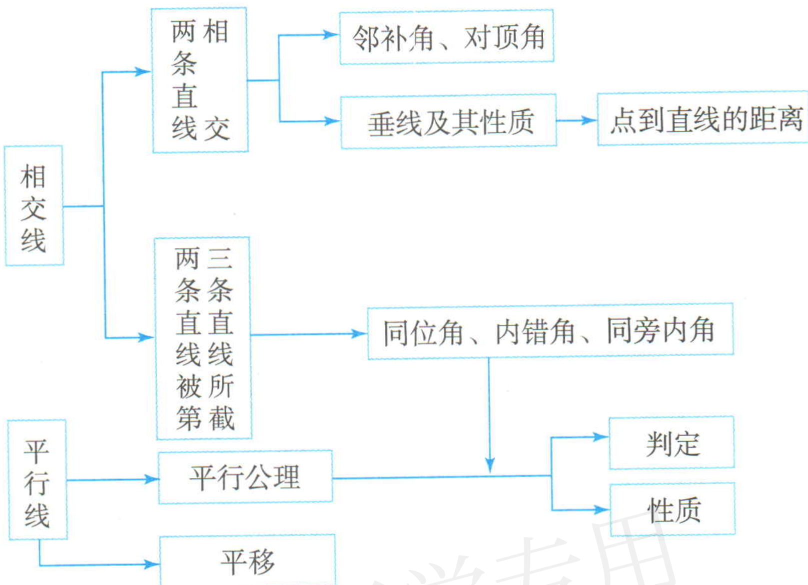


图 2

类似地，你还能用平移设计一些图案吗？

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了平面内不重合的两条直线的位置关系——相交与平行．当两条直线只有一个公共点时，这两条直线相交．在相交线的学习中，我们研究了两条直线相交所形成的邻补角和对顶角的位置和数量关系，这也是相交线的性质．垂直是相交的特殊情形，它在实际生产和社会生活中具有广泛的应用．当两条直线没有公共点时，这两条直线平行．借助两条直线被第三条直线所截形成的同位角、内错角和同旁内角，我们研究了平行线的判定与性质．

“图形的判定”讨论的是确定某种图形需要什么条件．例如，两条直线与第三条直线相交，具备“同位角相等”，就有“两直线平行”．“图形的性质”讨论的是这类图形有怎样的共同特性．例如，两条直线只要平行，它们被第三条直线所截时，就一定有同位角相等．

学习本章时，要注意观察实物、模型和图形，通过观察、测量、实验、归纳、对比、类比等来寻找图形中的位置关系和数量关系，从而发现图形的性质．同时，还要注意体会通过“推理”获得数学结论的方法，培养言之有据的习惯和有条理地思考、表达的能力．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 下面是本章学到的一些数学名词，你能用自己的语言描述它们吗？你能分别画一个图形表示它们吗？

对顶角、邻补角、垂直、平行、同位角、内错角、同旁内角、平移.

2. 两条直线相交形成四个角，它们具有怎样的位置关系和数量关系？

3. 什么是点到直线的距离？你会度量吗？请举例说明.

4. 怎样判定两条直线是否平行？平行线有什么性质？对比平行线的性质和直线平行的判定方法，它们有什么异同？

5. 什么是命题？如何判断一个命题是真命题还是假命题？请结合具体例子说明.

6. 图形平移时，连接各对应点的线段有什么关系？你能利用平移设计一些图案吗？

复习题 5

复习巩固

1. 判断题（正确的画√，错误的画×）.

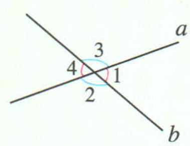
(1) a，b，c 是直线，若 $a // b$，$b // c$，则 $a // c$；（　　）

(2) a，b，c 是直线，若 $a \perp b$，$b \perp c$，则 $a \perp c$.（　　）

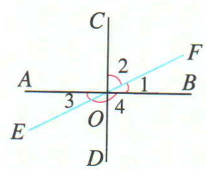
2. 如图，两条直线 a，b 相交.

(1) 如果 $\angle 1 = 60°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数；

(2) 如果 $2\angle 3 = 3\angle 1$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，直线 $AB \perp CD$，垂足为 O，直线 EF 经过点 O，$\angle 1 = 26°$，求 $\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 的度数.

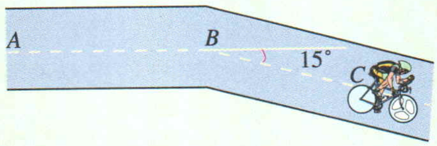
4. 根据下列语句画出图形：

(1) 过线段 AB 的中点 C，画 $CD \perp AB$；

(2) 点 P 到直线 AB 的距离是 3 cm，过点 P 画直线 AB 的垂线 PC；

(3) 过三角形 ABC 内的一点 P，分别画 AB，BC，CA 的平行线.

5. 如图，某人骑自行车自 A 沿正东方向前进，至 B 处后，行驶方向改为东偏南 $15°$，行驶到 C 处仍按正东方向行驶，画出继续行驶的路线.

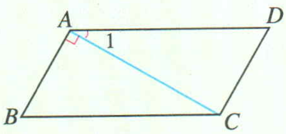


（第 5 题）

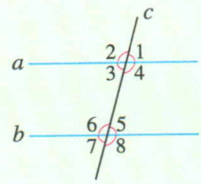
6. 如图，$\angle 1=30°$，$\angle B=60°$，$AB\perp AC$.

（1）$\angle DAB+\angle B$ 等于多少度？

（2）AD 与 BC 平行吗？AB 与 CD 平行吗？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，平行线 a，b 被直线 c 所截，知道 $\angle 1$～$\angle 8$ 中一个角的度数，能否求出其他角的度数？如果能，用其中一个角表示出其他各角.

综合运用

8. 选择题.

（1）如图（1），点 E 在 AC 的延长线上，下列条件中能判断 $AB/\!/CD$ 的是（　　）.

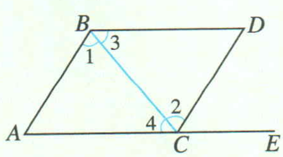
（A）$\angle 3=\angle 4$　　（B）$\angle 1=\angle 2$

（C）$\angle D=\angle DCE$　　（D）$\angle D+\angle ACD=180°$

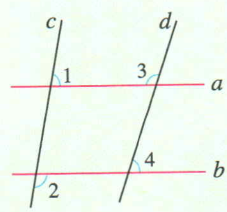
（2）如图（2），$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3=108°$，则 $\angle 4=$（　　）.

（A）$72°$　　（B）$80°$

（C）$82°$　　（D）$108°$



（1）

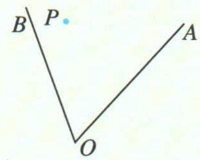


（2）

（第 8 题）

9. 图中所示为一组护网的示意图，它可看成由两组平行线组成，你能通过检验一些角的大小来判断其中的线段是否平行吗？说出你的理由.

（第 9 题）



（第 10 题）

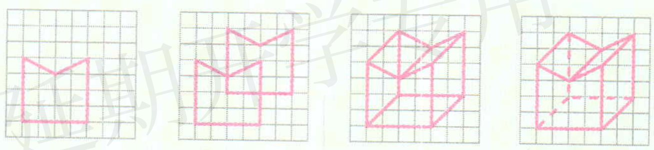
10. 如图，$\angle AOB$ 内有一点 P：

（1）过点 P 画 $PC\parallel OB$ 交 OA 于点 C，画 $PD\parallel OA$ 交 OB 于点 D；

（2）写出图中互补的角；

（3）写出图中相等的角.

11. 如图，利用平移可以画出一些立体图形. 在方格纸上写出你的名字或你的校名，用类似的方法画出它的立体图. 变换不同的长度和方向多试几次，你认为哪一种更具艺术效果？



（第 11 题）

12. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是真命题还是假命题. 如果是假命题，举出一个反例.

（1）两个角的和等于平角时，这两个角互为补角；

（2）内错角相等；

（3）两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

13. 完成下面的证明.

（1）如图（1），点 D，E，F 分别是三角形 ABC 的边 BC，CA，AB 上的点，$DE\parallel BA$，$DF\parallel CA$. 求证 $\angle FDE=\angle A$.

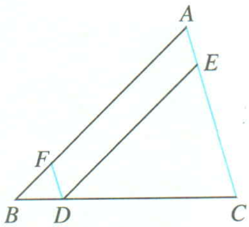
证明：$\because$ $DE\parallel BA$，

$\therefore$ $\angle FDE=$________（________________________）.

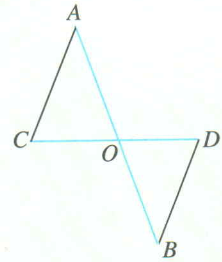
$\because$ $DF\parallel CA$，

$\therefore$ $\angle A=$________（________________________）.

$\therefore$ $\angle FDE=\angle A$.



(1)



(2)

（第 13 题）

(2) 如图（2），AB 和 CD 相交于点 O，$\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$．求证 $AC/\!/BD$．

证明：∵ $\angle C=\angle COA$，$\angle D=\angle BOD$，

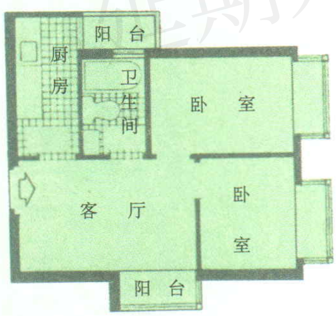
又 $\angle COA=\angle BOD$（____________________），

∴ $\angle C=$________．

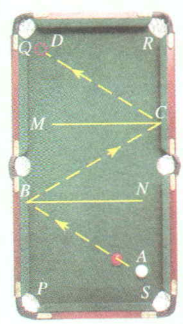
∴ $AC/\!/BD$（____________________）．

拓广探索

14. 如图，这是一套住房的平面图，图中有许多相交线和平行线．量量你家的住房，选择适当的比例尺，画出它的平面图．你能自己设计一个户型吗？



（第 14 题）



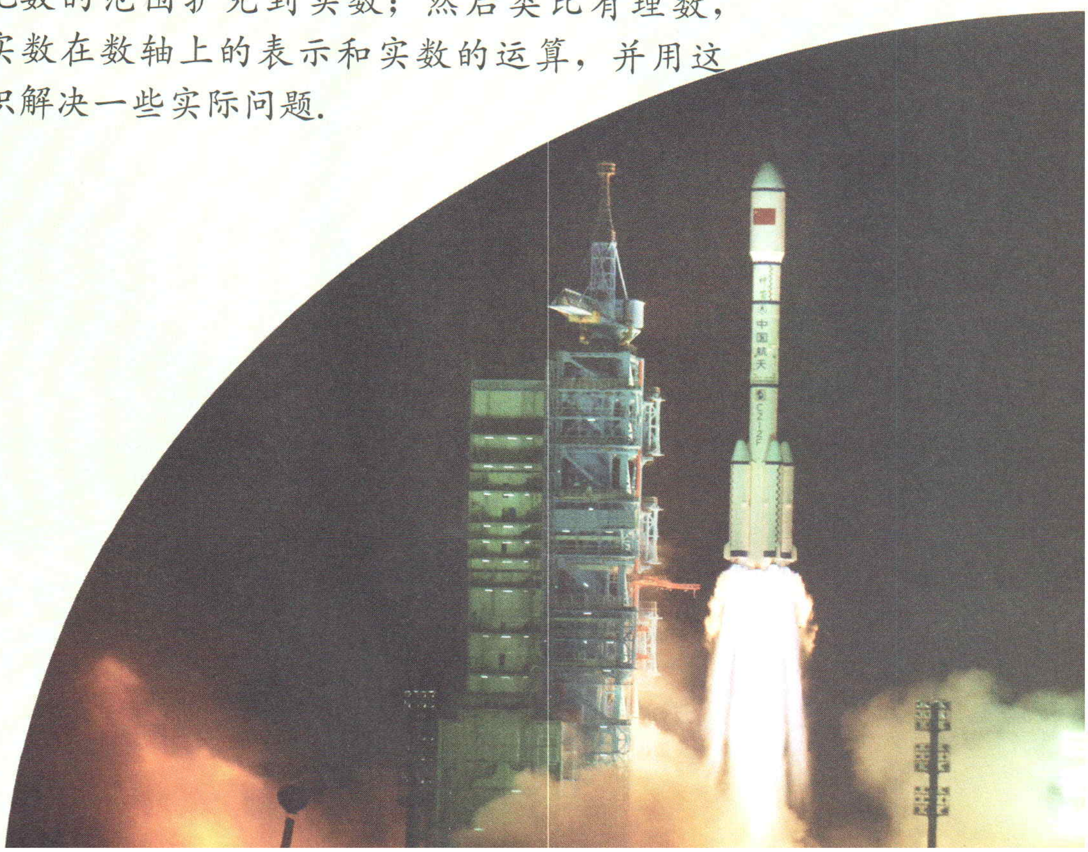
（第 15 题）

15. 一个台球桌的桌面如图所示，一个球在桌面上的点 A 滚向桌边 PQ，碰着 PQ 上的点 B 后便反弹而滚向桌边 RS，碰着 RS 上的点 C 便反弹而滚向点 D．如果 $PQ/\!/RS$，AB，BC，CD 都是直线，且 $\angle ABC$ 的平分线 BN 垂直于 PQ，$\angle BCD$ 的平分线 CM 垂直于 RS，那么，球经过两次反弹后所滚的路径 CD 是否平行于原来的路径 AB？

第六章　实数

同学们，你们知道宇宙飞船离开地球进入地面附近轨道的速度在什么范围内吗？这时它的速度要大于第一宇宙速度 v_1（单位：m/s），而小于第二宇宙速度 v_2（单位：m/s）．v_1，v_2 的大小满足 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，其中 g 是物理中的一个常数（重力加速度），$g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$R$ 是地球半径，$R\approx 6.4\times 10^6\ \mathrm{m}$．怎样求 v_1，v_2 呢？这就要用到平方根的概念．

随着对于数的认识的不断深入，人们发现，边长为 1 的正方形的对角线的长不是有理数，这就需要引入一种新的数——无理数．实际上，计算第一、第二宇宙速度等也要用到无理数．本章将首先学习平方根与立方根；在此基础上引入无理数，把数的范围扩充到实数；然后类比有理数，引入实数在数轴上的表示和实数的运算，并用这些知识解决一些实际问题．



6.1 平方根

问题　学校要举行美术作品比赛，小鸥想裁出一块面积为 25 dm^2 的正方形画布，画上自己的得意之作参加比赛，这块正方形画布的边长应取多少？

你一定会算出边长应取 5 dm. 说一说，你是怎样算出来的？

因为 $5^2=25$，所以这个正方形画布的边长应取 5 dm.

填表：

正方形的面积/dm^2	1	9	16	36	$\frac{4}{25}$
正方形的边长/dm					

上面的问题，实际上是已知一个正数的平方，求这个正数的问题.

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根**（arithmetic square root）. a 的算术平方根记为$\sqrt{a}$，读作“根号 a”，a 叫做**被开方数**（radicand）.

规定：**0 的算术平方根是 0.**

例 1　求下列各数的算术平方根：

（1）100；　　（2）$\frac{49}{64}$；　　（3）0.000 1.

解：（1）因为 $10^2=100$，所以 100 的算术平方根是 10，即 $\sqrt{100}=10$；

（2）因为 $\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，所以$\frac{49}{64}$的算术平方根是$\frac{7}{8}$，即$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$；

（3）因为 $0.01^2=0.000\,1$，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即 $\sqrt{0.000\,1}=0.01$.

从例 1 可以看出：被开方数越大，对应的算术平方根也越大. 这个结论对所有正数都成立.

练习

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 0.002 5；　　(2) 81；　　(3) 3^2.

2. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1}$；　　(2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$；　　(3) $\sqrt{2^2}$.

探究

能否用两个面积为 1 dm^2 的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2 的大正方形？

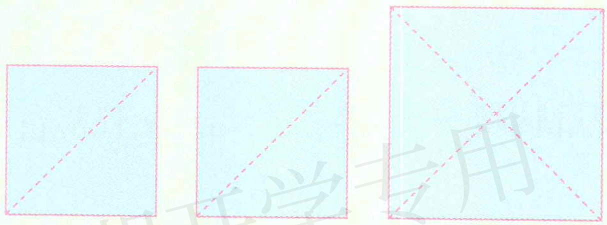


图 6.1-1

如图 6.1-1，把两个小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形. 你知道这个大正方形的边长是多少吗？

设大正方形的边长为 x dm，则

$$x^2=2.$$

由算术平方根的意义可知

$$x=\sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是$\sqrt{2}$ dm.

小正方形的对角线的长是多少呢？

探究

$\sqrt{2}$有多大呢？

因为 $1^2=1$，$2^2=4$，

所以 $1<\sqrt{2}<2$；

因为 $1.4^2=1.96$，$1.5^2=2.25$，

所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$；

因为 $1.41^2=1.988\,1$，$1.42^2=2.016\,4$，

所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$；

因为 $1.414^2=1.999\,396$，$1.415^2=2.002\,225$，

所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$；

……

如此进行下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值. 事实上，$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\,373\cdots$，它是一个无限不循环小数.

实际上，许多正有理数的算术平方根（例如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$ 等）都是无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限，且小数部分不循环的小数. 你以前见过这种数吗？

大多数计算器都有 $\boxed{\sqrt{}}$ 键，用它可以求出一个正有理数的算术平方根（或其近似值）.

例 2 用计算器求下列各式的值：

（1）$\sqrt{3\,136}$；　　　　（2）$\sqrt{2}$（精确到 0.001）.

解：（1）依次按键 $\boxed{\sqrt{}}$ 3136 $\boxed{=}$，

显示：56.

$\therefore\ \sqrt{3\,136}=56$.

不同品牌的计算器，按键顺序有所不同.

（2）依次按键 $\boxed{\sqrt{}}$ 2 $\boxed{=}$，

显示：1.414213562.

$\therefore\ \sqrt{2}\approx1.414$.

计算器上显示的 1.414 213 562 是 $\sqrt{2}$ 的近似值.

下面我们来看引言中提出的问题：

由 $v_1^2=gR$，$v_2^2=2gR$，得 $v_1=\sqrt{gR}$，$v_2=\sqrt{2gR}$，其中 $g\approx 9.8$，$R\approx 6.4\times 10^6$.

用计算器求 v_1 和 v_2（用科学记数法把结果写成 $a\times 10^n$ 的形式，其中 a 保留小数点后一位），得

$$v_1\approx\sqrt{9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 7.9\times 10^3,$$

$$v_2\approx\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}\approx 1.1\times 10^4.$$

因此，第一宇宙速度 v_1 大约是 7.9×10^3 m/s，第二宇宙速度 v_2 大约是 1.1×10^4 m/s.

探究

（1）利用计算器计算下表中的算术平方根，并将计算结果填在表中，你发现了什么规律？你能说出其中的道理吗？

…	$\sqrt{0.062\ 5}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6\ 250}$	$\sqrt{62\ 500}$	…
…								…

（2）用计算器计算 $\sqrt{3}$（精确到 0.001），并利用你在（1）中发现的规律说出 $\sqrt{0.03}$，$\sqrt{300}$，$\sqrt{30\ 000}$ 的近似值，你能根据 $\sqrt{3}$ 的值说出 $\sqrt{30}$ 是多少吗？

在生活中，我们经常遇到估计一个数的大小的问题．请看下面的例子．

例 3 小丽想用一块面积为 400 cm² 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm² 的长方形纸片，使它的长宽之比为 3∶2．她不知能否裁得出来，正在发愁．小明见了说："别发愁，一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片．"你同意小明的说法吗？小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？

解：设长方形纸片的长为$3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系得

$$\begin{aligned} 3x \cdot 2x &= 300, \\ 6x^2 &= 300, \\ x^2 &= 50, \\ x &= \sqrt{50}. \end{aligned}$$

$3\sqrt{50}$就是 $3\times\sqrt{50}$.

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

因为 $50>49$，所以$\sqrt{50}>7$.

由上可知 $3\sqrt{50}>21$，即长方形纸片的长应该大于21 cm.

因为$\sqrt{400}=20$，所以正方形纸片的边长只有 20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不能同意小明的说法. 小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\,369}$；　(2) $\sqrt{101.203\,6}$；　(3) $\sqrt{5}$（精确到 0.01）.

2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{8}$与$\sqrt{10}$；　(2) $\sqrt{65}$与 8；

(3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与 0.5；　(4) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与 1.

思考

如果一个数的平方等于 9，这个数是多少？

从前面我们知道，这个数可以是 3. 除了 3 以外，还有没有别的数的平方也等于 9 呢？

由于$(-3)^2=9$，这个数也可以是-3.

因此，如果一个数的平方等于 9，那么这个数是 3 或-3.

填表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**(square root) 或**二次方根**. 这就是说，如果 $x^2=a$，那么 x 叫做 a 的平方根.

例如，3 和 -3 是 9 的平方根，简记为 ± 3 是 9 的平方根.

> 几千年前，古埃及人就已经知道了平方根.

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方** (extraction of square root).

我们看到，± 3 的平方等于 9，9 的平方根是 ± 3，所以平方与开平方互为逆运算（图 6.1-2）. 根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根.

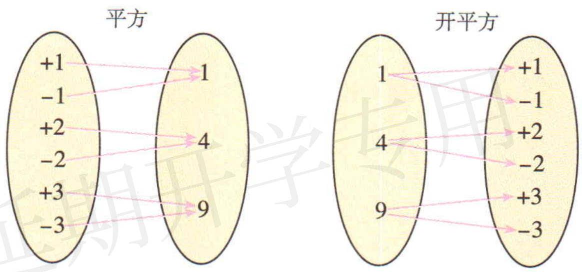


图 6.1-2

例 4 求下列各数的平方根：

(1) 100；　　(2) $\frac{9}{16}$；　　(3) 0.25.

解： (1) 因为 $(\pm 10)^2=100$，所以 100 的平方根是 ± 10；

(2) 因为 $\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，所以 $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{4}$；

(3) 因为 $(\pm 0.5)^2=0.25$，所以 0.25 的平方根是 ± 0.5.

思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根.

因为 $0^2=0$，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.

归纳

正数有两个平方根，它们互为相反数；
0 的平方根是 0；
负数没有平方根.

我们知道，正数 a 的算术平方根可以用$\sqrt{a}$表示；正数 a 的负的平方根，可以用符号“$-\sqrt{a}$”表示，故正数 a 的平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示，读作“正、负根号 a”. 例如，$\pm\sqrt{9}=\pm3$，$\pm\sqrt{25}=\pm5$.

符号$\sqrt{a}$只有当 $a\geqslant0$ 时有意义，$a<0$时无意义. 你知道为什么吗？

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$；(2) $-\sqrt{0.81}$；(3) $\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}$.

解：(1) 因为 $6^2=36$，所以$\sqrt{36}=6$；

(2) 因为 $0.9^2=0.81$，所以$-\sqrt{0.81}=-0.9$；

(3) 因为$\left(\dfrac{7}{3}\right)^2=\dfrac{49}{9}$，所以$\pm\sqrt{\dfrac{49}{9}}=\pm\dfrac{7}{3}$.

知道一个数的算术平方根，就可以立即写出它的负的平方根. 为什么？

练习

1. 判断下列说法是否正确：
   (1) 0 的平方根是 0；
   (2) 1 的平方根是 1；
   (3) -1 的平方根是 -1；
   (4) 0.01 是 0.1 的一个平方根.

2. 填表：

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$				
x^2					16		0.36	

3. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt{9}$；　　(2) $-\sqrt{0.49}$；　　(3) $\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$.

4. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关. 如果一个正方形的面积为 A，那么这个正方形的边长是多少？

习题 6.1

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根：

(1) 81；　　(2) $\frac{25}{64}$；　　(3) 0.04；　　(4) 10^2.

2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt{3}$；　　(2) $\sqrt{-3}$；　　(3) $\sqrt{(-3)^2}$；　　(4) $\sqrt{\frac{1}{10^2}}$.

3. 求下列各数的平方根：

(1) 49；　　(2) $\frac{4}{25}$；　　(3) $\frac{1}{10^6}$；　　(4) 0.001 6.

4. 判断下列说法是否正确：

(1) 5 是 25 的算术平方根；

(2) $\frac{5}{6}$是$\frac{25}{36}$的一个平方根；

(3) $(-4)^2$ 的平方根是-4；

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

5. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.01）：

(1) $\sqrt{867}$；　　(2) $\sqrt{0.462\ 54}$；　　(3) $-\sqrt{\frac{8}{25}}$；　　(4) $\pm\sqrt{2\ 402}$.

6. 估计与$\sqrt{40}$最接近的两个整数是多少.

综合运用

7. 根据下表回答下列问题：

x	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
x^2	256	259.21	262.44	265.69	268.96	272.25	275.56	278.89	282.24	285.61	289

(1) 268.96 的平方根是多少？

(2) $\sqrt{285.6}\approx$________.

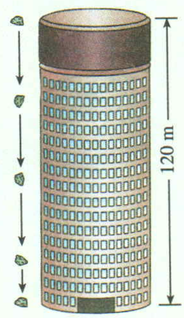
(3) $\sqrt{270}$在表中哪两个相邻的数之间？为什么？

8. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^2=25$；　　(2) $x^2-81=0$；

(3) $25x^2=36$.

9. 物体自由下落的高度 h（单位：m）与下落时间 t（单位：s）的关系是 $h=4.9t^2$. 如图，有一个物体从120 m高的建筑物上自由落下，到达地面需要多长时间（结果取整数）？



（第 9 题）

10. 一个正方形的面积扩大为原来的 4 倍，它的边长变为原来的多少倍？面积扩大为原来的 9 倍呢？n 倍呢？

拓广探索

11. (1) 求$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{(-3)^2}$，$\sqrt{5^2}$，$\sqrt{(-6)^2}$，$\sqrt{7^2}$，$\sqrt{0^2}$的值. 对于任意数 a，$\sqrt{a^2}$ 等于多少？

(2) 求$(\sqrt{4})^2$，$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{25})^2$，$(\sqrt{36})^2$，$(\sqrt{49})^2$，$(\sqrt{0})^2$ 的值. 对于任意非负数 a，$(\sqrt{a})^2$ 等于多少？

12. 任意找一个正数，比如 1 234，利用计算器对它开平方，再对得到的算术平方根开平方……如此进行下去，你有什么发现？

6.2 立方根

问题 要制作一种容积为 27 m^3 的正方体形状的包装箱，这种包装箱的棱长应该是多少？

设这种包装箱的棱长为 x m，则

$$x^3=27.$$

这就是要求一个数，使它的立方等于 27.

因为 $3^3=27$，所以 $x=3$.

因此这种包装箱的棱长应为 3 m.

一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**（cube root）或**三次方根**. 这就是说，如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根.

在上面的问题中，由于 $3^3=27$，所以 3 是 27 的立方根.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方**（extraction of cube root）. 正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算. 我们可以根据这种关系求一个数的立方根.

探究

根据立方根的意义填空. 你能发现正数、0 和负数的立方根各有什么特点吗？

因为 $2^3=8$，所以 8 的立方根是（　　）；

因为（　　）$^3=0.064$，所以 0.064 的立方根是（　　）；

因为（　　）$^3=0$，所以 0 的立方根是（　　）；

因为（　　）$^3=-8$，所以 -8 的立方根是（　　）；

因为（　　）$^3=-\dfrac{8}{27}$，所以 $-\dfrac{8}{27}$ 的立方根是（　　）.

归纳

正数的立方根是正数，
负数的立方根是负数，
0 的立方根是 0.

你能说说数的平方根与数的立方根有什么不同吗?

类似于平方根，一个数 a 的立方根，用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号 a”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数**（radical exponent）. 例如，$\sqrt[3]{8}$表示 8 的立方根，$\sqrt[3]{8}=2$；$\sqrt[3]{-8}$表示 -8 的立方根，$\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[3]{a}$中的根指数 3 不能省略.

算术平方根的符号 $\sqrt{a}$，实际上省略了$\sqrt[2]{a}$中的根指数 2. 因此，$\sqrt{a}$也可读作“二次根号 a”.

探究

因为 $\sqrt[3]{-8}=$______，$-\sqrt[3]{8}=$______，所以 $\sqrt[3]{-8}$______$-\sqrt[3]{8}$；

因为 $\sqrt[3]{-27}=$______，$-\sqrt[3]{27}=$______，所以 $\sqrt[3]{-27}$______$-\sqrt[3]{27}$.

一般地，

$$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}.$$

例 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{64}$； (2) $-\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$； (3) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{64}=4$；

(2) $-\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=-\dfrac{1}{2}$；

(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}}=-\dfrac{3}{4}$.

实际上，很多有理数的立方根是无限不循环小数. 例如$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$等都是无限不循环小数. 我们可以用有理数近似地表示它们.

一些计算器设有 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）.

例如，用计算器求$\sqrt[3]{1\,845}$，可以按照下面的步骤进行：

依次按键 $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 1845 $\boxed{=}$，显示：12.26494081.

这样就得到$\sqrt[3]{1\,845}$的近似值 12.264 940 81.

有些计算器需要用第二功能键求一个数的立方根. 例如用这种计算器求$\sqrt[3]{1\,845}$，可以依次按键 $\boxed{\text{2nd F}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ 1845 $\boxed{=}$，显示：12.26494081.

探究

用计算器计算…，$\sqrt[3]{0.000\,216}$，$\sqrt[3]{0.216}$，$\sqrt[3]{216}$，$\sqrt[3]{216\,000}$，…，你能发现什么规律？用计算器计算$\sqrt[3]{100}$（精确到 0.001），并利用你发现的规律求$\sqrt[3]{0.1}$，$\sqrt[3]{0.000\,1}$，$\sqrt[3]{100\,000}$的近似值.

练习

1. 求下列各式的值：

   (1) $\sqrt[3]{1\,000}$；　(2) $\sqrt[3]{-0.001}$；　(3) $\sqrt[3]{-1}$；　(4) $-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

   (1) $\sqrt[3]{1\,728}$；　(2) $\sqrt[3]{15\,625}$；　(3) $\pm\sqrt[3]{2\,197}$.

3. 比较 3，4，$\sqrt[3]{50}$的大小.

4. 立方根概念的起源与几何中的正方体有关. 如果一个正方体的体积为 V，这个正方体的棱长为多少？

习题 6.2

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

   (1) 2 是 8 的立方根；

   (2) ± 4 是 64 的立方根；

   (3) $-\frac{1}{3}$是$-\frac{1}{27}$的立方根；

   (4) $(-4)^3$ 的立方根是-4.

2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt[3]{3}$；　(2) $\sqrt[3]{-3}$；　(3) $\sqrt[3]{(-3)^3}$；　(4) $\sqrt[3]{\frac{1}{10^3}}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$；　(2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$；　(3) $\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$；　(4) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$.

4. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) $\sqrt[3]{868}$；　(2) $\sqrt[3]{0.426\ 254}$；　(3) $-\sqrt[3]{\frac{8}{25}}$；　(4) $\pm\sqrt[3]{2\ 402}$.

综合运用

5. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=0.008$；　(2) $x^3-3=\frac{3}{8}$；　(3) $(x-1)^3=64$.

6. 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍，它的棱长变为原来的多少倍？扩大为原来的 27 倍呢？n 倍呢？

7. 如图，要生产一种容积为 50 L 的圆柱形热水器，使它的高等于底面直径的 2 倍，这种容器的底面直径应取多少分米（用计算器计算，结果保留小数点后一位）？

8. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt[3]{9}$ 与 2.5；　(2) $\sqrt[3]{3}$ 与 $\frac{3}{2}$.

（第 7 题）

拓广探索

9. (1) 求 $\sqrt[3]{2^3}$，$\sqrt[3]{(-2)^3}$，$\sqrt[3]{(-3)^3}$，$\sqrt[3]{4^3}$，$\sqrt[3]{0^3}$ 的值. 对于任意数 a，$\sqrt[3]{a^3}$ 等于多少？

(2) 求 $(\sqrt[3]{8})^3$，$(\sqrt[3]{-8})^3$，$(\sqrt[3]{27})^3$，$(\sqrt[3]{-27})^3$，$(\sqrt[3]{0})^3$ 的值. 对于任意数 a，$(\sqrt[3]{a})^3$ 等于多少？

10. 任意找一个数，比如 1 234，利用计算器对它开立方，再对得到的立方根开立方……如此进行下去，你有什么发现？

6.3 实数

探究

我们知道有理数包括整数和分数，请把下列分数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2},\ -\frac{3}{5},\ \frac{27}{4},\ \frac{11}{9},\ \frac{9}{11}.$$

我们发现，上面的分数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式，即

$$\frac{5}{2}=2.5,\ -\frac{3}{5}=-0.6,\ \frac{27}{4}=6.75,\ \frac{11}{9}=1.\dot{2},\ \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

事实上，如果把整数看成小数点后是 0 的小数（例如，将 3 看成 3.0），那么任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式．反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数．

通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，无限不循环小数又叫做**无理数**（irrational number）．例如$\sqrt{2}$，$-\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{3}$等都是无理数，$\pi=3.141\ 592\ 65\cdots$也是无理数．

像有理数一样，无理数也有正负之分．例如，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，π 是正无理数，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{3}$，$-\pi$ 是负无理数．

有理数和无理数统称**实数**（real number）．这样，我们学过的数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{matrix}\text{正有理数}\\ 0\\ \text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

由于非 0 有理数和无理数都有正负之分，实数也有正负之分，所以实数还可以按大小分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\ 0\\ \text{负实数}\end{cases}$$

我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示．无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？

探究

如图 6.3-1，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O'，点 O' 对应的数是多少？

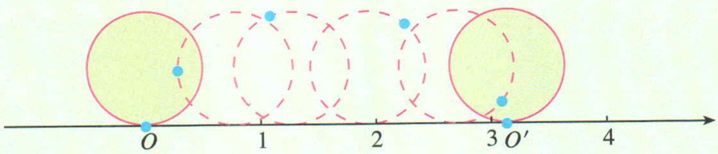


图 6.3-1

从图中可以看出，OO' 的长是这个圆的周长 π，所以点 O' 对应的数是 π．

这样，无理数 π 可以用数轴上的点表示出来．

又如，以单位长度为边长画一个正方形（图 6.3-2），以原点为圆心，正方形的对角线长为半径画弧，与正半轴的交点就表示 $\sqrt{2}$，与负半轴的交点就表示 $-\sqrt{2}$．（为什么?）

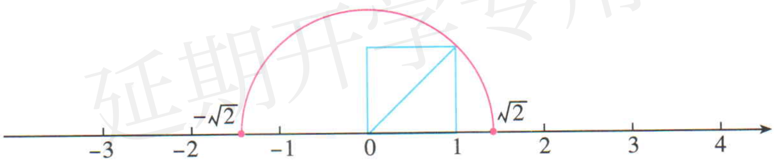


图 6.3-2

事实上，每一个无理数都可以用数轴上的一个点表示出来．

当数的范围从有理数扩充到实数后，实数与数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数．与规定有理数的大小一样，对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大．

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数．

思考

(1) $\sqrt{2}$ 的相反数是________，$-\pi$ 的相反数是________，0 的相反数是________；

(2) $|\sqrt{2}|=$____，$|-\pi|=$____，$|0|=$____．

数 a 的相反数是 $-a$，这里 a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0. 即设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases}a，当 a>0 时；\\0，当 a=0 时；\\-a，当 a<0 时.\end{cases}$$

例 1 （1）分别写出 $-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数；

（2）指出 $-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是什么数的相反数；

（3）求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值；

（4）已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$，求这个数.

解：（1）因为

$$-(-\sqrt{6})=\sqrt{6}，-(\pi-3.14)=3.14-\pi，$$

所以，$-\sqrt{6}$，$\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{6}$，$3.14-\pi$.

（2）因为

$$-(\sqrt{5})=-\sqrt{5}，-(\sqrt[3]{3}-1)=1-\sqrt[3]{3}，$$

所以，$-\sqrt{5}$，$1-\sqrt[3]{3}$ 分别是 $\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

（3）因为

$$\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4，$$

所以

$$\left|\sqrt[3]{-64}\right|=|-4|=4.$$

（4）因为

$$|\sqrt{3}|=\sqrt{3}，|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}，$$

所以绝对值为 $\sqrt{3}$ 的数是 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

随着数的进一步扩充，负数将可以进行开方运算，这是我们今后要学的.

例 2 计算下列各式的值：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}$；　　(2) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}$.

解：(1)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}\\=&\sqrt{3}+(\sqrt{2}-\sqrt{2})\qquad\text{（加法结合律）}\\=&\sqrt{3}+0=\sqrt{3};\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\\=&(3+2)\sqrt{3}\qquad\text{（分配律）}\\=&5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

在实数运算中，当遇到无理数并且需要求出结果的近似值时，可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数，再进行计算.

例 3 计算(结果保留小数点后两位)：

(1) $\sqrt{5}+\pi$；　　(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$.

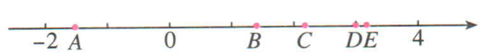
解：(1) $\sqrt{5}+\pi\approx 2.236+3.142\approx 5.38$；

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\approx 1.732\times 1.414\approx 2.45$.

练习

1. 请将图中数轴上标有字母的各点与下列实数对应起来：

$\sqrt{2}$，-1.5，$\sqrt{5}$，π，3.



（第 1 题）

2. 求下列各数的相反数与绝对值：

2.5，$-\sqrt{7}$，$-\dfrac{\pi}{2}$，$\sqrt{3}-2$，0.

3. 求下列各式中的实数 x：

(1) $|x|=\dfrac{2}{3}$；　　(2) $|x|=0$；

(3) $|x|=\sqrt{10}$；　　(4) $|x|=\pi$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$；　　(2) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|+2\sqrt{2}$.

习题 6.3

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

   (1) 无限小数都是无理数；

   (2) 无理数都是无限小数；

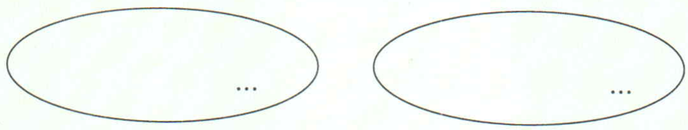
   (3) 带根号的数都是无理数；

   (4) 所有有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示有理数；

   (5) 所有实数都可以用数轴上的点表示，反过来，数轴上的所有点都表示实数.

2. 把下列各数分别填在相应的集合中：

$$\frac{22}{7},\quad 3.141\,592\,65,\quad \sqrt{7},\quad -8,\quad \sqrt[3]{2},\quad 0.6,\quad 0,\quad \sqrt{36},\quad \frac{\pi}{3}.$$



有理数集合　　　　　　无理数集合

3. 求下列各数的绝对值：

$$\sqrt[3]{-8},\ \sqrt{17},\ -\frac{\sqrt{2}}{3},\ \sqrt{3}-1.7,\ 1.4-\sqrt{2}.$$

4. 用计算器计算（结果保留小数点后两位）：

   (1) $\sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145$；　　(2) $\sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}$.

5. 计算：

   (1) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt[3]{3}-\left|-\sqrt[3]{3}\right|$.

综合运用

6. 比较下列各组数的大小：

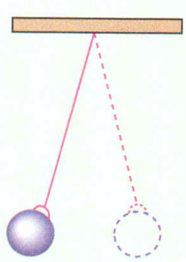
   (1) π，3.146；　(2) $\sqrt{3}$，1.732；　(3) $\sqrt{5}-3$，$\frac{\sqrt{5}-2}{2}$；　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. (1) 有没有最小的正整数？有没有最小的整数？

   (2) 有没有最小的有理数？有没有最小的无理数？

   (3) 有没有最小的正实数？有没有最小的实数？

8. 如图，一根细线上端固定，下端系一个小重物，让这个小重物来回自由摆动，来回摆动一次所用的时间 t（单位：s）与细线的长度 l（单位：m）之间满足关系 $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. 当细线的长度为 0.5 m 时，小重



（第 8 题）

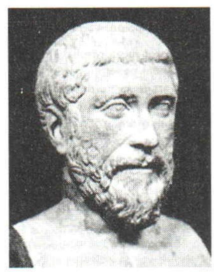
物来回摆动一次所用的时间是多少（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

9. 已知数 0.101 001 000 100 001…，它的特点是：从左向右看，相邻的两个 1 之间依次多一个 0. 这个数是有理数还是无理数？为什么？

阅读与思考

为什么说$\sqrt{2}$不是有理数



毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—约前 500），古希腊数学家，毕达哥拉斯学派的主要代表人物.

公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派有一种观点，即“万物皆数”，一切量都可以用整数或整数的比（分数）表示. 后来，当这一学派中的希帕索斯（Hippasus）发现边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用整数或整数的比表示，即$\sqrt{2}$不是有理数时，毕达哥拉斯学派感到惊恐不安. 由此，引发了第一次数学危机.

随着人们认识的不断深入，毕达哥拉斯学派逐渐承认$\sqrt{2}$不是有理数，并给出了证明. 下面给出欧几里得《原本》中的证明方法.

假设$\sqrt{2}$是有理数，那么存在两个互质的正整数 p，q，使得

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

于是

$$p=\sqrt{2}q.$$

两边平方得

$$p^2=2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数，可得 p^2 是偶数. 而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数.

因此可设 $p=2s$，代入上式，得 $4s^2=2q^2$，即

$$q^2=2s^2.$$

所以 q 也是偶数. 这样，p 和 q 都是偶数，不互质，这与假设 p，q 互质矛盾.

这个矛盾说明，$\sqrt{2}$不能写成分数的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数. 实际上，$\sqrt{2}$是无限不循环小数.

用类似的方法，你能证明$\sqrt[3]{2}$不是有理数吗？

事实上，无理数只是一种命名，并非“无理”，而是实际存在的不能写成分数形式的数，它和有理数一样，都是现实世界中客观存在的量的反映.

数学活动

活动1

1. 制作一个表面积为 12 dm^2 的正方体纸盒.

(1) 这个正方体的棱长是多少?

(2) 做出这个正方体纸盒.

2. 制作一个底面半径为 10 cm，高为 20 cm 的圆柱形纸盒.

(1) 圆柱的侧面展开图是什么形状?

(2) 这个侧面展开图各边的长分别是多少?

(3) 做出这个圆柱形纸盒.

活动2

据说，我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：一个数是 59 319，希望求它的立方根. 华罗庚脱口而出：39. 邻座的乘客十分惊奇，忙问计算的奥妙.

华罗庚（1910—1985）

你知道华罗庚是怎样迅速准确地计算出来的吗？请按照下面的问题试一试：

(1) 由 $10^3=1\,000$，$100^3=1\,000\,000$，你能确定 $\sqrt[3]{59\,319}$ 是几位数吗?

(2) 由 59 319 的个位上的数是 9，你能确定 $\sqrt[3]{59\,319}$ 的个位上的数是几吗?

(3) 如果划去 59 319 后面的三位 319 得到数 59，而 $3^3=27$，$4^3=64$，由此你能确定 $\sqrt[3]{59\,319}$ 的十位上的数是几吗?

已知 19 683，110 592 都是整数的立方，按照上述方法，你能确定它们的立方根吗?

小　结

一、本章知识结构图

二、回顾与思考

本章我们学习了平方根和立方根，并通过开平方、开立方运算认识了一些不同于有理数的数，在此基础上引入无理数，使数的范围由有理数扩充到实数．随着数的扩充，数的运算也有了新的发展．在实数范围内，不仅能进行加、减、乘、除四则运算，而且对 0 和任意正数能进行开平方运算，对任意实数能进行开立方运算．

本章中，我们通过类比有理数及其运算，引入了实数的相反数、绝对值等概念，以及实数的运算和运算律，学习时应注意体会类比这种研究方法的作用．实数与数轴上的点是一一对应的，因此，我们可以利用数轴将“数”与“形”联系起来，这对理解实数的有关概念及运算很有帮助．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1．数的概念是怎样从正整数逐步发展到实数的？随着数的不断扩充，数的运算有什么发展？加法与乘法的运算律始终保持不变吗？

2．回顾平方根与立方根的概念．乘方运算与开方运算有什么关系？

3．无理数和有理数的区别是什么？

4．实数由哪些数组成？实数与数轴上的点有什么关系？

复习题 6

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根及平方根：

(1) 64； (2) 0.25； (3) $\frac{4}{9}$；

(4) 5^6； (5) $\left(-\frac{4}{13}\right)^2$； (6) 10^4.

2. 求下列各数的立方根：

(1) $-\frac{1}{64}$； (2) -0.008；

(3) $\frac{27}{8}$； (4) 3^6.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt{\frac{49}{25}}$； (2) $\sqrt[3]{-1}$；

(3) $\sqrt{0.16}$； (4) $\sqrt[3]{0.027}$.

4. 下列各数分别界于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt{28}$； (2) $\sqrt{38}$； (3) $\sqrt[3]{99}$.

5. 用计算器求下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) $-\sqrt{94.3}$； (2) $\sqrt[3]{0.43}$；

(3) $\sqrt{55\ 225}$； (4) $\sqrt[3]{34\ 012\ 224}$.

6. 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 的平方根及立方根中，哪些是有理数？哪些是无理数？

7. 比较下列各组数的大小：

(1) $|-1.5|$，$1.\dot{5}$； (2) 1.414，$\sqrt{2}$；

(3) $\frac{2}{3}$，$0.666\ 67$.

8. 计算下列各式的值：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$； (2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

综合运用

9. 已知 $(x-1)^2=4$，求 x 的值.

10. 已知 $|x|<2\pi$，x 是整数，求 x 的值，并在数轴上表示求得的数.

11. 天气晴朗时，一个人能看到大海的最远距离 s（单位：km）可用公式 $s^2=16.88h$ 来估计，其中 h（单位：m）是眼睛离海平面的高度．如果一个人站在岸边观察，当眼睛离海平面的高度是1.5 m时，能看到多远（精确到 0.01 km）？如果登上一个观望台，当眼睛离海平面的高度是35 m时，能看到多远（精确到 0.01 km）？

12. 一个圆与一个正方形的面积都是 2π cm²，它们中哪一个的周长比较大？你能从中得到什么启示？

13. 要生产一种容积为 500 L 的球形容器，这种球形容器的半径是多少分米（结果保留小数点后两位）？（球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 是球的半径．）

拓广探索

14. 填空：

（1）一个数的平方等于它本身，这个数是______；一个数的平方根等于它本身，这个数是______；一个数的算术平方根等于它本身，这个数是______．

（2）一个数的立方等于它本身，这个数是______；一个数的立方根等于它本身，这个数是______．

第七章　平面直角坐标系

在中华人民共和国成立60周年的庆典活动中，天安门广场上出现了壮观的背景图案，你知道它是怎么组成的吗？

原来，广场上有许多同学，每人都按图案设计的要求，按排号、列号站在一个确定的位置．随着指挥员的信号，他们举起不同颜色的花束，整个方阵就组成了壮观的背景图案．

类似于用“第几排第几列”来确定位置，在数学中可以通过建立坐标系，用有顺序的两个数来刻画平面内点的位置．

本章中，我们将学习平面直角坐标系等有关知识，由此建立图形与数量间的联系．这将为几何问题和代数问题的相互转化打下基础．

7.1 平面直角坐标系

7.1.1 有序数对

我们都有去影剧院看电影的经历．你一定知道，影剧院对观众席的所有座位都按“几排几号”编号，以便确定每一个座位在影剧院中的位置．这样，观众就能根据入场券上的“排数”和“号数”准确地“对号入座”．

这种办法在日常生活中是常用的．比如，当发现一本书上某页有一处印刷错误时，你可以怎样告诉其他同学这一处的位置呢？又如，假设根据教室平面图（图 7.1-1）写出如下通知，你知道哪些同学参加讨论吗？

“请以下座位的同学今天放学后参加数学问题讨论：

(1，5)，(2，4)，(4，2)，(3，3)，(5，6)．”

(2，4)和(4，2)在同一位置吗？

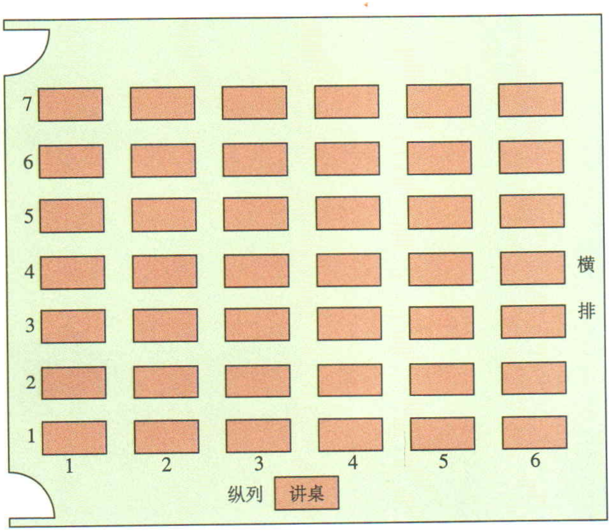


图 7.1-1

思考

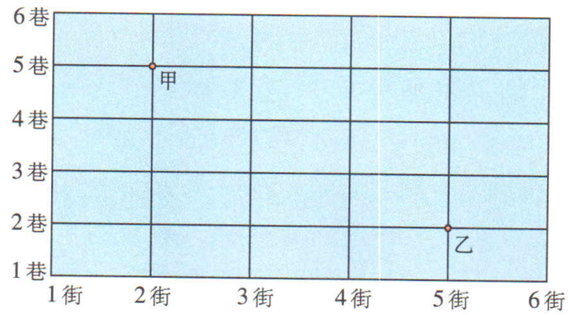
怎样确定教室里座位的位置？排数和列数的先后顺序对位置有影响吗？假设我们约定“列数在前，排数在后”，请你在图 7.1-1 上标出被邀请参加讨论的同学的座位.

上面的问题都是通过像“9 排 7 号”“第 1 列第 5 排”这样含有两个数的表达方式来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，例如前边的表示“排数”，后边的表示“号数”. 我们把这种有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做**有序数对**（ordered pair），记作 (a,b).

利用有序数对，可以准确地表示出一个位置. 生活中利用有序数对表示位置的情况是很常见的，如人们常用经纬度来表示地球上的地点等. 你能再举出一些例子吗？

练习

如图，甲处表示 2 街与 5 巷的十字路口，乙处表示 5 街与 2 巷的十字路口. 如果用 (2, 5) 表示甲处的位置，那么“(2, 5) → (3, 5) → (4, 5) → (5, 5) → (5, 4) → (5, 3) → (5, 2)”表示从甲处到乙处的一种路线. 请你用这种形式写出几种从甲处到乙处的路线.



7.1.2 平面直角坐标系

图 7.1-2 是一条数轴，数轴上的点与实数是一一对应的. 数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标. 例如，点 A 在数轴上的坐标为 -4，点 B 在数轴上的坐标为 2. 反过来，知道数轴上一个点的坐标，这个点在数轴上的位置也就确定了. 例如，数轴上坐标为 5 的点是点 C.

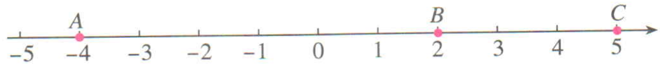


图 7.1-2

思考

类似于利用数轴确定直线上点的位置，能不能找到一种办法来确定平面内的点的位置呢（例如图 7.1-3 中 A，B，C，D 各点）？

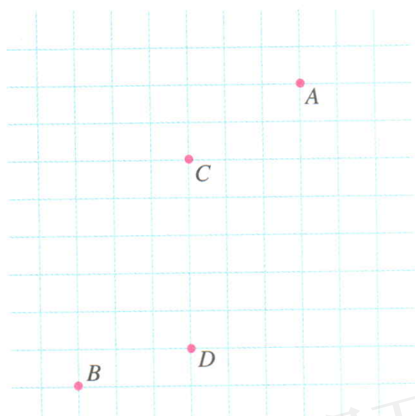


图 7.1-3

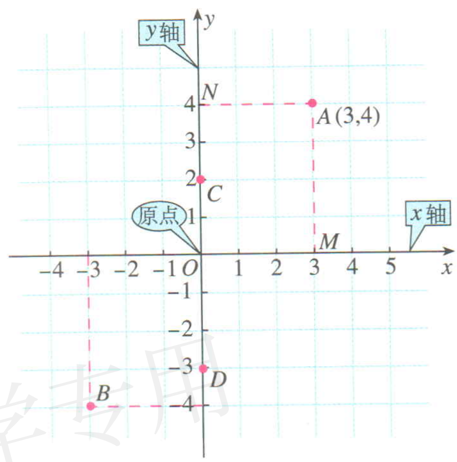


图 7.1-4

如图 7.1-4，我们可以在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成**平面直角坐标系**(rectangular coordinate system)．水平的数轴称为 x 轴（x-axis）或**横轴**，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y 轴（y-axis）或**纵轴**，取向上方向为正方向；两坐标轴的交点为平面直角坐标系的**原点**．

法国数学家笛卡儿(Descartes，1596—1650)，最早引入坐标系，用代数方法研究几何图形．

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一个有序数对来表示了．例如，如图 7.1-4，由点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，我们说点 A 的横坐标是 3，纵坐标是 4，有序数对（3，4）就叫做点 A 的**坐标**(coordinate)，记作 $A(3,\ 4)$．类似地，请你写出点 B，C，D 的坐标：B(__，__)，C(__，__)，D(__，__)．

思考

原点 O 的坐标是什么？x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？

可以看出，原点 O 的坐标为 $(0,0)$；x 轴上的点的纵坐标为 0，例如 $(1,0)$，$(-1,0)$，…；y 轴上的点的横坐标为 0，例如 $(0,1)$，$(0,-1)$，….

建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分（图 7.1-5），每个部分称为**象限**（quadrant），分别叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限.

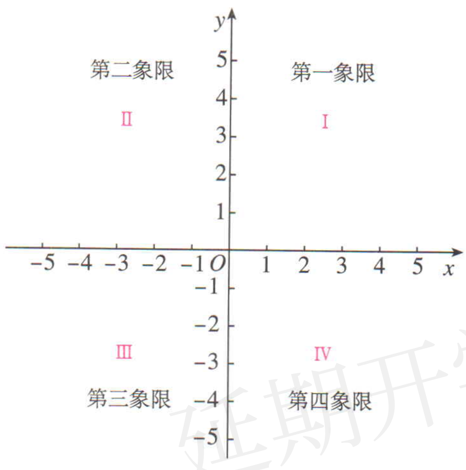


图 7.1-5

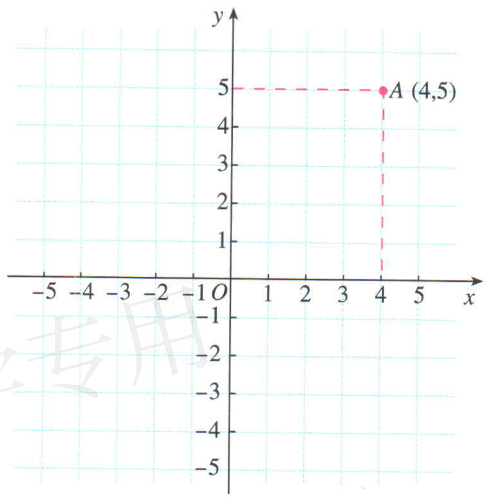


图 7.1-6

例 在平面直角坐标系(图7.1-6)中描出下列各点：

$A(4,5)$，$B(-2,3)$，$C(-4,-1)$，$D(2.5,-2)$，$E(0,-4)$.

解： 如图7.1-6，先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A.

类似地，请你在图 7.1-6 上描出点 B，C，D，E.

我们知道，数轴上的点与实数是一一对应的. 我们还可以得出：对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一对有序实数 (x,y)（即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 (x,y)，在坐标平面内都有唯一的一点 M（即坐标为 (x,y) 的点）和它对应. 也就是说，坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的.

探究

如图 7.1-7，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，如果以点 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么 y 轴是哪条线？写出正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标.

请另建立一个平面直角坐标系，这时正方形的顶点 A，B，C，D 的坐标又分别是什么？与同学们交流一下.

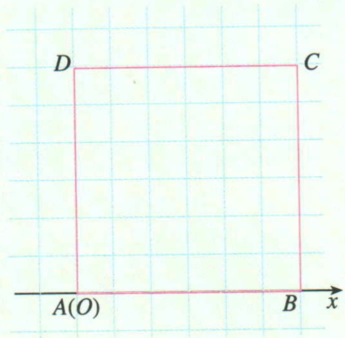
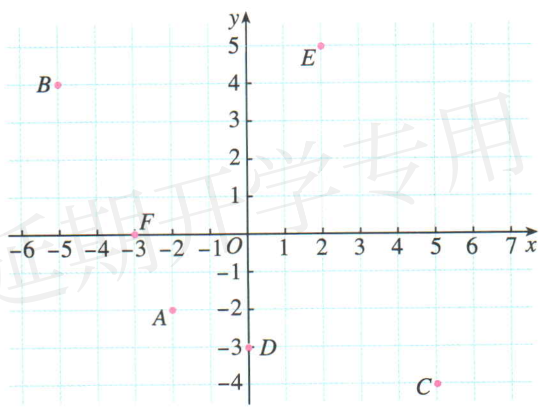


图 7.1-7

练习

1. 写出图中点 A，B，C，D，E，F 的坐标.



（第 1，2 题）

2. 在图中描出下列各点：

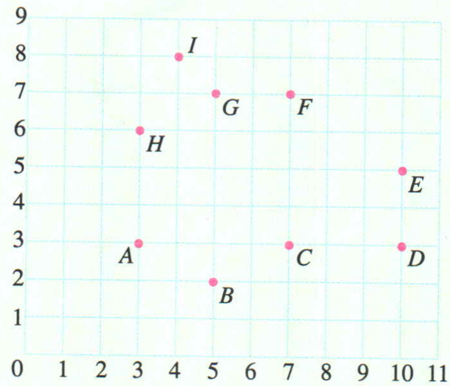
   $L(-5, -3)$，$M(4, 0)$，$N(-6, 2)$，$P(5, -3.5)$，$Q(0, 5)$，$R(6, 2)$.

习题 7.1

复习巩固

1. 如图，写出表示下列各点的有序数对：

   A（__，__）；B（5，2）；C（__，__）；D（__，__）；E（__，__）；F（__，__）；G（__，__）；H（__，__）；I（__，__）.

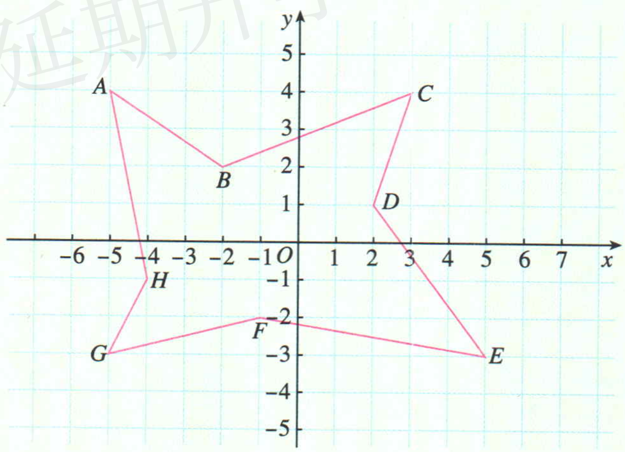


（第 1 题）

2. 根据点所在的位置，用“＋”“－”填表.

点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限	＋	＋
在第二象限		
在第三象限		
在第四象限		

3. 如图，写出其中标有字母的各点的坐标，并指出它们的横坐标和纵坐标.



（第 3 题）

4. 在平面直角坐标系中，描出下列各点：

点 A 在 y 轴上，位于原点上方，距离原点 2 个单位长度；

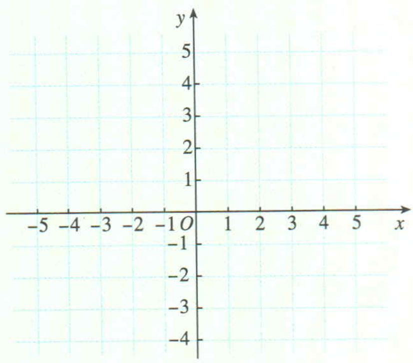
点 B 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 1 个单位长度；

点 C 在 x 轴上方，y 轴右侧，距离每条坐标轴都是 2 个单位长度；

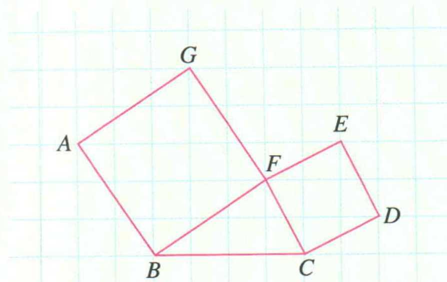
点 D 在 x 轴上，位于原点右侧，距离原点 3 个单位长度；

点 E 在 x 轴上方，y 轴右侧，距离 x 轴 2 个单位长度，距离 y 轴 4 个单位长度.
依次连接这些点，你能得到什么图形？

5. 如图，在所给的坐标系中描出下列各点：
$A(-4，-4)$，$B(-2，-2)$，$C(3，3)$，$D(5，5)$，$E(-3，-3)$，$F(0，0)$.
这些点有什么关系？你能再找出一些类似的点吗？



（第 5 题）



（第 6 题）

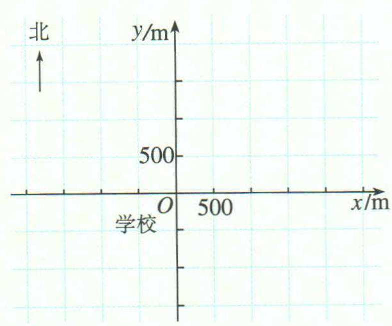
6. 如图，建立平面直角坐标系，使点 B，C 的坐标分别为(0，0)和(4，0)，写出点 A，D，E，F，G 的坐标，并指出它们所在的象限.

综合运用

7. 在平面直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.
(1) (−5，0)，(−4，3)，(−3，0)，(−2，3)，(−1，0)，(−5，0)；
(2) (2，1)，(6，1)，(6，3)，(7，3)，(4，6)，(1，3)，(2，3)，(2，1).
观察得到的图形，你觉得它们像什么？求出所得到图形的面积.

8. 建立一个平面直角坐标系，描出点 $A(-2，4)$，$B(3，4)$，画直线 AB. 若点 C 为直线 AB 上的任意一点，则点 C 的纵坐标是什么？想一想：
(1) 如果一些点在平行于 x 轴的直线上，那么这些点的纵坐标有什么特点？
(2) 如果一些点在平行于 y 轴的直线上，那么这些点的横坐标有什么特点？

9. 李强同学家在学校以东 1 000 m 再往北 1 500 m 处，张明同学家在学校以西 2 000 m 再往南 500 m处，王玲同学家在学校以南 1 500 m 处. 如图，在坐标系（规定一个单位长度代表 1 m 长）中画出这三位同学家的位置，并用坐标表示出来.



（第 9 题）

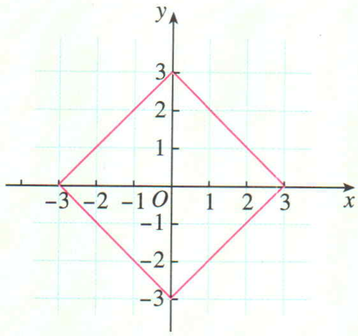
10. 在平面直角坐标系中选择一些横、纵坐标满足下面条件的点，标出它们的位置，看看它们在第几象限或哪条坐标轴上：

(1) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy>0$；

(2) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy<0$；

(3) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy=0$.

11. 图中正方形（实线）四条边上横坐标、纵坐标都为整数的点有几个？写出它们的坐标.

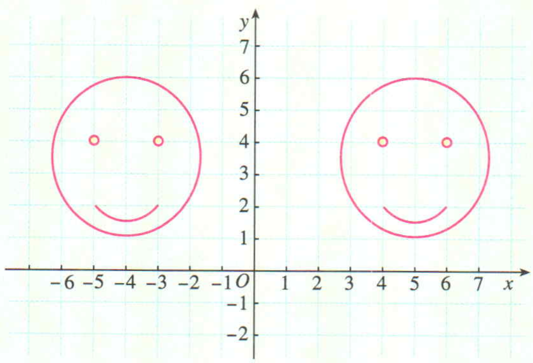


（第 11 题）

拓广探索

12. 设计一个容易用它的顶点坐标描绘出来的图形，把这些坐标告诉你的同学，看看他能否画出你所设计的图形.

13. 如图，右图是由左图平移后得到的图形，找几对特殊的对应点，分别写出它们的坐标，你能发现什么规律吗？



（第 13 题）

14. 已知点 O (0, 0)，B (1, 2)，点 A 在坐标轴上，且 $S_{\triangle OAB}=2$，求满足条件的点 A 的坐标.

阅读与思考

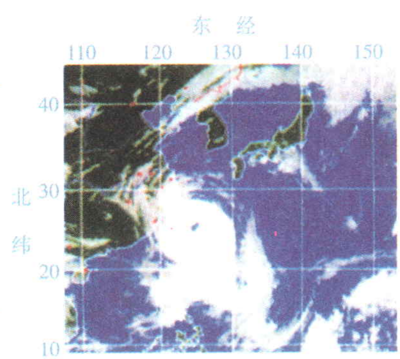
用经纬度表示地理位置

怎样表示地理位置呢？通过地球上的经度和纬度，人们可以确定一个地点在地球上的位置.

不管在地球仪上、还是在各种地图上都布满了细线网，这就是经线和纬线. 地图上水平方向的线是纬线，它们用度（°）来表示地理纬度. 赤道上所有的点是 0 纬度，北极对应北纬 90°，南极对应南纬 90°. 北京位于北纬 39.9°，但仅用纬度确定北京的位置还是不够的，还需要第二个坐标——经度.

地图上竖直方向的线是经线，它们也用度（°）来表示地理经度. 经过英国格林尼治（Greenwich）天文台的经线是初始经线（0 经度）. 它东面的所有点有东经度值（从 0°到 180°），西面的点有西经度值. 例如北京位于东经 116.4°，再加上北京位于北纬 39.9°，就能确定北京在地球上的位置了.

由于地球可近似地看作一个球体，所以经线和纬线在地球表面构成一个坐标网. 经线沿东西方向分布，纬线沿南北方向分布. 指明一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置.



以下是某气象台发布的一次热带风暴的风暴中心位置的一些信息：

9 月 25 日 16 时：北纬 17.9°，东经 119.4°.

9 月 27 日 11 时：北纬 21.4°，东经 118.6°.

右图是利用经纬度画出的地图的一部分，你能在它上面找到这次热带风暴的风暴中心在上述两个时刻的位置吗？

7.2 坐标方法的简单应用

7.2.1 用坐标表示地理位置

思考

不管是出差办事，还是出去旅游，人们都愿意带上一幅地图，它给人们出行带来了很大方便. 如图 7.2-1，这是北京市地图的一部分，你知道怎样用坐标表示地理位置吗？

图 7.2-1

探究

根据以下条件画一幅示意图，标出学校和小刚家、小强家、小敏家的位置.

小刚家：出校门向东走 1 500 m，再向北走2 000 m.

小强家：出校门向西走 2 000 m，再向北走3 500 m，最后向东走 500 m.

小敏家：出校门向南走 1 000 m，再向东走3 000 m，最后向南走 750 m.

如图 7.2-2，选学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1 m 长. 依题目所给条件，点（1 500，2 000）就是小刚家的位置.

类似地，请你在图 7.2-2 上画出小强家、小敏家的位置，并标明它们的坐标.

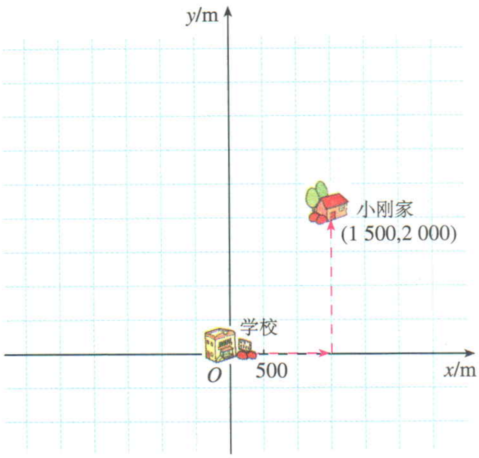


图 7.2-2

选取学校所在位置为原点，并以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向有什么优点？

归纳

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布情况平面图的过程如下：

（1）建立坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、y 轴的正方向；

（2）根据具体问题确定单位长度；

（3）在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称.

我们知道，通过建立平面直角坐标系，可以用坐标表示平面内点的位置. 还有其他方法吗？

思考

如图 7.2-3，一艘船在 A 处遇险后向相距 35 n mile 位于 B 处的救生船报警，如何用方向和距离描述救生船相对于遇险船的位置？救生船接到报警后准备前往救援，如何用方向和距离描述遇险船相对于救生船的位置？

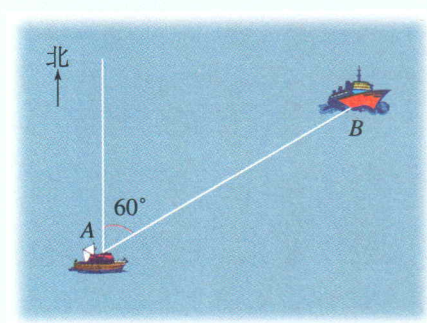


图 7.2-3

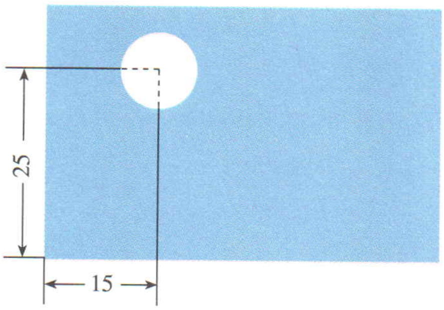
由图 7.2-3 可知，救生船在遇险船北偏东 60°的方向上，与遇险船的距离是 35 n mile，用北偏东 60°，35 n mile 就可以确定救生船相对于遇险船的位置. 反

过来，用南偏西 60°，35 n mile 就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

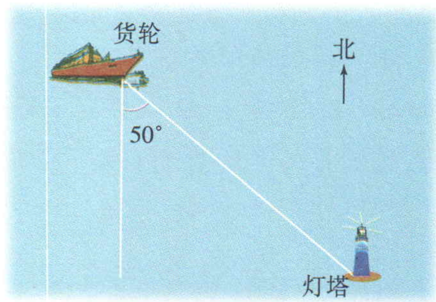
一般地，可以建立平面直角坐标系，用坐标表示地理位置. 此外，还可以用方向和距离表示平面内物体的位置.

练习

1. 长方形零件如图（单位：mm），建立适当的坐标系，用坐标表示孔心的位置.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，货轮与灯塔相距 40 n mile，如何用方向和距离描述灯塔相对于货轮的位置？反过来，如何用方向和距离描述货轮相对于灯塔的位置？

7.2.2 用坐标表示平移

在平面直角坐标系中，对一个图形进行平移，图形上点的位置发生了变化，坐标也发生了变化.

探究

如图 7.2-4，将点 $A(-2, -3)$ 向右平移 5 个单位长度，得到点 A_1，在图上标出这个点，并写出它的坐标. 观察坐标的变化，你能从中发现什么规律吗？把点 A 向上平移 4 个单位长度呢？把点 A 向左或向下平移呢？

再找几个点，对它们进行平移，观察它们的坐标是否按你发现的规律变化.

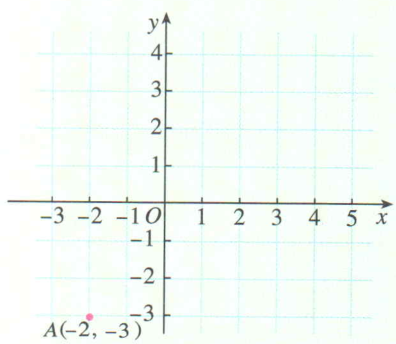


图 7.2-4

一般地，在平面直角坐标系中，将点 $(x,\ y)$ 向右（或左）平移 a 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a,\ y)$（或 $(x-a,\ y)$）；将点 $(x,\ y)$ 向上（或下）平移 b 个单位长度，可以得到对应点 $(x,\ y+b)$（或 $(x,\ y-b)$）.

探究

如图 7.2-5，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-2,\ 4)$，$B(-2,\ 3)$，$C(-1,\ 3)$，$D(-1,\ 4)$，将正方形 $ABCD$ 向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应变为点 E，F，G，H，它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同吗？

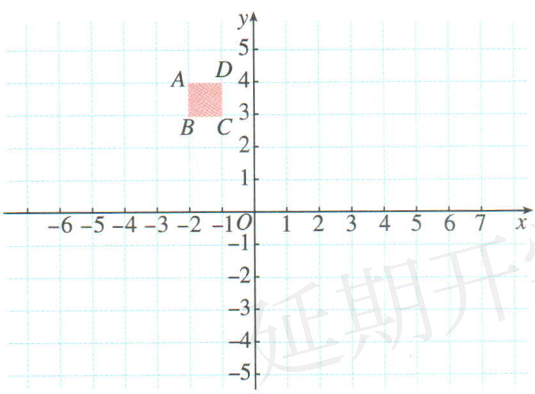


图 7.2-5

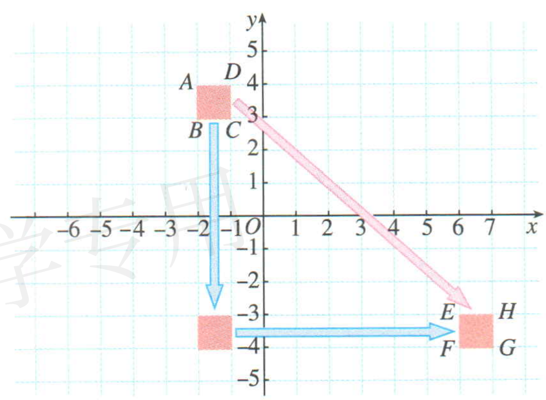


图 7.2-6

可求出点 E，F，G，H 的坐标分别是 $(6,\ -3)$，$(6,\ -4)$，$(7,\ -4)$，$(7,\ -3)$. 如果直接平移正方形 $ABCD$，使点 A 移到点 E，它和我们前面得到的正方形位置相同（图 7.2-6）.

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到.

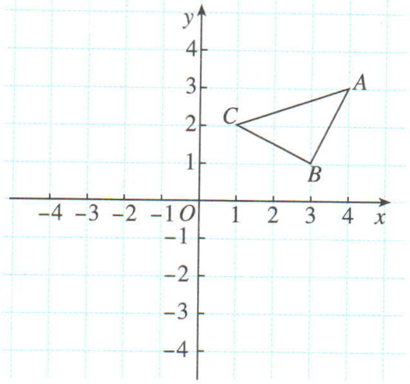
对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移.

例 如图 7.2-7（1），三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4,\ 3)$，$B(3,\ 1)$，$C(1,\ 2)$.

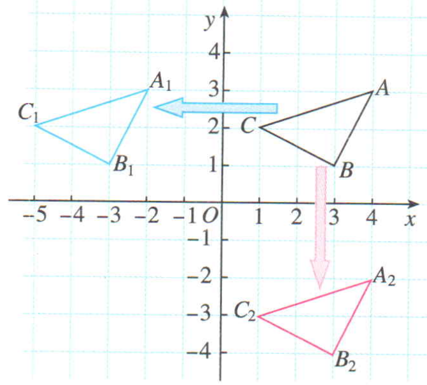
（1）将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到

点 A_1，B_1，C_1，依次连接 A_1，B_1，C_1 各点，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

（2）将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2，B_2，C_2，依次连接 A_2，B_2，C_2 各点，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？



（1）



（2）

图 7.2-7

解：如图7.2-7（2），所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到. 类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到.

思考

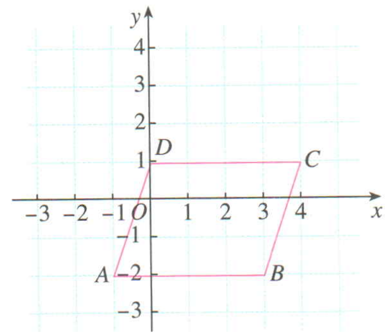
（1）如果将这个问题中的“横坐标都减去 6”“纵坐标都减去 5”相应地变为“横坐标都加 3”“纵坐标都加 2”，分别能得出什么结论？画出得到的图形.

（2）如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，能得到什么结论？画出得到的图形.

一般地，在平面直角坐标系内，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度.

练习

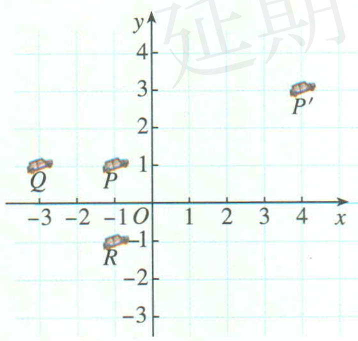
如图，将平行四边形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度，然后再向上平移 3 个单位长度，可以得到平行四边形 $A'B'C'D'$，画出平移后的图形，并指出其各个顶点的坐标.



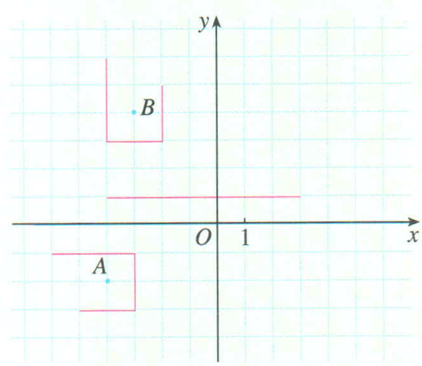
习题 7.2

复习巩固

1. 如图，三辆汽车 P，Q，R 保持编队行驶，分别写出它们的坐标. 当汽车 P 行驶到 P'位置时，汽车 Q，R 行驶到了什么位置？分别写出这三辆汽车新位置的坐标.

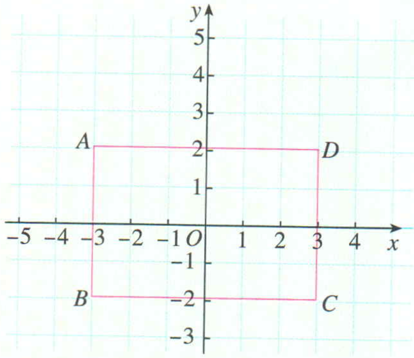


（第 1 题）

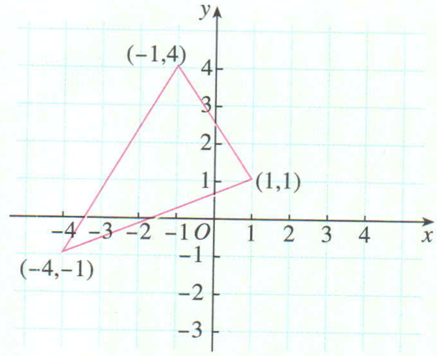


（第 2 题）

2. 如图，机械手要将一个工件从图中 A 处移动到 B 处，但是这个工件不能碰到图中的红色障碍，试用坐标写出一条机械手在移动中可能要走过的路线.
3. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点分别是 $A(-3,\ 2)$，$B(-3,\ -2)$，$C(3,\ -2)$，$D(3,\ 2)$. 将长方形向左平移 2 个单位长度，各个顶点的坐标变为什么？将它向上平移 3 个单位长度呢？分别画出平移后的图形.



（第 3 题）



（第 4 题）

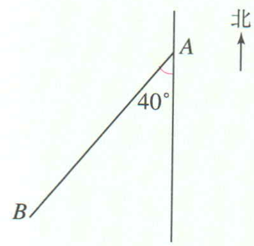
4. 选择题．如图，将三角形向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，则平移后三个顶点的坐标是（　　）．

(A)（2，2），（3，4），（1，7）　　(B)（−2，2），（4，3），（1，7）

(C)（−2，2），（3，4），（1，7）　　(D)（2，−2），（3，3），（1，7）

5. 如图，这是一所学校的平面示意图，建立适当的平面直角坐标系，并用坐标表示教学楼、图书馆、校门、实验楼、国旗杆的位置．类似地，你能用坐标表示你自己学校各主要建筑物的位置吗？

（第 5 题）



（第 6 题）

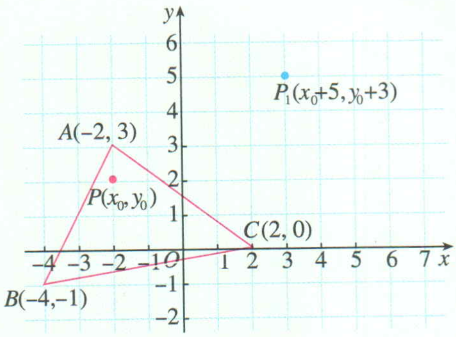
6. 如图，在一次活动中，位于 A 处的 1 班准备前往相距 5 km 的 B 处与 2 班会合，如何用方向和距离描述 2 班相对于 1 班的位置？反过来，如何用方向和距离描述1 班相对于 2 班的位置？

综合运用

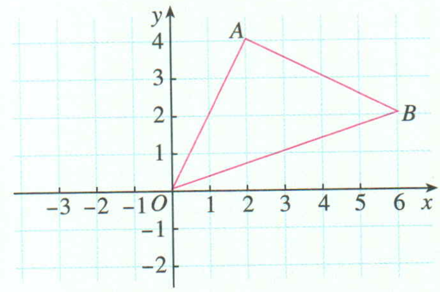
7. 制作动画片时，经常要用到图形的平移．如图，小鸭子从 A 到 B，再到 C，到 D，这几个过程中，分别进行了怎样的平移？

8. 如图，三角形 ABC 中任意一点 $P(x_0,\ y_0)$ 经平移后对应点为 $P_1(x_0+5,\ y_0+3)$，将三角形 ABC 作同样的平移得到三角形 $A_1B_1C_1$．求 A_1，B_1，C_1 的坐标．

（第 7 题）



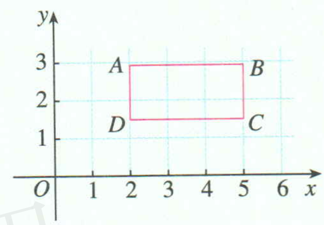
（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，三角形 AOB 中，A，B 两点的坐标分别为 (2，4)，(6，2)，求三角形 AOB 的面积.（提示：三角形 AOB 的面积可以看作一个长方形的面积减去一些小三角形的面积.）

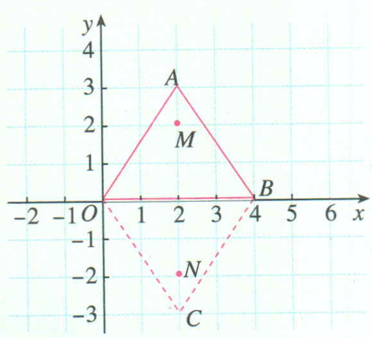
10. 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2,\ 2\sqrt{2})$，$B(5,\ 2\sqrt{2})$，$C(5,\ \sqrt{2})$，$D(2,\ \sqrt{2})$. 将这个长方形向下平移 $2\sqrt{2}$ 个单位长度，得到长方形 $A'B'C'D'$. 求长方形 $A'B'C'D'$ 四个顶点的坐标.



（第 10 题）

拓广探索

11. 如图，三角形 COB 是由三角形 AOB 经过某种变换后得到的图形，观察点 A 与点 C 的坐标之间的关系. 三角形 AOB 内任意一点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？



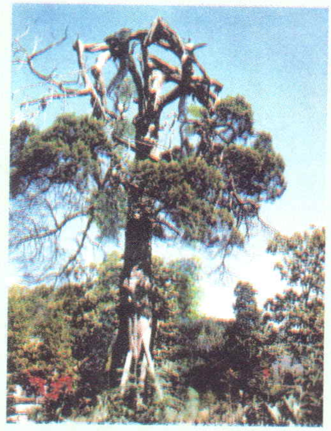
（第 11 题）

（第 12 题）

12. 如图，这是一个利用平面直角坐标系画出的某动物园的示意图，如果这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，并且猴山和狮虎山的坐标分别是 (2，1) 和 (8，2). 你能在此图上标出熊猫馆 (6，6) 的位置吗？

数学活动

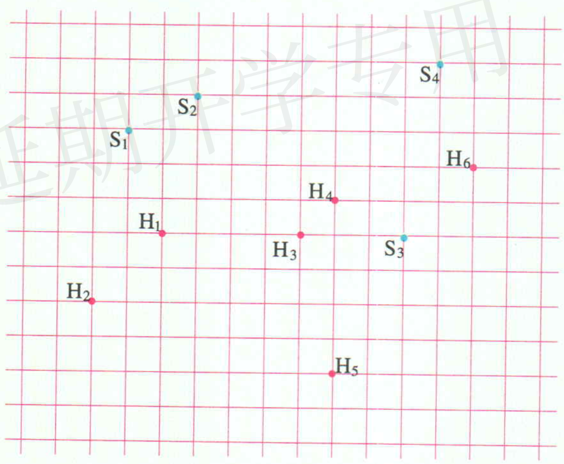
活动1



近年来，园林部门为了对古树名木进行系统养护，建立了相关的地理信息系统，其中重要的一条就是要确定这些树的位置.

如下图，某小区有树龄百年以上的古松树 4 棵（S_1，S_2，S_3，S_4），古槐树 6 棵（H_1，H_2，H_3，H_4，H_5，H_6）. 为了加强对古树的保护，园林部门将 4 棵古松树的位置用坐标表示为 $S_1(3,9)$，$S_2(5,10)$，$S_3(11,6)$，$S_4(12,11)$.

类似地，你能在下图中把 6 棵古槐树的位置也用坐标表示出来吗？



请以小组的形式完成下面的活动：

(1) 收集一些当地古树名木的资料，特别是有关它们具体位置的记载，并为它们编号；

(2) 建立适当的平面直角坐标系，为上述树木绘制一幅平面分布图；

(3) 你也可以收集一些校园或自己家附近有代表性的建筑，绘制出相关的平面分布图.

活动2

春天到了，七（2）班组织同学到人民公园春游，张明、李华对着景区示意图（图 1）如下描述牡丹园的位置（图中小正方形的边长代表 100 m长）.

张明：“牡丹园的坐标是（300，300）.”

李华：“牡丹园在中心广场东北方向约 420 m 处.”

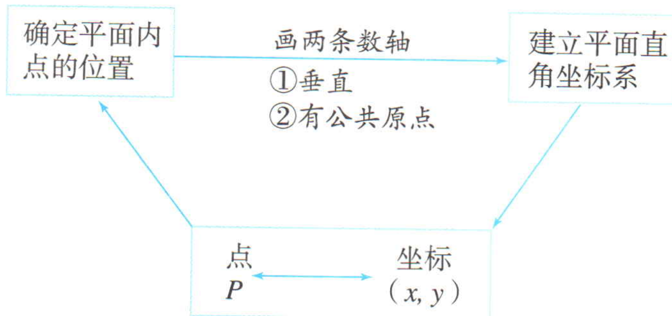
图 1

实际上，他们所说的位置都是正确的．你知道张明同学是如何在景区示意图上建立坐标系的吗？你理解李华同学所说的“东北方向约 420 m 处”的含义吗？

用他们的方法，你能描述公园内其他景点的位置吗？与同学们交流一下.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过具体实例学习了平面直角坐标系等知识，应用坐标方法解决了一些简单问题．

建立平面直角坐标系后，对于坐标平面内任意一点 M，都有唯一的一对有序实数 $(x,\ y)$ 和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 $(x,\ y)$，在坐标平面内都有唯一的点 M 和它对应．这样，我们就可以数形结合地研究问题．

坐标方法有广泛的应用．例如，我们可以利用坐标描述一些地点的分布情况；还可以通过直角坐标系中对应点的坐标之间的关系，研究图形平移等问题．这种用数和运算来研究几何问题的方法是非常重要的，今后我们将不断地看到它的应用．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 在日常生活中，我们可以用有序数对来描述物体的位置．以教室中座位位置为例，说明有序数对 $(x,\ y)$ 和 $(y,\ x)$ 是否相同以及为什么．

2. 平面直角坐标系由两条互相垂直且有公共原点的数轴组成．请你举例说明如何建立平面直角坐标系，在直角坐标平面内描出点 $P(2,\ 4)$ 和原点的位置，并指出点 P 和原点的横坐标和纵坐标．

平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个部分，这四个部分依次称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限．请你在直角坐标平面内描出点 $A(2,\ 1)$，$B(-2,\ 1)$，$C(-2,\ -1)$，$D(2,\ -1)$ 的位置，并说明它们所在的象限．

3. 平面直角坐标系具有广泛的应用，请你举例说明它的应用．

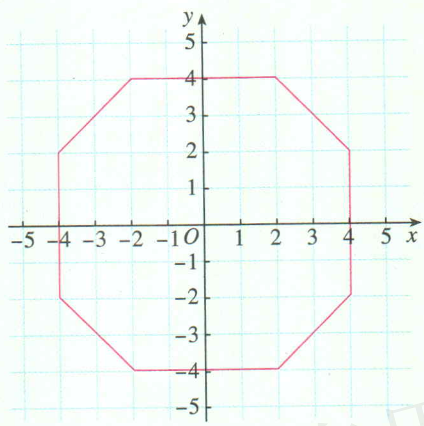
复习题 7

复习巩固

1. 指出下列各点的横坐标和纵坐标，并指出各点所在的象限.

$$A(2, 3), B(-2, 3), C(-2, -3), D(2, -3).$$

2. 如图，写出八边形各顶点的坐标.



（第 2 题）

3. 在同一平面直角坐标系中描出下列各组点，并将各组内的点用线段依次连接起来.

(1) $(2, 0)$，$(4, 0)$，$(2, 2)$，$(2, 0)$；

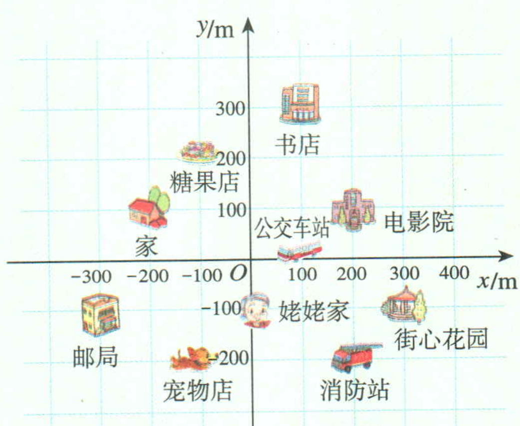
(2) $(0, 2)$，$(0, 4)$，$(-2, 2)$，$(0, 2)$；

(3) $(-4, 0)$，$(-2, -2)$，$(-2, 0)$，$(-4, 0)$；

(4) $(0, -2)$，$(2, -2)$，$(0, -4)$，$(0, -2)$.

观察所得的图形，你觉得它像什么？

4. 图中标明了李明家附近的一些地方.



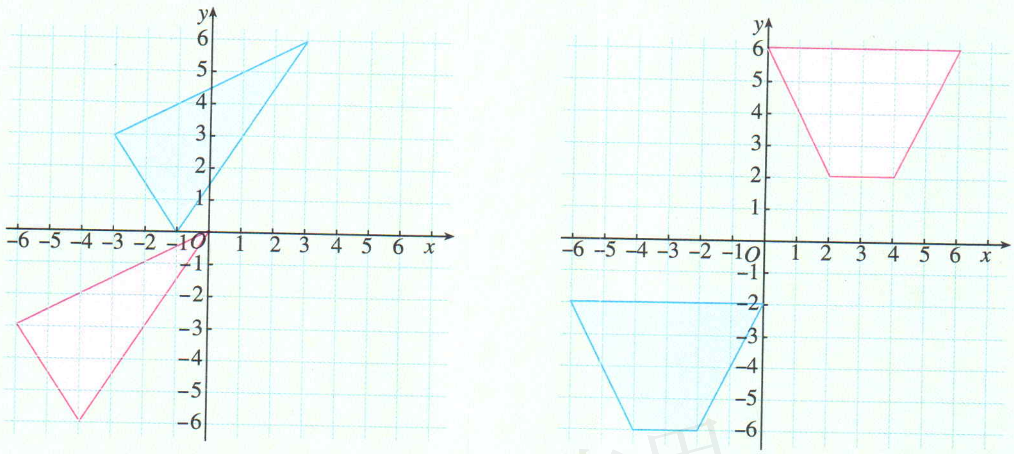
（第 4 题）

(1) 写出书店和邮局的坐标；

(2) 某星期日早晨，李明同学从家里出发，沿（-100，200），（100，0），（200，100），（200，-200），（-100，-200），（0，-100）的路线转了一下，又回到家里，写出他路上经过的地方；

(3) 连接他在（2）中经过的地点，你能得到什么图形？

5. 如图，红色图形可以由蓝色图形经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？



（第 5 题）

综合运用

6. (1) 坐标（x，3）中的 x 取-3，-2，-1，0，1，2，3 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

(2) 坐标（3，y）中的 y 取-3，-2，-1，0，1，2，3 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

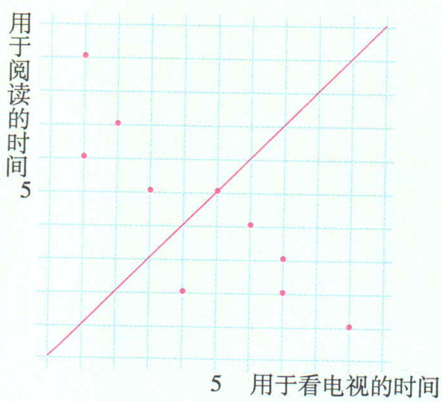
7. 图中显示了 10 名学生平均每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间（单位：h）.

(1) 用有序数对表示图中各点.

(2) 图中有一个点位于方格的对角线上，这表示什么意思？

(3) 图中方格纸的对角线的左上方的点有什么共同的特点？它右下方的点呢？

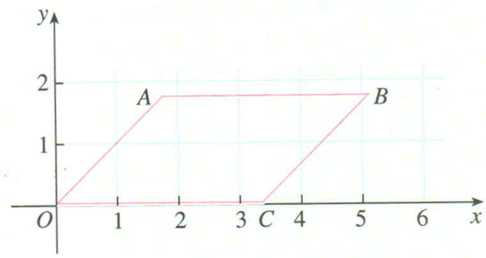
(4) 估计一下你每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间，在图上描出来，这个点位于什么位置？



（第 7 题）

8. 某村过去是一个缺水的村庄，由于兴修水利，现在家家户户都用上了自来水．据村委会主任徐伯伯讲，以前全村 400 多户人家只有五口水井：第一口在村委会的院子里，第二口在村委会北偏东 30°方向 2 000 m 处，第三口在村委会正西方向 1 500 m 处，第四口在村委会东南方向 1 000 m 处，第五口在村委会正南方向 900 m 处．请你根据徐伯伯的话，和同学们一起讨论，画图表示这个村庄五口水井的位置．

9. 如图，平行四边形 $ABCO$ 四个顶点的坐标分别是 $A(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$B(3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$C(2\sqrt{3},\ 0)$，$O(0,\ 0)$．将这个平行四边形向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度，得到平行四边形 $A'B'C'O'$．求平行四边形 $A'B'C'O'$ 四个顶点的坐标．



（第 9 题）

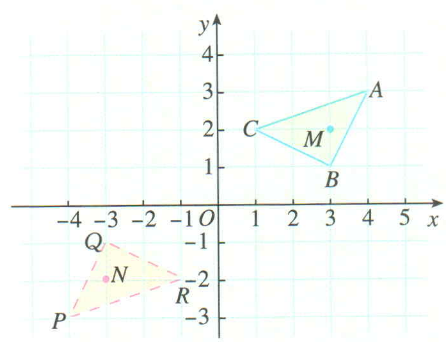
拓广探索

10. 建立平面直角坐标系，并描出下列各点：

$A(1,\ 1)$，$B(5,\ 1)$，$C(3,\ 3)$，$D(-3,\ 3)$，$E(1,\ -2)$，$F(1,\ 4)$，$G(3,\ 2)$，$H(3,\ -2)$，$I(-1,\ -1)$，$J(-1,\ 1)$．

连接 AB，CD，EF，GH，IJ，找出它们中点的坐标，将上述中点的横坐标和纵坐标分别与对应线段的两个端点的横坐标和纵坐标进行比较，你发现它们之间有什么关系？写出你的发现，并与其他同学进行交流．

11. 如图，三角形 PQR 是三角形 ABC 经过某种变换后得到的图形，分别写出点 A 与点 P，点 B 与点 Q，点 C 与点 R 的坐标，并观察它们之间的关系．三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为 $(x,\ y)$，点 M 经过这种变换后得到点 N，点 N 的坐标是什么？



（第 11 题）

第八章　二元一次方程组

我们看下面的问题.

篮球联赛中，每场比赛都要分出胜负，每队胜 1 场得 2 分，负 1 场得 1 分. 某队在 10 场比赛中得到 16 分，那么这个队胜负场数分别是多少？

在上面的问题中，要求的是两个未知数. 如果用一元一次方程来解决，列方程时，要用一个未知数表示另一个未知数. 能不能根据题意直接设两个未知数，使列方程变得容易呢？我们从这个想法出发开始本章的学习.

本章我们将从实际问题出发，认识二元一次方程组，学会解二元一次方程组的方法，并运用二元一次方程组解决一些实际问题. 在此基础上，学习三元一次方程组及其解法，进一步体会消元的思想方法. 通过本章的学习，你将对方程（组）有新的认识.

	胜	负	合计
场　数	x	y	10
积　分	$2x$	y	16

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16. \end{cases}$$

8.1 二元一次方程组

思考

引言中的问题包含了哪些必须同时满足的条件？设胜的场数是 x，负的场数是 y，你能用方程把这些条件表示出来吗？

由问题知道，题中包含两个必须同时满足的条件：

胜的场数＋负的场数＝总场数，

胜场积分＋负场积分＝总积分.

这两个条件可以用方程

$$x+y=10,$$
$$2x+y=16$$

表示.

> 这两个方程有什么特点？与一元一次方程有什么不同？

上面两个方程中，每个方程都含有两个未知数（x 和 y），并且含有未知数的项的次数都是 1，像这样的方程叫做**二元一次方程**（linear equation in two unknowns）.

上面的问题中包含两个必须同时满足的条件，也就是未知数 x，y 必须同时满足方程

$$x+y=10 \quad ①$$

和

$$2x+y=16. \quad ②$$

把这两个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16, \end{cases}$$

就组成了一个**方程组**. 这个方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做**二元一次方程组**（system of linear equations in two unknowns）.

探究

满足方程①，且符合问题的实际意义的 x，y 的值有哪些？把它们填入表中.

x											
y											

上表中哪对 x，y 的值还满足方程②？

由上表可知，$x=0$，$y=10$；$x=1$，$y=9$；…；$x=10$，$y=0$ 使方程 $x+y=10$ 两边的值相等，它们都是方程 $x+y=10$ 的解. 如果不考虑方程 $x+y=10$ 与上面实际问题的联系，那么 $x=-1$，$y=11$；$x=0.5$，$y=9.5$；……也都是这个方程的解.

一般地，使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值，叫做**二元一次方程的解**.

我们还发现，$x=6$，$y=4$ 既满足方程①，又满足方程②. 也就是说，$x=6$，$y=4$ 是方程①与方程②的公共解. 我们把 $x=6$，$y=4$ 叫做二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=10, \\ 2x+y=16 \end{cases}$$

的解. 这个解通常记作

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

联系前面的问题可知，这个队在 10 场比赛中胜 6 场、负 4 场.

一般地，二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做**二元一次方程组的解**.

练习

对下面的问题，列出二元一次方程组，并根据问题的实际意义，找出问题的解.

加工某种产品需经两道工序，第一道工序每人每天可完成 900 件，第二道工序每人每天可完成 1 200 件. 现有 7 位工人参加这两道工序，应怎样安排人力，才能使每天第一、第二道工序所完成的件数相等？

习题 8.1

复习巩固

1. 填表，使上下每对 x，y 的值是方程 $3x+y=5$ 的解.

x	-2	0	0.4	2				
y					-0.5	-1	0	3

2. 选择题.

方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=5, \\ -7x+9y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

的解是（　　）.

(A) $\begin{cases} x=2, \\ y=-0.25 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x=-5.5, \\ y=4 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x=1, \\ y=0.5 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-0.5 \end{cases}$

综合运用

3. 如果三角形的三个内角分别是 $x°$，$y°$，$y°$，求：

(1) x，y 满足的关系式；

(2) 当 $x=90$ 时，y 的值；

(3) 当 $y=60$ 时，x 的值.

4. 我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问鸡兔各几何.”你能用二元一次方程组表示题中的数量关系吗？试找出问题的解.

拓广探索

5. 把一根长 7 m 的钢管截成 2 m 长和 1 m 长两种规格的钢管，怎样截不造成浪费？你有几种不同的截法？

8.2 消元——解二元一次方程组

在 8.1 节中我们已经看到，直接设两个未知数：胜 x 场、负 y 场，可以列方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16\end{cases}$ 表示本章引言中问题的数量关系. 如果只设一个未知数：胜 x 场，那么这个问题也可以用一元一次方程

$$2x+(10-x)=16$$

来解.

思考

上面的二元一次方程组和一元一次方程有什么关系？

我们发现，二元一次方程组中第一个方程 $x+y=10$ 可以写为 $y=10-x$. 由于两个方程中的 y 都表示负的场数，所以，我们把第二个方程 $2x+y=16$ 中的 y 换为 $10-x$，这个方程就化为一元一次方程 $2x+(10-x)=16$. 解这个方程，得 $x=6$. 把 $x=6$ 代入 $y=10-x$，得 $y=4$. 从而得到这个方程组的解.

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化为我们熟悉的一元一次方程. 我们可以先求出一个未知数，然后再求另一个未知数. 这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做**消元**思想.

上面的解法，是把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解. 这种方法叫做**代入消元法**，简称**代入法**（substitution method）.

例 1 用代入法解方程组

$$\begin{cases}x-y=3, & ①\\3x-8y=14. & ②\end{cases}$$

分析：方程①中 x 的系数是 1，用含 y 的式子表示 x，比较简便.

解：由①，得

$$x=y+3. \qquad ③$$

把③代入①可以吗？试试看.

把③代入②，得

$$3(y+3)-8y=14.$$

解这个方程，得

$$y=-1.$$

把 $y=-1$ 代入③，得

$$x=2.$$

把 $y=-1$ 代入①或②可以吗？

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

例 2 根据市场调查，某种消毒液的大瓶装（500 g）和小瓶装（250 g）两种产品的销售数量（按瓶计算）比为 2∶5. 某厂每天生产这种消毒液 22.5 t，这些消毒液应该分装大、小瓶两种产品各多少瓶？

分析：问题中包含两个条件：

大瓶数∶小瓶数＝2∶5，

大瓶所装消毒液＋小瓶所装消毒液＝总生产量.

解：设这些消毒液应该分装 x 大瓶、y 小瓶.

根据大、小瓶数的比，以及消毒液分装量与总生产量的数量关系，得

$$\begin{cases} 5x=2y, & ① \\ 500x+250y=22\ 500\ 000. & ② \end{cases}$$

由①，得

$$y=\frac{5}{2}x. \qquad ③$$

把③代入②，得

$$500x+250\times\frac{5}{2}x=22\ 500\ 000.$$

解这个方程，得

$$x=20\ 000.$$

把 $x=20\ 000$ 代入③，得

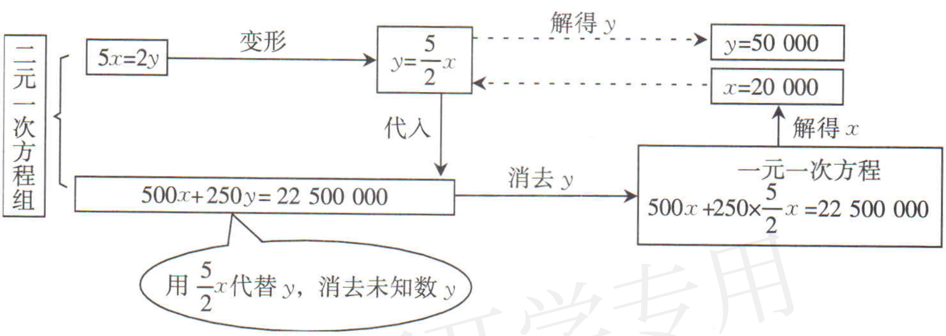
$$y=50\ 000.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=20\ 000,\\ y=50\ 000.\end{cases}$$

答：这些消毒液应该分装 20 000 大瓶和 50 000 小瓶.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：



思考

解这个方程组时，可以先消去 x 吗？试试看.

练习

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

   (1) $2x-y=3$；　　(2) $3x+y-1=0$.

2. 用代入法解下列方程组：

   (1) $\begin{cases}y=2x-3,\\ 3x+2y=8;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+4y=2.\end{cases}$

3. 有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛. 篮球、排球队各有多少支参赛？

4. 张翔从学校出发骑自行车去县城，中途因道路施工步行一段路，1.5 h 后到达县城. 他骑车的平均速度是 15 km/h，步行的平均速度是 5 km/h，路程全长 20 km. 他骑车与步行各用多少时间？

思考

前面我们用代入法求出了方程组

$$\begin{cases} x+y=10, & ① \\ 2x+y=16 & ② \end{cases}$$

的解. 这个方程组的两个方程中，y 的系数有什么关系？利用这种关系你能发现新的消元方法吗？

这两个方程中未知数 y 的系数相等，②－①可消去未知数 y，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入①，得

$$y=4.$$

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=4. \end{cases}$$

②－①就是用方程②的左边减去方程①的左边，方程②的右边减去方程①的右边.

①－②也能消去未知数 y，求得 x 吗？

思考

联系上面的解法，想一想怎样解方程组

$$\begin{cases} 3x+10y=2.8, \\ 15x-10y=8. \end{cases}$$

从上面两个方程组的解法可以看出：当二元一次方程组的两个方程中同一未知数的系数相反或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程. 这种方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**（addition-subtraction method）.

例 3 用加减法解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=16, & ①\\ 5x-6y=33. & ②\end{cases}$$

分析： 这两个方程中没有同一个未知数的系数相反或相等，直接加减这两个方程不能消元. 我们对方程变形，使得这两个方程中某个未知数的系数相反或相等.

解： ①×3，得

$$9x+12y=48. \quad ③$$

②×2，得

$$10x-12y=66. \quad ④$$

③+④，得

$$19x=114,$$

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入 ①，得

$$3\times6+4y=16,$$

$$4y=-2,$$

$$y=-\frac{1}{2}.$$

把 $x=6$ 代入② 可以解得 y 吗?

所以这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=6,\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

如果用加减法消去 x 应如何解? 解得的结果一样吗?

例 4 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 h 共收割小麦 3.6 hm^2，3 台大收割机和2 台小收割机同时工作 5 h 共收割小麦 8 hm^2. 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷?

分析： 如果 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2，那么 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦________ hm^2，3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 1 h 共收割小麦________ hm^2. 由此考虑两种情况下的工作量.

解： 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x hm^2 和 y hm^2.

根据两种工作方式中的相等关系，得方程组

$$\begin{cases}2(2x+5y)=3.6,\\5(3x+2y)=8.\end{cases}$$

去括号，得

$$\begin{cases}4x+10y=3.6, & ①\\15x+10y=8. & ②\end{cases}$$

②－①，得

$$11x=4.4.$$

解这个方程，得

$$x=0.4.$$

把 $x=0.4$ 代入①，得

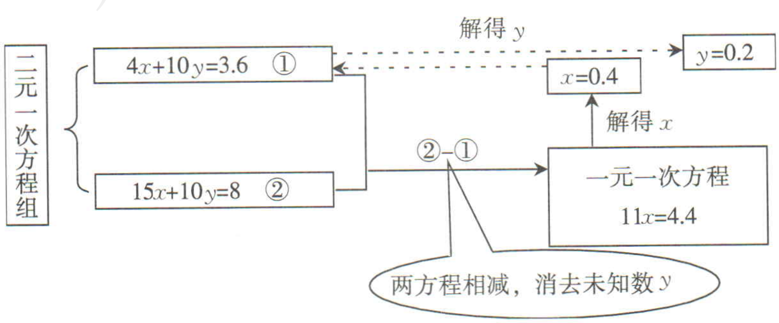
$$y=0.2.$$

因此，这个方程组的解是

$$\begin{cases}x=0.4,\\y=0.2.\end{cases}$$

答：1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 0.4 hm^2 和 0.2 hm^2.

上面解方程组的过程可以用下面的框图表示：



练习

1. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y=9,\\3x-2y=-1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}5x+2y=25,\\3x+4y=15;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+5y=8, \\ 3x+2y=5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x-2y=-2. \end{cases}$

2. 一条船顺流航行，每小时行 20 km；逆流航行，每小时行 16 km. 求轮船在静水中的速度与水的流速.

3. 运输 360 t 化肥，装载了 6 节火车车厢和 15 辆汽车；运输 440 t 化肥，装载了 8 节火车车厢和 10 辆汽车. 每节火车车厢与每辆汽车平均各装多少吨化肥？

代入消元法和加减消元法是二元一次方程组的两种解法，它们都是通过消元使方程组转化为一元一次方程，只是消元的方法不同. 我们应根据方程组的具体情况，选择适合它的解法.

思考

(1) 你怎样解下面的方程组？

$\begin{cases} 2x+y=1.5, \\ 0.8x+0.6y=1.3; \end{cases}$　　$\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

(2) 选择你认为简便的方法解习题 8.1 中的第 4 题（“鸡兔同笼”问题）.

习题 8.2

复习巩固

1. 把下列方程改写成用含 x 的式子表示 y 的形式：

(1) $\frac{3}{2}x+2y=1$；　　(2) $\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}y=2$；

(3) $5x-3y=x+2y$；　　(4) $2(3y-3)=6x+4$.

2. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=9; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3s-t=5, \\ 5s+2t=15; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+y=15, \\ 3x-2y=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 4(x+2)+5y=1, \\ 2x+3(y+2)=3. \end{cases}$

3. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3u+2t=7, \\ 6u-2t=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2a+b=3, \\ 3a+b=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-5y=-3, \\ -4x+y=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}y=-1, \\ 2x+y=3. \end{cases}$

4. 某班去看演出，甲种票每张 24 元，乙种票每张 18 元. 如果 35 名学生购票恰好用去 750 元，甲乙两种票各买了多少张？

综合运用

5. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3(x-1)=y+5, \\ 5(y-1)=3(x+5); \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2u}{3}+\dfrac{3v}{4}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4u}{5}+\dfrac{5v}{6}=\dfrac{7}{15}. \end{cases}$

6. 顺风旅行社组织 200 人到花果岭和云水洞旅游，到花果岭的人数比到云水洞的人数的 2 倍少 1，到两地旅游的人数各是多少？

7. 小方、小程两人相距 6 km，两人同时出发相向而行，1 h 相遇；同时出发同向而行，小方 3 h 可追上小程. 两人的平均速度各是多少？

8. 一种商品有大小盒两种包装，3 大盒、4 小盒共装 108 瓶，2 大盒、3 小盒共装 76 瓶. 大盒与小盒每盒各装多少瓶？

拓广探索

9. 一个长方形的长减少 5 cm，宽增加 2 cm，就成为一个正方形，并且这两个图形的面积相等. 这个长方形的长、宽各是多少？

8.3 实际问题与二元一次方程组

前面我们讨论了二元一次方程组的解法，并用二元一次方程组解决了一些实际问题. 本节我们继续探究如何用二元一次方程组解决实际问题. 同学们可以先独立分析问题中的数量关系，列出方程组，得出问题的解答，然后再互相交流.

探究 1

养牛场原有 30 头大牛和 15 头小牛，1 天约用饲料 675 kg；一周后又购进 12 头大牛和 5 头小牛，这时 1 天约用饲料 940 kg. 饲养员李大叔估计每头大牛 1 天约需饲料 18～20 kg，每头小牛 1 天约需饲料 7～8 kg. 你能通过计算检验他的估计吗？

分析：设每头大牛和每头小牛 1 天各约用饲料 x kg 和 y kg.
根据两种情况的饲料用量，找出相等关系，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

这就是说，每头大牛 1 天约需饲料$\underline{\qquad\quad}$ kg，每头小牛 1 天约需饲料$\underline{\qquad\quad}$kg. 因此，饲养员李大叔对大牛的食量估计$\underline{\qquad\quad}$，对小牛的食量估计$\underline{\qquad\quad}$.

探究 2

据统计资料，甲、乙两种作物的单位面积产量的比是 1∶2. 现要把一块长 200 m、宽 100 m 的长方形土地，分为两块小长方形土地，分别种植这两种作物. 怎样划分这块土地，使甲、乙两种作物的总产量的比是3∶4？

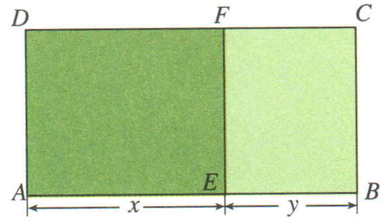


图 8.3-1

分析： 如图 8.3-1，一种种植方案为：甲、乙两种作物的种植区域分别为长方形 $AEFD$ 和 $BCFE$. 此时设 $AE=x$ m，$BE=y$ m，根据问题中涉及长度、产量的数量关系，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

过长方形土地的长边上离一端______处，作这条边的垂线，把这块土地分为两块长方形土地. 较大一块土地种____种作物，较小一块土地种____种作物.

你还能设计其他种植方案吗？

探究 3

如图 8.3-2，长青化工厂与 A，B 两地有公路、铁路相连. 这家工厂从 A 地购买一批每吨1 000元的原料运回工厂，制成每吨 8 000 元的产品运到 B 地. 已知公路运价为 1.5 元/(t·km)，铁路运价为 1.2 元/(t·km)，且这两次运输共支出公路运费 15 000 元，铁路运费 97 200 元. 这批产品的销售款比原料费与运输费的和多多少元？

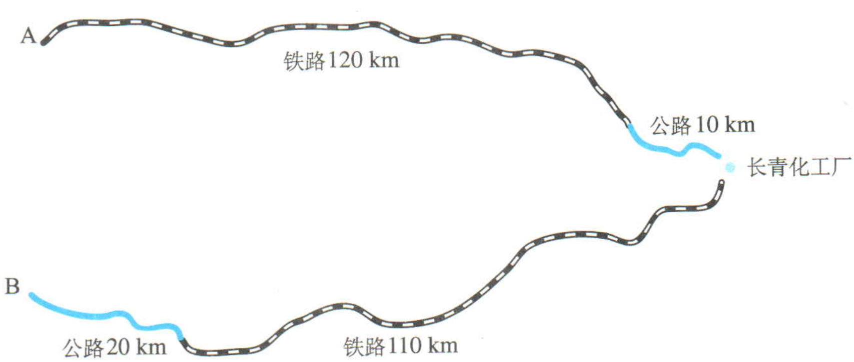


图 8.3-2

分析： 销售款与产品数量有关，原料费与原料数量有关. 设制成 x t 产品，购买 y t 原料. 根据题中数量关系填写下页表.

	产品 x t	原料 y t	合计
公路运费/元			
铁路运费/元			
价　值/元			

题目所求数值是____________________，为此需先解出____与____.

由上表，列方程组

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\underline{\qquad\qquad}, \\ y=\underline{\qquad\qquad}. \end{cases}$$

因此，这批产品的销售款比原料费与运输费的和多____________元.

从以上探究可以看出，方程组是解决含有多个未知数问题的重要工具．用方程组解决问题时，要根据问题中的数量关系列出方程组，求出方程组的解后，应进一步考虑它是否符合问题的实际意义.

习题 8.3

复习巩固

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 5y-1=3x+5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{17}{12}, \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

2. A 地至 B 地的航线长 9 750 km，一架飞机从 A 地顺风飞往 B 地需 12.5 h，它逆风飞行同样的航线需 13 h．求飞机无风时的平均速度与风速.

3. 一支部队第一天行军 4 h，第二天行军 5 h，两天共行军 98 km，且第一天比第二天少走 2 km．第一天和第二天行军的平均速度各是多少？

综合运用

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制盒身 25 个，或制盒底 40 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒. 现有 36 张白铁皮，用多少张制盒身，多少张制盒底可以使盒身与盒底正好配套?
5. 有大小两种货车，2 辆大货车与 3 辆小货车一次可以运货 15.5 t，5 辆大货车与 6 辆小货车一次可以运货 35 t. 3 辆大货车与 5 辆小货车一次可以运货多少吨?
6. 从甲地到乙地有一段上坡与一段平路. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 54 min，从乙地到甲地需 42 min. 甲地到乙地全程是多少?
7. 用含药 30%和 75%的两种防腐药水，配制含药 50%的防腐药水 18 kg，两种药水各需多少千克?

拓广探索

8. 打折前，买 60 件 A 商品和 30 件 B 商品用了 1 080 元，买 50 件 A 商品和 10 件 B 商品用了 840 元. 打折后，买 500 件 A 商品和 500 件 B 商品用了 9 600 元，比不打折少花多少钱?
9. 某家商店的账目记录显示，某天卖出 39 支牙刷和 21 盒牙膏，收入 396 元；另一天，以同样的价格卖出同样的 52 支牙刷和 28 盒牙膏，收入 518 元. 这个记录是否有误? 如果有误，请说明理由.

*8.4 三元一次方程组的解法

前面我们学习了二元一次方程组及其解法——消元法．有些有两个未知数的问题，可以列出二元一次方程组来解决．实际上，有不少问题含有更多未知数．我们看下面的问题：

小明手头有 12 张面额分别为 1 元、2 元、5 元的纸币，共计 22 元，其中 1 元纸币的数量是 2 元纸币数量的 4 倍．求 1 元、2 元、5 元纸币各多少张．

自然的想法是，设 1 元、2 元、5 元的纸币分别为 x 张、y 张、z 张，根据题意，可以得到下面三个方程：

$$x+y+z=12,$$
$$x+2y+5z=22,$$
$$x=4y.$$

这个问题的解必须同时满足上面三个条件，因此，我们把这三个方程合在一起，写成

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ x+2y+5z=22, \\ x=4y. \end{cases}$$

这个方程组含有三个未知数，每个方程中含未知数的项的次数都是 1，并且一共有三个方程，像这样的方程组叫做**三元一次方程组**．

怎样解三元一次方程组呢？我们知道，二元一次方程组可以利用代入法或加减法消去一个未知数，化成一元一次方程求解．那么，能不能用同样的思路，用代入法或加减法消去三元一次方程组的一个未知数，把它化成二元一次方程组呢？

让我们看前面列出的三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=12, & ① \\ x+2y+5z=22, & ② \\ x=4y. & ③ \end{cases}$$

仿照前面学过的代入法，我们可以把③分别代入①②，得到两个只含 y，

---

* 本节内容为选学内容．

z 的方程：

$$4y+y+z=12,$$
$$4y+2y+5z=22.$$

它们组成方程组

$$\begin{cases}5y+z=12,\\6y+5z=22.\end{cases}$$

得到二元一次方程组之后，就不难求出 y 和 z，进而可求出 x.

从上面的分析可以看出，解三元一次方程组的基本思路是：通过“代入”或“加减”进行消元，把“三元”化为“二元”，使解三元一次方程组转化为解二元一次方程组，进而再转化为解一元一次方程. 这与解二元一次方程组的思路是一样的.

$$\boxed{\text{三元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow{\text{消元}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

例 1 解三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7, & ①\\2x+3y+z=9, & ②\\5x-9y+7z=8. & ③\end{cases}$$

分析： 方程①只含 x，z，因此，可以由②③消去 y，得到一个只含 x，z 的方程，与方程①组成一个二元一次方程组.

解： ②×3+③，得

$$11x+10z=35. \quad ④$$

①与④组成方程组

$$\begin{cases}3x+4z=7,\\11x+10z=35.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=5,\\z=-2.\end{cases}$$

把 $x=5$，$z=-2$ 代入②，得

$$2\times5+3y-2=9,$$

所以

$$y=\frac{1}{3}.$$

因此，这个三元一次方程组的解为

$$\begin{cases}x=5,\\ y=\dfrac{1}{3},\\ z=-2.\end{cases}$$

你还有其他解法吗？试一试，并与这种解法进行比较.

例 2 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=-1$ 时，$y=0$；当 $x=2$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=60$. 求 a，b，c 的值.

分析： 把 a，b，c 看作三个未知数，分别把已知的 x，y 值代入原等式，就可以得到一个三元一次方程组.

解： 根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases}a-b+c=0, & ①\\ 4a+2b+c=3, & ②\\ 25a+5b+c=60. & ③\end{cases}$$

②−①，得

$$a+b=1; \qquad ④$$

③−①，得

$$4a+b=10. \qquad ⑤$$

④与⑤组成二元一次方程组

$$\begin{cases}a+b=1,\\ 4a+b=10.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}a=3,\\ b=-2.\end{cases}$$

把 $\begin{cases}a=3,\\ b=-2\end{cases}$ 代入①，得

$$c=-5.$$

因此

$$\begin{cases}a=3,\\ b=-2,\\ c=-5,\end{cases}$$

即 a，b，c 的值分别为 3，-2，-5.

练习

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-2y=-9, \\ y-z=3, \\ 2z+x=47; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 2x+3y-z=12, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

2. 甲、乙、丙三个数的和是 35，甲数的 2 倍比乙数大 5，乙数的 $\frac{1}{3}$ 等于丙数的 $\frac{1}{2}$. 求这三个数.

习题 8.4

复习巩固

1. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} y=2x-7, \\ 5x+3y+2z=2, \\ 3x-4z=4; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 3y-2z=1, \\ 7x+5z=\frac{19}{4}. \end{cases}$

2. 解下列三元一次方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-9z=17, \\ 3x+y+15z=18, \\ x+2y+3z=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+4y+3z=9, \\ 3x-2y+5z=11, \\ 5x-6y+7z=13. \end{cases}$

综合运用

3. 一个三位数，个位、百位上的数的和等于十位上的数，百位上的数的 7 倍比个位、十位上的数的和大 2，且个位、十位、百位上的数的和是 14. 求这个三位数.

4. 解方程组

$$\begin{cases} x:y=3:2, \\ y:z=5:4, \\ x+y+z=66. \end{cases}$$

拓广探索

5. 在等式 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=1$ 时，$y=-2$；当 $x=-1$ 时，$y=20$；当 $x=\frac{3}{2}$ 与 $x=\frac{1}{3}$ 时，y 的值相等. 求 a，b，c 的值.

阅读与思考

一次方程组的古今表示及解法

我国古代很早就开始对一次方程组进行研究，其中不少成果被收入古代数学著作《九章算术》中.《九章算术》的“方程”章，有许多关于一次方程组的内容. 这一章的第一个问题译成现代汉语是这样的：

上等谷 3 束，中等谷 2 束，下等谷 1 束，可得粮食 39 斗；

上等谷 2 束，中等谷 3 束，下等谷 1 束，可得粮食 34 斗；

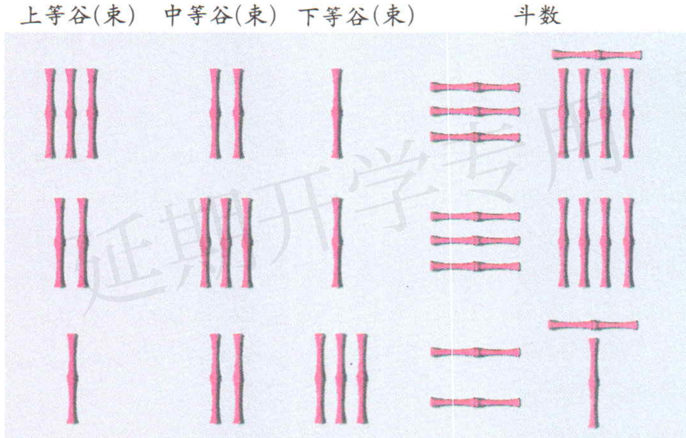
上等谷 1 束，中等谷 2 束，下等谷 3 束，可得粮食 26 斗.

求上、中、下三等谷每束各可得粮食几斗.

斗是过去的容积计量单位.

下面的算筹图代表了古代解决这个问题的方法，它是什么意思呢？

上等谷(束)　中等谷(束)　下等谷(束)　斗数



《九章算术》中的算筹图是竖排的. 为看图方便，上图改为横排，使三个横行表示三句话的含义.

不妨先用我们熟悉的数学符号来表述怎样解这个有 3 个未知数的问题.

设每束上等谷、中等谷、下等谷各可得粮食 x 斗、y 斗、z 斗.

根据题意，得三元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, & ① \\ 2x+3y+z=34, & ② \\ x+2y+3z=26. & ③ \end{cases} \qquad (*)$$

通过消元，可以求出各未知数.

上图实际上就是用算筹列出的方程组(*)，它省略了各未知数，只用算筹表示出未知

数的系数与相应的常数项.

我国古代解方程组时，也用算筹做计算工具，具体解法是：在一个方程两边乘另一个方程中某未知数的系数，然后再累减另一个方程. 例如，解方程组(*)，在②的两边乘3，然后累减①两次消去 x（这与②×3－①×2 的结果一样）；在③的两边乘3，然后减①消去 x，从而得到二元一次方程组

$$\begin{cases}5y+z=24,\\4y+8z=39.\end{cases}$$

再用上面的方法消去 y，求得 z.

用现代高等代数的符号可以将方程组(*)的系数排成一个表

$$\begin{pmatrix}3&2&1&39\\2&3&1&34\\1&2&3&26\end{pmatrix}.$$

这种由数排成的表叫做矩阵. 容易看出，这个矩阵与上面的算筹图是一致的，只是用阿拉伯数字替代了算筹. 利用矩阵解一次方程组的方法，与前面说的算筹方法也是一致的. 我们祖先掌握上述解法，比起欧洲人来，要早一千多年. 这是我国古代数学的一个光辉成就.

数学活动

活动1

(1) 在平面直角坐标系中，你能把二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解用一个点表示出来吗？标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点. 过这些点中的任意两点作直线，你有什么发现？在这条直线上任取一点，这个点的坐标是方程$x-y=0$的解吗？

以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点的全体叫做方程 $x-y=0$ 的图象. 根据上面的探究想一想：方程 $x-y=0$ 的图象是什么.

(2) 一般地，在平面直角坐标系中，任何一个二元一次方程的图象都是一条直线. 根据这个结论，在同一平面直角坐标系中画出二元一次方程组

$$\begin{cases}2x+y=4,\\x-y=-1\end{cases}$$

中的两个二元一次方程的图象.

由这两个二元一次方程的图象，你能得出这个二元一次方程组的解吗？

活动2

2010 年的一项调查显示，全世界每天平均有 13 000 人死于与吸烟有关的疾病. 我国吸烟者约 3.56 亿人，占世界吸烟人数的四分之一. 比较一年中死于与吸烟有关的疾病的人数占吸烟者总数的百分比，我国比世界其他国家约高 0.1%.

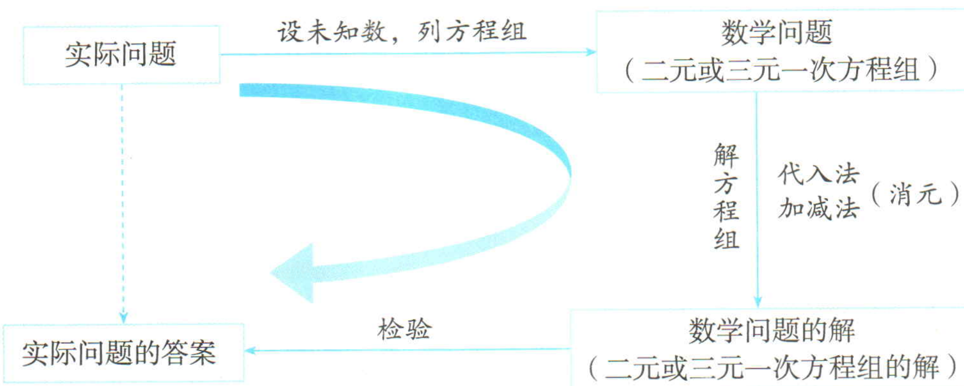
根据上述资料，试用二元一次方程组解决以下问题：

我国及世界其他国家一年中死于与吸烟有关的疾病的人数分别是多少？

从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题. 看看能不能用二元一次方程组解决这些问题.

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过实际问题引入了二元一次方程（组），并学习了二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法．在此基础上，学习了简单的三元一次方程组及其解法．

消元是解二（三）元一次方程组的基本方法．通过消元，我们把“三元”转化为“二元”，把“二元”转化为“一元”，这一过程体现了化归思想．

二（三）元一次方程组是刻画实际问题的重要数学模型，在现实中具有广泛的应用．用它解决实际问题时，要注意分析问题中的各种等量关系，引进适当的未知量，建立相应的方程组．

请你带着下面问题，复习一下全章内容吧．

1．举例说明怎样用代入法和加减法解二元一次方程组．“代入”与“加减”的目的是什么？

2．比较解三元一次方程组与解二元一次方程组的联系与区别．你能说说“消元”的思想方法在解三元一次方程组中的体现吗？

3．用二元或三元一次方程组解决一个实际问题，你能说说用方程组解决实际问题的基本思路吗？

复习题 8

复习巩固

1. 用代入法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} a=2b+3, \\ a=3b+20; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=13, \\ x=6y-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=4, \\ 4x+2y=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-y=110, \\ 9y-x=110. \end{cases}$

2. 用加减法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3m+b=11, \\ -4m-b=11; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 0.6x-0.4y=1.1, \\ 0.2x-0.4y=2.3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4f+g=15, \\ 3g-4f=-3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+3y=-6, \\ \dfrac{1}{2}x+y=2. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4(x-y-1)=3(1-y)-2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{3}-\dfrac{x+y}{4}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

*4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-3z=11, \\ x+y+z=12; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x-4y+4z=13, \\ 2x+7y-3z=19, \\ 3x+2y-z=18. \end{cases}$

5. 1 号仓库与 2 号仓库共存粮 450 t. 现从 1 号仓库运出存粮的 60%，从 2 号仓库运出存粮的 40%，结果 2 号仓库所余粮食比 1 号仓库所余粮食多 30 t. 1 号仓库与 2 号仓库原来各存粮多少吨？

综合运用

6. 甲、乙二人都以不变的速度在环形路上跑步，如果同时同地出发，反向而行，每隔 2 min 相遇一次；如果同时同地出发，同向而行，每隔 6 min 相遇一次. 已知甲比乙跑得快，甲、乙二人每分各跑多少圈？

（第 6 题）

7. 用 1 块 A 型钢板可制成 2 块 C 型钢板、1 块 D 型钢板；用 1 块 B 型钢板可制成 1 块 C 型钢板、2 块 D 型

钢板. 现需 15 块 C 型钢板、18 块 D 型钢板，可恰好用 A 型钢板、B 型钢板各多少块？

8. (我国古代问题) 有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛 (斛，音 hú，是古代的一种容量单位)，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒2 斛. 1 个大桶、1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

拓广探索

9. 现有 1 角、5 角、1 元硬币各 10 枚，从中取出 15 枚，共值 7 元. 1 角、5 角、1 元硬币各取多少枚？

10. 某电脑公司有 A 型、B 型、C 型三种型号的电脑，其中 A 型每台 6 000 元、B 型每台 4 000 元、C 型每台 2 500 元. 某中学现有资金 100 500 元，计划全部用于从这家电脑公司购进 36 台两种型号的电脑. 请你设计几种不同的购买方案供这个学校选择，并说明理由.

*11. 甲地到乙地全程是 3.3 km，一段上坡、一段平路、一段下坡. 如果保持上坡每小时走 3 km，平路每小时走 4 km，下坡每小时走 5 km，那么从甲地到乙地需 51 min，从乙地到甲地需 53.4 min. 从甲地到乙地时，上坡、平路、下坡的路程各是多少？

第九章　不等式与不等式组

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系．现实世界和日常生活中存在大量涉及不等关系的问题．例如，当两家商场推出不同的优惠方案时，到哪家商场购物花费少？这个问题就蕴含了不等关系．对于这样的问题，我们常常把要比较的对象数量化，分析其中的不等关系，列出相应的数学式子——不等式（组），并通过解不等式（组）而得出结论．这样的思路与利用方程（组）研究相等关系是类似的．

本章我们将从什么是不等式说起，类比等式和方程，讨论不等式的性质，学习一元一次不等式（组）及其解法，并利用这些知识解决一些问题，感受不等式在研究不等关系问题中的重要作用．

9.1 不等式

9.1.1 不等式及其解集

问题 一辆匀速行驶的汽车在 11:20 距离 A 地 50 km，要在 12:00 之前驶过 A 地，车速应满足什么条件？

分析：设车速是 x km/h.

从时间上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 50 km 所用的时间不到 $\frac{2}{3}$ h，即

$$\frac{50}{x}<\frac{2}{3}. \quad ①$$

从路程上看，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，则以这个速度行驶 $\frac{2}{3}$ h 的路程要超过 50 km，即

$$\frac{2}{3}x>50. \quad ②$$

式子①和②从不同角度表示了车速应满足的条件.

像①和②这样用符号"<"或">"表示大小关系的式子，叫做**不等式**(inequality). 像 $a+2\neq a-2$ 这样用符号"≠"表示不等关系的式子也是不等式.

有些不等式中不含未知数，例如 $3<4$，$-1>-2$. 有些不等式中含有未知数，例如①和②式中字母 x 表示未知数.

虽然①和②式表示了车速应满足的条件，但是我们希望更明确地得出 x 应取哪些值. 例如对不等式②，当 $x=80$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=78$ 时，$\frac{2}{3}x>50$；当 $x=75$ 时，$\frac{2}{3}x=50$；当 $x=72$ 时，$\frac{2}{3}x<50$. 这就是说，当 x 取某些值（如 80，78）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 成立；当 x 取某些值（如 75，72）时，不等式 $\frac{2}{3}x>50$ 不成立. 与方程的解类似，我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**.

例如 80 和 78 是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解，而 75 和 72 不是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解.

思考

除了 80 和 78，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 还有其他解吗？如果有，这些解应满足什么条件？

可以发现，当 $x>75$ 时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 总成立；而当 $x<75$ 或 $x=75$ 时，不等式$\frac{2}{3}x>50$ 不成立. 这就是说，任何一个大于 75 的数都是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解，这样的解有无数个；任何一个小于或等于 75 的数都不是不等式$\frac{2}{3}x>50$ 的解. 因此，$x>75$ 表示了能使不等式$\frac{2}{3}x>50$成立的 x 的取值范围，它可以在数轴上表示（图 9.1-1）.

图 9.1-1

在表示 75 的点上画空心圆圈，表示不包含这一点.

由上可知，在前面问题中，汽车要在 12:00 之前驶过 A 地，车速必须大于 75 km/h.

由不等式①能得出这个结果吗？

一般地，一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的**解集**（solution set）. 求不等式的解集的过程叫做**解不等式**.

练习

1. 用不等式表示：

(1) a 是正数；

(2) a 是负数；

(3) a 与 5 的和小于 7；

(4) a 与 2 的差大于 -1；

(5) a 的 4 倍大于 8；

(6) a 的一半小于 3.

2. 下列数中哪些是不等式 $x+3>6$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2.5,\ 0,\ 1,\ 2.5,\ 3,\ 3.2,\ 4.8,\ 8,\ 12.$$

3. 直接说出下列不等式的解集：

(1) $x+3>6$；　　(2) $2x<8$；　　(3) $x-2>0$.

9.1.2　不等式的性质

对于某些简单的不等式，我们可以直接得出它们的解集，例如不等式 $x+3>6$ 的解集是 $x>3$，不等式 $2x<8$ 的解集是 $x<4$. 但是对于比较复杂的不等式，例如$\frac{5x+1}{6}-2>\frac{x-5}{4}$，直接得出解集就比较困难. 因此，还要讨论怎样解不等式. 与解方程需要依据等式的性质一样，解不等式需要依据不等式的性质. 为此，我们先来看看不等式有什么性质.

我们知道，等式两边加或减同一个数（或式子），乘或除以同一个数（除数不为 0），结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢？

思考

用“>”或“<”填空，并总结其中的规律：

(1) $5>3$，$5+2$ ____ $3+2$，$5-2$ ____ $3-2$；

(2) $-1<3$，$-1+2$ ____ $3+2$，$-1-3$ ____ $3-3$；

(3) $6>2$，6×5 ____ 2×5，$6\times(-5)$ ____ $2\times(-5)$；

(4) $-2<3$，$(-2)\times6$ ____ 3×6，$(-2)\times(-6)$ ____ $3\times(-6)$.

根据发现的规律填空：当不等式两边加或减同一个数（正数或负数）时，不等号的方向________. 当不等式两边乘同一个正数时，不等号的方向________；而乘同一个负数时，不等号的方向________.

换一些其他的数，验证这个发现.

一般地，不等式有以下性质.

不等式的性质 1 不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，那么 } a\pm c>b\pm c.}$$

不等式的性质 2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c>0\text{，那么 } ac>bc\left(\text{或}\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right).}$$

不等式的性质 3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

$$\boxed{\text{如果 } a>b\text{，}c<0\text{，那么 } ac<bc\left(\text{或}\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right).}$$

比较上面的性质 2 和性质 3，指出它们有什么区别. 再比较等式的性质和不等式的性质，它们有什么异同？

练习

设 $a>b$，用“$<$”或“$>$”填空：

（1）$a+2$ ____ $b+2$；　　（2）$a-3$ ____ $b-3$；

（3）$-4a$ ____ $-4b$；　　（4）$\frac{a}{2}$ ____ $\frac{b}{2}$.

例 1 利用不等式的性质解下列不等式：

（1）$x-7>26$；　　（2）$3x<2x+1$；

（3）$\frac{2}{3}x>50$；　　（4）$-4x>3$.

分析：解不等式，就是要借助不等式的性质使不等式逐步化为 $x>a$ 或 $x<a$（a 为常数）的形式.

解：（1）根据不等式的性质 1，不等式两边加 7，不等号的方向不变，所以

$$x-7+7>26+7,$$

$$x>33.$$

（2）根据不等式的性质 1，不等式两边减 $2x$，不等号的方向不变，所以

$$3x-2x<2x+1-2x,$$

$$x<1.$$

（3）根据不等式的性质 2，不等式两边乘$\frac{3}{2}$，不等号的方向不变，所以

$$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x>\frac{3}{2}\times 50,$$

$$x>75.$$

（4）根据不等式的性质 3，不等式两边除以-4，不等号的方向改变，所以

$$\frac{-4x}{-4}<\frac{3}{-4},$$

$$x<-\frac{3}{4}.$$

不等式的解集也可以在数轴上表示，如上例中不等式 $x-7>26$ 的解集在数轴上的表示如图 9.1-2 所示.

图 9.1-2

不等式 $3x<2x+1$ 的解集在数轴上的表示如图 9.1-3 所示.

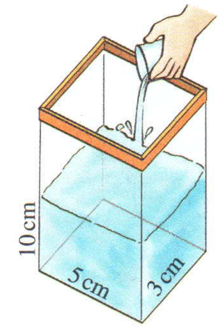
图 9.1-3

请你在数轴上表示例 1 中其他两个不等式的解集.

像 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系. 例如，为了表示 2011 年 9 月 1 日北京的最低气温是 19 ℃，最高气温是 28 ℃，我们可以用 t 表示这天的气温，t 是随时间变化的，但是它有一定的变化范围，即 $t\geqslant 19$ ℃并且 $t\leqslant 28$ ℃. 符号“$\geqslant$”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”. $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质.

符号“$\geqslant$”与“$>$”的意思有什么区别？“$\leqslant$”与“$<$”呢？

例 2 某长方体形状的容器长 5 cm，宽3 cm，高 10 cm. 容器内原有水的高度为 3 cm，现准备向它继续注水. 用 V（单位：cm^3）表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围.



解： 新注入水的体积 V 与原有水的体积的和不能超过容器的容积，即

$$V+3\times5\times3\leqslant3\times5\times10,$$
$$V\leqslant105.$$

又由于新注入水的体积 V 不能是负数，因此，V 的取值范围是

$$V\geqslant0 \text{ 并且 } V\leqslant105.$$

在表示 0 和 105 的点上画实心圆点，表示取值范围包含这两个数.

在数轴上表示 V 的取值范围如图 9.1-4 所示.

图 9.1-4

练习

1. 用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+5>-1$；　　(2) $4x<3x-5$；

(3) $\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$；　　(4) $-8x>10$.

2. 用不等式表示下列语句并写出解集，并在数轴上表示解集：

(1) x 的 3 倍大于或等于 1；　　(2) x 与 3 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 0；　　(4) y 的$\frac{1}{4}$小于或等于-2.

习题 9.1

复习巩固

1. 下列数值中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解？哪些不是？

$$-4,\ -2,\ 0,\ 3,\ 3.01,\ 4,\ 6,\ 100.$$

2. 用不等式表示：

(1) a 与 5 的和是正数；　　(2) a 与 2 的差是负数；

(3) b 与 15 的和小于 27；　　(4) b 与 12 的差大于 -5；

(5) c 的 4 倍大于或等于 8；　　(6) c 的一半小于或等于 3；

(7) d 与 e 的和不小于 0；　　(8) d 与 e 的差不大于 -2.

3. 写出不等式的解集：

(1) $x+2>6$；　　(2) $2x<10$；

(3) $x-2>0.1$；　　(4) $-3x<10$.

4. 设 $m>n$，用“<”或“>”填空：

(1) $m-5$ ____ $n-5$；　　(2) $m+4$ ____ $n+4$；

(3) $6m$ ____ $6n$；　　(4) $-\frac{1}{3}m$ ____ $-\frac{1}{3}n$.

5. 利用不等式的性质解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $x+3>-1$；　　(2) $6x\leqslant 5x-7$；

(3) $-\frac{1}{3}x<\frac{2}{3}$；　　(4) $4x\geqslant -12$.

综合运用

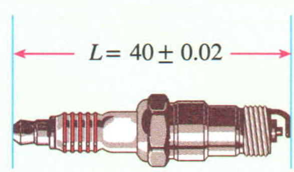
6. 设 $a>b$，用“<”或“>”填空：

(1) $2a-5$ ______ $2b-5$；

(2) $-3.5b+1$ ______ $-3.5a+1$.

7. 根据机器零件的设计图纸（如图），用不等式表示零件长度的合格尺寸（L 的取值范围）.

8. 一罐饮料净重约 300 g，罐上注有“蛋白质含量 $\geqslant 0.6\%$”，其中蛋白质的含量为多少克？



（第 7 题）

拓广探索

9. 有一个两位数，如果把它的个位上的数 a 和十位上的数 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

阅读与思考

用求差法比较大小

制作某产品有两种用料方案，方案1用4块A型钢板，8块B型钢板；方案2用3块A型钢板，9块B型钢板．A型钢板的面积比B型钢板大．从省料角度考虑，应选哪种方案？

设A型钢板和B型钢板的面积分别为x和y．于是，两种方案用料面积分别为

$$4x+8y \text{ 和 } 3x+9y.$$

现在需要比较上面两个数量的大小．

两个数量的大小可以通过它们的差来判断．如果两个数a和b比较大小，那么

当$a>b$时，一定有$a-b>0$；

当$a=b$时，一定有$a-b=0$；

当$a<b$时，一定有$a-b<0$．

反过来也对，即

当$a-b>0$时，一定有$a>b$；

当$a-b=0$时，一定有$a=b$；

当$a-b<0$时，一定有$a<b$．

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小．

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

9.2 一元一次不等式

我们已经知道了什么是不等式以及不等式的性质．本节我们将学习一元一次不等式及其解法，并用它解决一些实际问题．

思考

观察下面的不等式：

$$x-7>26,\ 3x<2x+1,\ \frac{2}{3}x>50,\ -4x>3.$$

它们有哪些共同特征？

可以发现，上述每个不等式都只含有一个未知数，并且未知数的次数是 1．类似于一元一次方程，含有一个未知数，未知数的次数是 1 的不等式，叫做**一元一次不等式**（linear inequality in one unknown）．

从上节我们知道，不等式

$$x-7>26$$

的解集是

$$x>33.$$

这个解集是通过"不等式两边都加 7，不等号的方向不变"而得到的，事实上，这相当于由 $x-7>26$ 得 $x>26+7$．这就是说，解不等式时也可以"移项"，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向．

一般地，利用不等式的性质，采取与解一元一次方程相类似的步骤，就可以求出一元一次不等式的解集．

例 1 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

（1）$2(1+x)<3$；　　（2）$\frac{2+x}{2}\geq\frac{2x-1}{3}$．

解：（1）去括号，得

$$2+2x<3.$$

移项，得

$$2x<3-2.$$

合并同类项，得

$$2x<1.$$

系数化为 1，得

$$x<\frac{1}{2}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.2-1 所示.

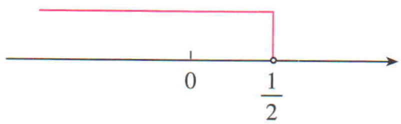


图 9.2-1

(2) 去分母，得

$$3(2+x)\geqslant 2(2x-1).$$

去括号，得

$$6+3x\geqslant 4x-2.$$

移项，得

$$3x-4x\geqslant -2-6.$$

合并同类项，得

$$-x\geqslant -8.$$

系数化为 1，得

$$x\leqslant 8.$$

要特别注意，当不等式的两边都乘（或除以）同一个负数时，不等号的方向改变.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.2-2 所示.

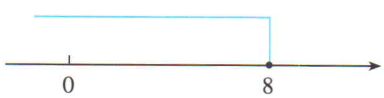


图 9.2-2

归纳

解一元一次方程，要根据等式的性质，将方程逐步化为 $x=a$ 的形式；而解一元一次不等式，则要根据不等式的性质，将不等式逐步化为 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

(1) $5x+15>4x-1$；　　(2) $2(x+5)\leqslant 3(x-5)$；

(3) $\dfrac{x-1}{7}<\dfrac{2x+5}{3}$；　　(4) $\dfrac{x+1}{6}\geqslant\dfrac{2x-5}{4}+1$.

2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？

(1) $2(x+1)$ 大于或等于 1；

(2) $4x$ 与 7 的和不小于 6；

(3) y 与 1 的差不大于 $2y$ 与 3 的差；

(4) $3y$ 与 7 的和的四分之一小于 -2.

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系，就能把实际问题转化为数学问题，从而通过解不等式得到实际问题的答案.

例 2　去年某市空气质量良好（二级以上）的天数与全年天数（365）之比达到 60%，如果明年（365 天）这样的比值要超过 70%，那么明年空气质量良好的天数比去年至少要增加多少？

分析：“明年这样的比值要超过 70%”指出了这个问题中蕴含的不等关系，转化为不等式，即$\dfrac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.

解：设明年比去年空气质量良好的天数增加了 x.

去年有 $365\times 60\%$ 天空气质量良好，明年有（$x+365\times 60\%$）天空气质量良好，并且

$$\frac{x+365\times 60\%}{365}>70\%.$$

去分母，得

$$x+219>255.5.$$

移项，合并同类项，得

$$x>36.5.$$

由 x 应为正整数，得

$$x\geqslant 37.$$

答：明年空气质量良好的天数比去年至少要增加 37，才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

例 3 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲商场累计购物超过 100 元后，超出 100 元的部分按 90%收费；在乙商场累计购物超过 50 元后，超出 50 元的部分按 95%收费. 顾客到哪家商场购物花费少？

分析： 在甲商场购物超过 100 元后享受优惠，在乙商场购物超过 50 元后享受优惠. 因此，我们需要分三种情况讨论：

（1）累计购物不超过 50 元；

（2）累计购物超过 50 元而不超过 100 元；

（3）累计购物超过 100 元.

解：（1）当累计购物不超过 50 元时，在甲、乙两商场购物都不享受优惠，且两商场以同样价格出售同样的商品，因此到两商场购物花费一样.

（2）当累计购物超过 50 元而不超过 100 元时，享受乙商场的购物优惠，不享受甲商场的购物优惠，因此到乙商场购物花费少.

（3）当累计购物超过 100 元时，设累计购物 $x(x>100)$ 元.

① 若到甲商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)>100+0.9(x-100).$$

解得 $x>150$.

这就是说，累计购物超过 150 元时，到甲商场购物花费少.

② 若到乙商场购物花费少，则

$$50+0.95(x-50)<100+0.9(x-100).$$

解得 $x<150$.

这就是说，累计购物超过 100 元而不到 150 元时，到乙商场购物花费少.

③ 若 $50+0.95(x-50)=100+0.9(x-100)$，解得

$$x=150.$$

这就是说，累计购物为 150 元时，到甲、乙两商场购物花费一样.

练习

1. 某工程队计划在 10 天内修路 6 km. 施工前 2 天修完 1.2 km 后，计划发生变化，准备至少提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少？
2. 某次知识竞赛共有 20 道题，每一题答对得 10 分，答错或不答都扣 5 分. 小明得分要超过 90 分，他至少要答对多少道题？

习题 9.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+5)>2(4x+3)$；　　(2) $10-4(x-4)\leqslant 2(x-1)$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2x-1}{3}\leqslant\dfrac{3x-4}{6}$；

(5) $\dfrac{5x+1}{6}-2>\dfrac{x-5}{4}$；　　(6) $\dfrac{y+1}{6}-\dfrac{2y-5}{4}\geqslant 1$.

2. a 取什么值时，式子$\dfrac{4a+1}{6}$表示下列数？

(1) 正数；　　(2) 小于-2的数；　　(3) 0.

3. 根据下列条件求正整数 x：

(1) $x+2<6$；　　(2) $2x+5<10$；

(3) $\dfrac{x-3}{2}\geqslant\dfrac{2x-5}{3}$；　　(4) $\dfrac{2+x}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{3}-2$.

4. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较.

综合运用

5. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售. 两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？

6. 长跑比赛中，张华跑在前面，在离终点 100 m 时他以 4 m/s 的速度向终点冲刺，在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点？

7. 某工厂前年有员工 280 人，去年经过结构改革减员 40 人，全厂年利润增加100 万元，人均创利至少增加 6 000 元，前年全厂年利润至少是多少？

8. 苹果的进价是每千克 1.5 元，销售中估计有 5%的苹果正常损耗. 商家把售价至少定为多少，才能避免亏本？

9. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售总额超过 55 万元. 这批计算机最少有多少台？

拓广探索

10. 求不等式 $5x-1>3(x+1)$ 与 $\dfrac{1}{2}x-1<7-\dfrac{3}{2}x$ 的解集的公共部分.

9.3 一元一次不等式组

问题　用每分可抽 30 t 水的抽水机来抽污水管道里积存的污水，估计积存的污水超过 1 200 t 而不足 1 500 t，那么将污水抽完所用时间的范围是什么？

设用 x min 将污水抽完，则 x 同时满足不等式

$$30x > 1\,200, \qquad ①$$

$$30x < 1\,500. \qquad ②$$

类似于方程组，把这两个不等式合起来，组成一个**一元一次不等式组**(system of linear inequalities in one unknown)，记作

$$\begin{cases} 30x>1\,200, \\ 30x<1\,500. \end{cases}$$

怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

类比方程组的解，不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.

由不等式①，解得

$$x>40.$$

由不等式②，解得

$$x<50.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-1).

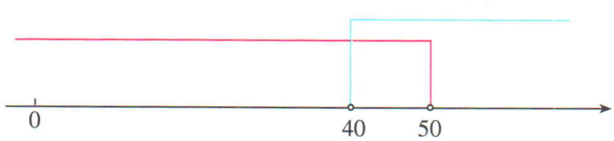


图 9.3-1

利用数轴体会：x 可取值的范围是两个不等式解集的公共部分.

从图 9.3-1 容易看出，x 取值的范围为

$$40<x<50.$$

这就是说，将污水抽完所用时间多于 40 min 而少于 50 min.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的**解集**. 解不等式组就是求它的解集.

例 1 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 2x-1>x+1, & ① \\ x+8<4x-1; & ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x+3\geqslant x+11, & ① \\ \dfrac{2x+5}{3}-1<2-x. & ② \end{cases}$

解: (1) 解不等式①，得

$$x>2.$$

解不等式②，得

$$x>3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-2).

图 9.3-2

从图 9.3-2 可以找出两个不等式解集的公共部分，得不等式组的解集

$$x>3.$$

利用数轴可以确定不等式组的解集.

(2) 解不等式①，得

$$x\geqslant 8.$$

解不等式②，得

$$x<\frac{4}{5}.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来（图 9.3-3).

图 9.3-3

从图 9.3-3 可以看到这两个不等式的解集没有公共部分，不等式组无解.

例 2 x 取哪些整数值时，不等式

$$5x+2>3(x-1)$$

与

$$\frac{1}{2}x-1\leqslant 7-\frac{3}{2}x$$

都成立？

分析： 求出这两个不等式组成的不等式组的解集，解集中的整数就是 x 可取的整数值.

解： 解不等式组

$$\begin{cases} 5x+2>3(x-1), \\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant 7-\dfrac{3}{2}x, \end{cases}$$

得

$$-\frac{5}{2}<x\leqslant 4.$$

所以 x 可取的整数值是 -2，-1，0，1，2，3，4.

归纳

解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

练习

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x>1-x, \\ x+2<4x-1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-5>1+2x, \\ 3x+2\leqslant 4x; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+5>1-x, \\ x-1\leqslant \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{8}. \end{cases}$

2. x 取哪些正整数值时，不等式 $x+3>6$ 与 $2x-1<10$ 都成立？

习题 9.3

复习巩固

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1<3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-1<3, \\ x+1>3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-1>3, \\ x+1<3. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1\leqslant 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -3x-1>3, \\ 2x+1>3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x-1)+13>5x-2(5-x), \\ 5-(2x+1)<3-6x; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-3(x-2)\geqslant 4, \\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+4)<2, \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3}. \end{cases}$

综合运用

3. x 取哪些整数值时，不等式

$$4(x-0.3)<0.5x+5.8$$

与

$$3+x>\frac{1}{2}x+1$$

都成立？

4. x 取哪些整数值时，$2\leqslant 3x-7<8$ 成立？

拓广探索

5. 你能求三个不等式 $5x-1>3(x+1)$，$\frac{1}{2}x-1>3-\frac{3}{2}x$，$x-1<3x+1$ 的解集的公共部分吗？

6. 把一些书分给几名同学，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每名同学分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本. 这些书有多少本？共有多少人？

数学活动

活动1

统计资料表明，2005 年 A 省的城市建成区面积（简称建成区面积）为 1 316.4 km^2，城市建成区园林绿地面积（简称绿地面积）为 373.48 km^2，城市建成区园林绿地率（简称绿地率）为 28.37%. 2010 年该省建成区面积增加了 300 km^2 左右，绿地率超过了 35%.

根据上述资料，试用一元一次不等式解决以下问题：

这五年（2005～2010 年），A 省增加的绿地面积超过了多少平方千米?

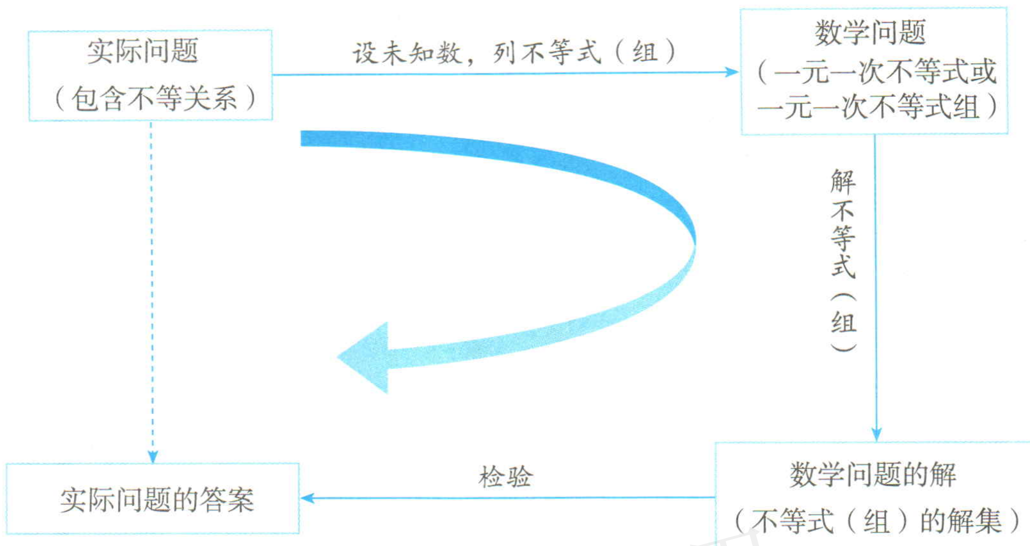
从报刊、图书、网络等再搜集一些资料，分析其中的数量关系，编成问题. 看看能不能用一元一次不等式解决这些问题.

活动2 猜数游戏

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加. 重复这样做，每次所得的和都是 5，6，7，8 中的一个数，并且这 4 个数都能取到. 猜猜看，小丽在 4 张纸片上各写了什么数.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

不等式（组）是刻画不等关系的数学模型，它有广泛的应用．本章主要学习不等式的基础知识以及一类最简单的不等式（组）——一元一次不等式（组），并运用它们解决一些数学问题和实际问题．

在学习不等式的性质和一元一次不等式（组）的解法时，与等式的性质和方程（组）的解法进行类比，有益于对知识的理解与掌握．

与解方程是逐步将方程化为 $x=a$ 的形式类似，解不等式是逐步将不等式化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，两者都运用了化归的思想．

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧．

1. 总结不等式的性质，并与等式的性质进行比较．

2. 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较．结合例子说明：解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式，而不等式的性质是变形的重要依据．

3. 如何解一元一次不等式组？结合例子说明：解不等式组就是求有关不等式的解集的公共部分．

4. 举例说明数轴在解不等式（组）中的作用．

5. 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程．

复习题 9

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7)>23$；
(2) $12-4(3x-1)\leqslant 2(2x-16)$；
(3) $\dfrac{x+3}{5}<\dfrac{2x-5}{3}-1$；
(4) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-1}{2}\geqslant\dfrac{5}{12}$.

2. a 取什么值时，$15-7a$ 的值满足下列条件？

(1) 大于 1；
(2) 小于 1；
(3) 等于 1.

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x+1>-1,\\2x+1<3;\end{cases}$
(2) $\begin{cases}-(x-1)>3,\\2x+9>3;\end{cases}$
(3) $\begin{cases}3(x-1)+1>5x-2(1-x),\\5-(2x-1)<-6x;\end{cases}$
(4) $\begin{cases}-3(x-2)\geqslant 4-x,\\\dfrac{1+2x}{3}>x-1.\end{cases}$

4. $\dfrac{x+3}{5}$的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由.

5. 赵军说不等式 $a>2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a，就会出现 $1>2$ 这样的错误结论. 他的说法对吗？

6. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？

综合运用

7. 一艘轮船从某江上游的 A 地匀速驶到下游的 B 地用了 10 h，从 B 地匀速返回 A 地用了不到 12 h，这段江水流速为 3 km/h，轮船在静水里的往返速度 v 不变，v 满足什么条件？

8. 老张与老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\dfrac{2}{3}$. 一年前老张至少买了多少只种兔？

拓广探索

9. 三个连续正整数的和小于 333，这样的正整数有多少组？写出其中最大的一组.

第十章　数据的收集、整理与描述

从报纸、杂志、电视、互联网等媒体上，我们经常可以看到很多统计数据和统计图表．例如，某地义务教育的普及率达 98%，某电视节目的收视率为 9%，某地年人均生活用水量为 36 m^3，2010 年我国国内生产总值为401 202亿元，比上年增长 10.4%等．这些数据可以帮助人们了解周围世界的现状和变化规律，从而为人们制定决策提供依据．你知道它们是怎样得到的吗？

统计学（statistics）能帮我们回答上述问题．这一章我们将在小学所学统计知识的基础上，学习收集数据的一些基本方法，在此基础上进一步学习如何整理数据，并用统计图表直观形象地描述数据，从中发现数据蕴含的规律，获取我们需要的信息．

节目类型	划记	人数	百分比
A 新闻	正一	6	6%
B 体育	正正正正丅	22	22%
C 动画	正正正正正止	29	29%
D 娱乐	正正正正正正正下	38	38%
E 戏曲	正	5	5%
合计		100	100%

10.1 统计调查

问题 1 如果要了解全班同学对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况，你会怎么做？

为解决问题 1，需要进行统计调查.

首先可以对全班同学采用问卷调查的方法收集数据. 为此要设计调查问卷.

> 调查问卷　　　　年　月
>
> 在下面五类电视节目中，你最喜爱的是（　　）（单选）
>
> (A) 新闻.　(B) 体育.　(C) 动画.
>
> (D) 娱乐.　(E) 戏曲.
>
> 填完后，请将问卷交给数学课代表.

如果想了解男、女生喜爱节目的差异，问卷中还应该包含什么内容？

利用调查问卷，可以收集到全班每位同学最喜爱的节目的编号（字母），我们把它们称为数据. 例如，某同学经调查，得到如下 50 个数据：

C C A D B C A D C D
C E A B D D B C C C
D B D C D D D C D C
E B B D D C C E B D
A B D D C B C B D D

用字母代替节目的类型，可方便统计.

从上面的数据中，你能看出全班同学喜爱各类节目的情况吗？

杂乱无章的数据不利于我们发现其中的规律. 为了更清楚地了解数据所蕴含的规律，需要对数据进行整理. 统计中经常用表格整理数据，对前面数据的整理如表 10-1 所示.

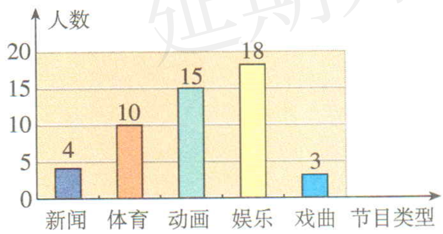
表 10-1　全班同学最喜爱节目的人数统计表

节目类型	划记	人数	百分比
A 新闻	正	4	8%
B 体育	正正	10	20%
C 动画	正正正	15	30%
D 娱乐	正正正下	18	36%
E 戏曲	下	3	6%
合计	50	50	100%

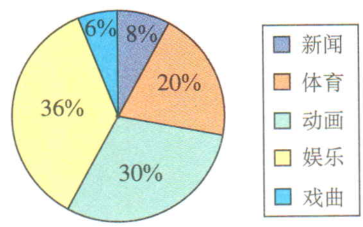
此例中，用划记法记录数据时，“正”字的每一划（笔画）代表一名同学. 例如，编号为 A 的节目对应的人数是 4，记为“正”.

表 10-1 可以清楚地反映全班同学喜爱各类节目的情况. 例如，最喜爱新闻节目的同学有 4 名，占全班同学的 8%；最喜爱体育节目的同学有 10 名，占全班同学的 20%；等等.

为了更直观地看出表 10-1 中的信息，还可以用条形图和扇形图来描述数据（图 10.1-1）.



(1)



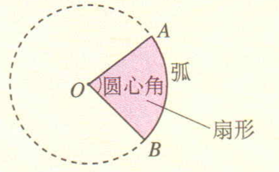
(2)

图 10.1-1

你能根据表 10-1 和图 10.1-1 说出全班同学喜爱五类电视节目的情况吗?

我们知道，扇形图用圆代表总体，每一个扇形代表总体中的一部分，通过扇形的大小来反映各个部分占总体的百分比. 画扇形图 10.1-1 (2) 时，首先按各类节目所占的百分比算出对应扇形的圆心角度数. 例如，“体育”和“动画”对应扇形的圆心角分别为 $360^\circ\times20\%=72^\circ$，$360^\circ\times30\%=$

圆心角越大，扇形在圆中占的百分比就越大.



108°. 然后在一个圆中，根据算得的各圆心角度数画出各个扇形，并注明各类节目的名称及其相应的百分比.

在上面的调查中，我们利用调查问卷得到全班同学喜爱电视节目的数据，利用表格整理数据，并用统计图进行直观形象的描述. 通过分析表和图，了解到了全班同学喜爱电视节目的情况. 在这个调查中，全班同学是要考察的全体对象，我们对全体对象都进行了调查. 像这样考察全体对象的调查叫做**全面调查**. 例如，2010 年我国进行的第六次人口普查，就是一次全面调查.

练习

1. 小明为了解同学们的课余生活，设计了如下调查问题：

   你平时最喜欢的一项课余活动是（　　）.

   （A）看课外书　　（B）体育活动　　（C）看电视　　（D）踢足球

   你认为此问题的答案选项设计合理吗？为什么？如果不合理，请修改.

2. 经调查，某班学生上学所用的交通工具中，自行车占 60%，公交车占 30%，其他占 10%，请画出扇形图描述以上统计数据.

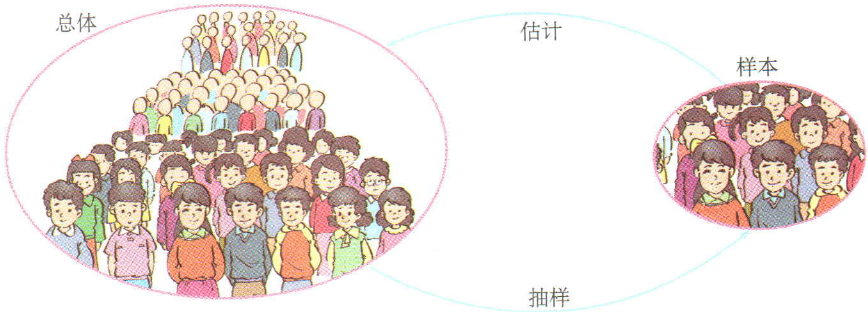
3. 请你举出一些生活中运用全面调查的例子.

问题 2　某校有 2 000 名学生，要想了解全校学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况，怎样进行调查？

可以用全面调查的方法对全校学生逐个进行调查，然后整理收集到的数据，统计出全校学生对五类电视节目的喜爱情况. 但是，由于学生比较多，全面调查花费的时间长，消耗的人力、物力大. 因此，需要寻找一种不作全面调查就能了解全校学生喜爱各类电视节目的情况的方法，达到既省时省力又能解决问题的目的. 这就是我们要讨论的抽样调查.

抽样调查（sampling survey）是这样一种方法，它只抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况. 在问题 2 中，我们只抽取一部分学生进行调查，然后通过分析被调查学生的数据来推断全校学生喜爱电视节目的情况. 全校学生是要考察的全体对象，称为总体，组成总体的每一个学生称为个体，而被抽取调查的那部分学生构成总体的一个样本.

为了强调调查目的，人们有时也把全校学生喜爱的电视节目作为总体，每一个学生喜爱的电视节目作为个体.



那么，抽取多少名学生进行调查比较合适？被调查的学生又如何抽取呢？

如果抽取调查的学生很少，样本就不容易具有代表性，也就不能客观地反映总体的情况；如果抽取调查的学生很多，虽然样本容易具有代表性，但花费的时间、精力也很多，达不到省时省力的目的．因此抽取调查的学生数目要适当．例如，这个问题中可以抽取 100 名学生作为样本进行调查．一个样本中包含的个体的数目称为样本容量，上述抽取的样本容量为 100.

想了解一锅八宝粥里各种成分的比例，只要搅拌均匀后，舀一勺查看，就能对整锅的情况估计个八九不离十．你能说说这与抽取部分学生估计全校学生情况之间的相似之处吗？

为了使样本尽可能具有代表性，除了抽取调查的学生数要合适外，抽取样本时，不能偏向某些学生，应使学校中的每一个学生都有相等的机会被抽到．例如，上学时在学校门口随意调查 100 名学生；在全校学生的注册学号中，随意抽取 100 个学号，调查这些学号对应的学生；等等.

你还能想出使每个学生都有相等机会被抽到的方法吗？

下面是某同学抽取样本容量为 100 的调查数据统计表.

表 10-2　抽样调查 100 名学生最喜爱节目的人数统计表

节目类型	划记	人数	百分比
A 新闻	正一	6	6%
B 体育	正正正正丅	22	22%
C 动画	正正正正正𤴓	29	29%
D 娱乐	正正正正正正正下	38	38%
E 戏曲	正	5	5%
合计		100	100%

从表 10-2 可以看出，样本中喜爱娱乐节目的学生最多，为 38%. 据此可以估计出，这个学校的学生中，喜爱娱乐节目的最多，约为 38%. 类似地，由上表可以估计这个学校喜爱其他节目的学生的百分比，如图 10.1-2 所示.

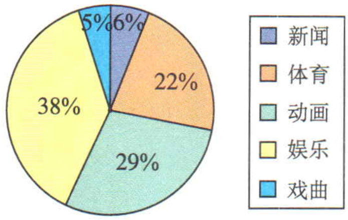


图 10.1-2

上面抽取样本的过程中，总体中的每一个个体都有相等的机会被抽到，像这样的抽样方法是一种**简单随机抽样**（simple random sampling）.

抽样调查是实际中经常采用的收集数据的方式. 除了具有花费少、省时省力的特点外，还适用于一些不宜用全面调查的情况，例如，检测某批次灯泡的使用寿命、火柴的质量等具有破坏性的调查. 需要注意的是，在抽样调查中，如果抽取样本的方法得当，一般样本能客观地反映总体的情况，抽样调查的结果会比较接近总体的情况，否则抽样调查的结果往往会偏离总体的情况.

归纳

全面调查和抽样调查是收集数据的两种方式. 全面调查收集到的数据全面、准确，但一般花费多、耗时长，而且某些调查不宜用全面调查. 抽样调查具有花费少、省时的特点，但抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度.

请以小组为单位解决如下问题.

问题 3 比较你所在学校三个年级同学的平均体重：

（1）制定调查方案，利用课余时间实施调查；

（2）根据收集到的数据，分析出每个年级同学的平均体重，并用折线图表示平均体重随年级增加的变化趋势；

（3）每组安排一位代表向全班介绍本组完成上述问题的情况，并进行比较和评议.

练习

1. 为了解全校同学的平均身高，小明调查了座位在自己旁边的 3 名同学，把他们身高的平均值作为全校同学平均身高的估计.

   (1) 小明的调查是抽样调查吗?

   (2) 这个调查结果能较好地反映总体的情况吗? 如果不能，请说明理由.

2. 某班要选 3 名同学代表本班参加班级间的交流活动. 现在按下面的办法抽取：把全班同学的姓名分别写在没有明显差别的小纸片上，把纸片混放在一个盒子里，充分搅拌后，随意抽取 3 张，按照纸片上所写的名字选取 3 名同学. 你觉得上面的抽取过程是简单随机抽样吗? 为什么?

3. 以下调查中，哪些适宜全面调查，哪些适宜抽样调查?

   (1) 调查某批次汽车的抗撞击能力;

   (2) 了解某班学生的身高情况;

   (3) 调查春节联欢晚会的收视率;

   (4) 选出某校短跑最快的学生参加全市比赛.

4. 请你举出一些不宜用全面调查的例子，并说明理由.

习题 10.1

复习巩固

1. 请对全班同学进行调查，并填写下表.

全班同学出生月份统计表

月份	划记	人数
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

续表

月份	划记		人数
9			
10			
11			
12			
合计			

2. 两名同学在作抽样调查时使用下面两种提问方式，你认为哪一种更好些？

(1) 难道你不认为科幻片比纪录片更有意思吗？

(2) 你更喜欢哪一类电影——科幻片还是纪录片？

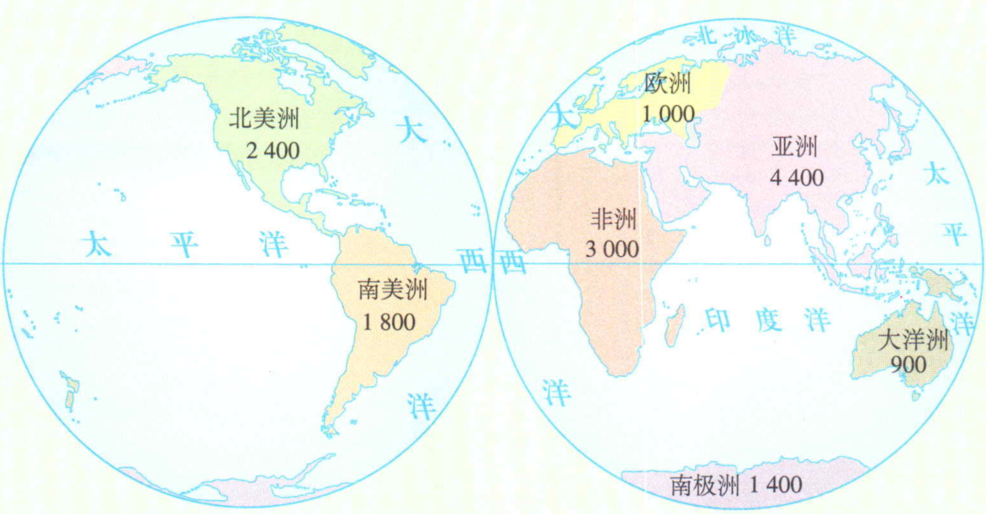
3. 要调查下面几个问题，你认为应该作全面调查还是抽样调查？

(1) 了解全班同学每周体育锻炼的时间.

(2) 调查市场上某种食品的色素含量是否符合国家标准.

(3) 鞋厂检测生产的鞋底能承受的弯折次数.

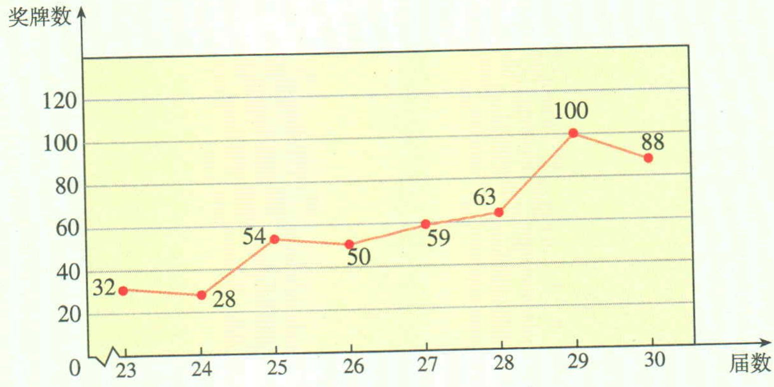
4. 根据下图中所标世界七大洲的面积（单位：万 km^2），画扇形图表示各大洲面积占全球陆地面积的百分比，并用语言描述你获得的信息.



西半球　　东半球

（第 4 题）

5. 我国体育健儿在最近八届奥运会上获得奖牌的情况如图所示.



（第 5 题）

（1）最近八届奥运会上，我国体育健儿共获得多少枚奖牌？

（2）用条形图表示折线图中的信息.

综合运用

6. 一家食品公司的市场调查员将本公司生产的一种新点心免费送给 36 人品尝，以调查这种点心的甜度是否适中. 调查结果如下：

C	C	C	B	A	D	B	C	C
D	C	C	A	B	D	C	E	C
E	C	C	A	B	E	C	B	C
C	B	C	C	C	B	C	D	C

A 太甜
B 稍甜
C 适中
D 稍淡
E 太淡

请用表格整理上面的数据，画出条形图，并推断甜点的甜度是否适中.

7. 为了了解七年级同学对三种元旦活动方案的意见，校学生会对七年级全体同学进行了一次调查（每人至多赞成一种方案）. 结果有 115 人赞成方案 1，62 人赞成方案 2，40 人赞成方案 3，8 人弃权. 请用扇形图描述这些数据，并对校学生会采用哪种方案组织元旦活动提出建议.

8. 随着对外开放程度的不断扩大，我国对外贸易迅速发展. 下表是我国近几年的进出口额数据. 请选择适当统计图描述这两组数据，并对它们进行比较.

年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
出口额/亿美元	5 933	7 620	9 689	12 178	14 307	12 016	15 777
进口额/亿美元	5 612	6 600	7 915	9 560	11 326	10 059	13 962